

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 13, № 1



2011

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 13, № 1

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

В. Ф. Тишкун (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2011

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 13, № 1

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректор: Егорова Д. К.

Издаётся в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

Редакционная страница	6
<hr/>	
Г. И. Казакевич, Л. В. Клочкова, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкун	
Математическое исследование системы уравнений газогидратных	
процессов в пористой среде	7
1. Введение	7
2. Постановка задачи	8
3. Общий подход к решению системы (1.1)–(1.6)	8
4. Вывод диссипативного уравнения теории гидратов	9
5. Заключение	10
<hr/>	
Е. Б. Кузнецов	
Прохождение предельных состояний упругопластических тел ..	12
1. Регуляризация одномерной задачи	12
2. Регуляризация системы конечноэлементных уравнений	15
3. Численная реализация алгоритма регуляризации	17
4. Геометрически нелинейный случай	19
5. Заключение	20
<hr/>	
М. В. Булатов, Т. В. Амосова, Г. Ванден Берге	
Неклассические разностные схемы для обыкновенных дифферен-	
циальных уравнений второго порядка (начальная задача)	22
1. Введение	22
2. Двушаговые схемы	22
3. Несимметричные схемы	25
4. Численные эксперименты	26
<hr/>	
В. З. Гринес, Ю. А. Левченко	
О топологической классификации А-дiffeоморфизмов на 3-	
многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и	
репеллерами	29
<hr/>	
Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов	
Разностные аппроксимации задач оптимального управления для	
квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэф-	
фициентами и решениями	32
1. Введение	32
2. Постановка задач с разрывными коэффициентами и решениями для состо-	
яния. Корректность постановки	32
3. Разностная аппроксимация задачи для состояния с разрывными коэффици-	
ентами и решением. Корректность	35
4. Постановка задач оптимального управления. Корректность постановок ..	41
5. Разностные аппроксимации задач оптимального управления	42

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

С. Н. Алексеенко, С. Н. Нагорных

Альтернативные системы дифференциальных уравнений плотности дислокаций для крутильной жёсткости стержней	45
--	----

Д. И. Бояркин

Нерегулярная эллиптическая краевая задача с вырождением на границе	51
1. Классификация многообразия вырождения коразмерности $k \geq 2$	51
2. Постановка задачи краевой задачи	52

Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко

Численное моделирование гармоник намагниченности диска из жесткого сверхпроводника второго рода в приближении экранировки поля в центре образца	55
1. Введение	55
2. Постановка задачи и модель расчета	55
3. Структура и алгоритм работы программы	57
4. Результаты расчета	58
5. Заключение	61

Т. М. Митрякова, О. В. Починка, А. Е. Шишенкова

О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством	63
1. Определения и формулировка результатов	63
2. Динамика диффеоморфизмов класса Φ	64
3. Структура пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов класса Φ .	66

Г. А. Смолкин

Априорные оценки для вырождающихся эллиптических операторов в обобщенных пространствах С.Л.Соболева	71
---	----

С. И. Спивак, А. С. Исмагилова, И. А. Хамитова

Теоретико-графовый метод определения ключевых веществ в сложных химических реакциях	79
---	----

П. А. Шаманаев, В. А. Атряхин

Численное моделирование динамики потока научных и научно-педагогических кадров на основе статистических данных по МГУ им. Н.П.Огарева	84
1. Введение	84
2. Постановка задачи	84
3. Апробация математической модели на основании статистических данных по МГУ им. Н. П. Огарёва	85

4. Проверка адекватности предложенной модели	89
--	----

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. Г. Шарапов

Инвариантные меры одного класса квазиэндоморфизмов пространства Лебега	91
1. Введение	91
2. Постановка задачи	91
3. Приведение квазиэндоморфизмов данного класса к инвариантной мере	91

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

М. Р. Еникеев, Л. В. Сайфуллина, И. М. Губайдуллин

Разработка комплекса программ для решения задачи оптимизации процесса окислительной регенерации	95
1. Введение	95
2. Моделирование процесса регенерации на единичном зерне катализатора	96
3. Моделирование процесса в слое катализатора	97
4. Описание программного комплекса	100
5. Заключение	101

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 100 - летию Мстислава Всееволодовича Келдыша	103
--	-----

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»	109
Алфавитный указатель	111

ОТ РЕДАКЦИИ

В настоящем номере публикуются работы ученых, которые являются постоянными участниками научных школ и конференций по математическому моделированию, численным методам и прикладной математике. Номер выходит к началу Пятой международной научной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского. В нем есть как работы ведущих ученых, так и начинающих математиков и инженеров.

Редакция искренне желает всем авторам здоровья и творческих успехов!

УДК 51.7:532.546

Математическое исследование системы уравнений газогидратных процессов в пористой среде

© Г. И. Казакевич¹, Л. В. Клочкова², Ю. А. Повещенко³, В.Ф. Тишкун⁴

Аннотация. В настоящее время газовые гидраты рассматриваются как потенциальные источники углеводородов. Методами математической физики исследована система массовых и энергетических балансов, описывающая динамику флюидов: совместного поведения свободных гидратов, воды, газа и их энергетическое взаимодействие с неподвижным скелетом. В результате исходная краевая задача расщеплена на основное диссипативное уравнение теории гидратов, определяющее "термодинамическую" эволюцию параметров системы, и сатурационную часть, описывающую "гиперболическое" поведение среды, насыщенной гидратом и флюидами.

Ключевые слова: газовые гидраты, углеводороды, методы математической физики

1. Введение

Газовым гидратамделено большое внимание в литературе [1]. По имеющимся данным объем углеводородного газа, содержащегося в гидратах, значительно превосходит остальные его запасы. В основе математического описания процессов диссоциации газовых гидратов в пористой среде [2] - [4] лежат уравнения механики сплошной среды, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии.

Исходные уравнения неразрывности (по компонентный массовый флюидобаланс в свободном и связанном состояниях) могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_\nu S_w \rho_w + (1 - S_\nu) \rho_\nu \beta_w)\} + \operatorname{div} [\rho_w \vec{V}_w] + q_w = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_\nu(1 - S_w) \rho_g + (1 - S_\nu) \rho_\nu(1 - \beta_w))\} + \operatorname{div} [\rho_g \vec{V}_g] + q_g = 0. \quad (1.2)$$

Здесь индексы g , w , ν – относятся к газу, воде, гидрату, скелету пористой среды, т.е. соответствующие фазе l ; P – давление, S_w – водонасыщенность, ν – гидратонасыщенность, $S_\nu = 1 - \nu$ – растянутость, $\rho_l(P, T)$ – плотности фаз, β_w – массовая доля воды в гидрате, \vec{r} – радиус-вектор, t – время, $q_g(t, \vec{r}, S_w, S_v, P)$, $q_w(t, \vec{r}, S_w, S_v, P)$ – плотности источников соответствующих фаз, \vec{V}_w , \vec{V}_g – скорости фильтрации воды и газа, определяемые законом Дарси с учетом гравитации в среде с общим давлением P :

$$\vec{V}_w = -\frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P - G \rho_w \vec{k}), \quad (1.3)$$

¹Старший научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва; gkazakevich@yandex.ru.

²Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

³Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; poveshchenko@keldysh.ru.

⁴Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.

$$\vec{V}_g = -\frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P - G \rho_g \vec{k}), \quad (1.4)$$

где \vec{k} – вертикальный координатный орт, G – ускорение свободного падения, $k(\vec{r}, s_\nu, P)$ – абсолютная проницаемость, $k_{rg}(S_w)$, $k_{rw}(S_w)$ – фазовые проницаемости, $\mu_g(P, T)$, $\mu_w(P, T)$ – вязкости, $m(\vec{r}, P)$ – пористость.

Систему уравнений (1.1)–(1.2) при фиксированных значениях определяющих термодинамических переменных будем называть сатурационным блоком, имея в виду, что эти уравнения служат для определения влагонасыщенности S_w и растепленности S_ν .

Внутренняя энергия гидрата выражается через энергию создающих его газа и воды следующим образом:

$$\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_\nu + h, \quad (1.5)$$

где h – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата, i_g , i_ν – энталпии газа и воды соответственно.

Пусть l – индекс, указывающий фазу, то $i_l = \varepsilon_l + P/\rho_l$ – энталпии фаз, $\varepsilon_l(P, T)$ – внутренние энергии фаз; $\lambda_l(P, T)$ – коэффициенты теплопроводности фаз.

Уравнение энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{m(S_\nu(S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_\nu) \rho_\nu \varepsilon_\nu) + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s\} + \\ + \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \vec{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \vec{V}_g + P(\vec{V}_w + \vec{V}_g) \right\} + \operatorname{div} \vec{W} + q_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\vec{W} = -(m(S_\nu(S_w \lambda_w + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - S_\nu) \lambda_\nu) + (1 - m) \lambda_s) \nabla T$.

2. Постановка задачи

Состояние гидрата описывается соотношением фазового равновесия

$$T = A \ln P + B, \quad (2.1)$$

где A и B – эмпирические константы.

В силу этого соотношения, в выражениях для всех параметров, где встречается зависимость от T , ее можно свести к зависимости от P .

Выше приведенная система (1.1)–(1.6) является сложной квазилинейной системой уравнений математической физики смешанного типа. Для математического исследования и численного решения в случае двухфазной фильтрации применяется расщепление ее на уравнение относительно насыщенности одной из фаз и уравнение для давления [5]. В рассматриваемой задаче также удается провести подобное расщепление.

3. Общий подход к решению системы (1.1)–(1.6)

Система (1.1)–(1.6) состоит из функционального блока, отвечающего за характеристический перенос сатурационных возмущений (в математическом плане – это гиперболичность в независимых переменных S_ν , S_w на фоне фиксированных давлений P) и функционального блока, описывающего диссипативные характеристические гидратные процессы переноса, обусловленные нестационарным во времени давлением P (первого порядка

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ над пространственными дифференциальными операциями второго порядка в терминах вектора ∇). В последнем случае независимой переменной является давление P при фиксированных сaturaциях S_ν и S_w .

Оказалось, что полученное диссипативное гидратное уравнение содержит в своей структуре "термодинамические" блоки с некоторыми интегрирующими множителями $\frac{\psi}{m\rho_\nu}$ и δ_ε в виде скачков удельных (на единицу массы) объемов и внутренней энергии при фазовом переходе. Эти неотрицательные множители или их аддитивные компоненты, отсутствующие в исходной дивергентной форме записи гидратных уравнений (1.1) – (1.6), могут быть использованы как для корректного физического анализа параметров задачи (например, $(S_w)_{\min}$, $(S_w)_{\max}$ для относительных фазовых проницаемостей), так и для численного явного выделения эволюционно устойчивых аппроксимируемых блоков.

4. Вывод диссипативного уравнения теории гидратов

Из уравнений массовых флюидобалансов (1.1) – (1.2) следует

$$\frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial t} (m S_\nu \rho_w) + \frac{1 - S_w}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial t} (m S_\nu \rho_g) + \left(\frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{1 - \beta_w}{\rho_g} \right) \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - S_\nu) \rho_\nu] + DIG = 0, \quad (4.1)$$

где

$$DIG = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} \left(\rho_w \vec{V}_w \right) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div} \left(\rho_g \vec{V}_g \right) + \left(\frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_g}{\rho_g} \right). \quad (4.2)$$

Из уравнения баланса внутренней энергии (1.6) системы (1.1) – (1.6) с учетом (1.1) – (1.2) аналогично следует

$$\begin{aligned} m S_v \left[S_w \rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + (1 - S_w) \rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - S_\nu) \rho_\nu \varepsilon_\nu + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s] - \\ - [\varepsilon_w \beta_w + \varepsilon_g (1 - \beta_w)] \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - S_\nu) \rho_\nu] + DIG_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} DIG_\varepsilon = & \left[\operatorname{div} \left(\rho_w \varepsilon_w \vec{V}_w \right) - \varepsilon_w \operatorname{div} \left(\rho_w \vec{V}_w \right) \right] + \left[\operatorname{div} \left(\rho_g \varepsilon_g \vec{V}_g \right) - \varepsilon_g \operatorname{div} \left(\rho_g \vec{V}_g \right) \right] + \\ & + \operatorname{div} \left[P \left(\vec{V}_w + \vec{V}_g \right) \right] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g) = \\ & = \rho_w \vec{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \vec{V}_g \nabla \varepsilon_g + \operatorname{div} \left[P \left(\vec{V}_w + \vec{V}_g \right) \right] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g). \end{aligned} \quad (4.4)$$

В уравнениях (4.1), (4.3) влагонасыщенность S_w уже не содержится под знаком дифференцирования по времени.

Действуя аналогичным образом и вводя при фазовом переходе неотрицательные:

– скачок удельного объема (на единицу массы)

$$\frac{\psi}{m\rho_\nu} = \left(\varphi - \frac{1}{\rho_\nu} \right) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{1 - \beta_w}{\rho_g}; \quad (4.5)$$

– скачок удельной внутренней энергии (на единицу массы)

$$\delta_\varepsilon = \beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_\nu \geq 0, \quad (4.6)$$

исключим из под знака дифференцирования по времени в уравнениях (2.1), (4.2) и вторую сатurationную переменную – растепленность S_v . Получим

$$\begin{aligned} & m\delta_\varepsilon \left\{ S_\nu \left[S_w \frac{(\rho_w)_t}{\rho_w} + (1 - S_w) \frac{(\rho_g)_t}{\rho_g} \right] + (1 - S_\nu) \frac{(\rho_\nu)_t}{\rho_\nu} + \frac{m_t}{m} \right\} + \\ & + \frac{\psi}{m\rho_\nu} \{ m \{ S_\nu [S_w \rho_w (\varepsilon_w)_t + (1 - S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_t] + (1 - S_\nu) \rho_\nu (\varepsilon_\nu)_t \} + [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]_t + \quad (4.7) \\ & + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_\nu} DIG_\varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Выражение (4.7) – основное диссипативное уравнение теории гидратов для определения давления P .

Таким образом, система свелась к сатурационному блоку (4.1), (4.3) и диссипативному уравнению (4.7).

При численном решении этой системы для сатурационного блока можно адаптировать методы, разработанные для систем гиперболического типа, а для диссипативного уравнения – методы решения параболических уравнений.

5. Заключение

Теоретически методами математической физики исследована система массово-энергетических балансов, описывающая флюидодинамику совместного поведения свободных гидратов, воды, газа и их энергетическое взаимодействие с неподвижным скелетом. В результате исходная краевая задача расщеплена на основное диссипативное уравнение теории гидратов, определяющее "термодинамическую" эволюцию параметров системы, и сатурационную часть, описывающую "гиперболическое" поведение насыщеностей среды гидратом и флюидами. Результаты этих исследований дают возможность корректно строить вычислительные алгоритмы для соответствующих типов задач математической физики и адаптивно привлекать ранее существовавшие наработки в вычислительной физике применительно к численному моделированию гидратно-флюидодинамических пластовых явлений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00444-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинсбург Г.Д., Соловьев В.А. Субмаринные газовые гидраты. – С-Пб.: ВНИИ Океанология, 1994. – 200 с.
2. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. – М.: Физматлит, 2009. – 232 с.
3. Басниев К.С., Kochina И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
4. Басниев К.С., Ницантов А.В. Трехмерная математическая модель разложения гидратов метанов в пористой среде под действием тепла // Наука и техника в газовой промышленности. - М., 2004. № 1-2. – С. 61-67.
5. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 408 с.

Mathematical research of system of equations of processes in the porous environment

© G.I. Kazakevich⁵, L.V. Klochkova⁶, J.A. Poveshchenko⁷, V.F. Tishkin⁸

Abstract. Now gas hydrates are considered as potential sources of hydrocarbons. Methods of mathematical physics investigate the system of mass and power balances describing dynamics of fluids: joint movement of free hydrates, water, gas and their power interoperability with a stationary skeleton. As a result the initial boundary value problem is split on the core dissipation equation of the hydrates theory, defining "thermodynamic" evolution of system parameters, and a saturations part describing "hyperbolic" movement of environment, saturations by hydrate and fluids.

Key Words: gas hydrates, hydrocarbons, mathematical physics methods.

⁵Senior Researcher of the Institute of oceanology by name P.P.Shirshov of RAS, Moscow; gkazakevich@yandex.ru.

⁶Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

⁷Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; poveshchenko@keldysh.ru.

⁸Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.

УДК 539.214; 539.375

Прохождение предельных состояний упругопластических тел

© Е. Б. Кузнецов¹

Аннотация. Рассматривается задача квазистатического деформирования тел из упругопластического материала. После дискретизации уравнений методом конечных элементов по пространственной переменной задача определения равновесных конфигураций сводится к интегрированию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В предельном состоянии тела из идеального упругопластического материала задача становится сингулярной. В качестве регуляризации применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру, что позволяет находить решение задачи в предельных состояниях тел.

Ключевые слова: предельное состояние, метод продолжения, наилучший параметр, конечный элемент.

1. Регуляризация одномерной задачи

Многие задачи, возникающие в прикладной и вычислительной математике, а так же при проектировании изделий авиационной и ракетнокосмической техники, сводятся к исследованию квазистатического деформирования тел из идеального упругопластического материала [1] - [3]. В этом случае при некотором значении внешних сил достигаются предельные состояния – равновесные конфигурации, в которых деформации обращаются в бесконечность. Соответствующая нагрузка называется предельной.

Универсальным и эффективным методом решения задач по упругопластическому деформированию тел произвольной геометрии является метод конечных элементов (МКЭ) [4], [5]. После дискретизации исходной системы дифференциальных уравнений МКЭ проблема определения равновесных конфигураций тела сводится к пошаговому интегрированию начальной задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая в предельном состоянии тела из идеального упругопластического материала является сингулярной. В стандартных программах пошагового интегрирования системы ОДУ в качестве параметра деформирования используется внешняя нагрузка. В этом случае в окрестности предельной нагрузки для определения равновесных конфигураций необходимо применять мелкие шаги по нагрузке. При этом итерационные процессы уточнения решения сходятся очень медленно или даже расходятся. Для преодоления этих трудностей при определении равновесных конфигураций в окрестности предельной нагрузки разумно применить наилучшую параметризацию [6], [7], согласно которой наилучшим параметром деформирования будет длина дуги интегральной кривой задачи. Этот параметр использовался в работах [1], [8]. Здесь обращается внимание на еще один более эффективный способ применения этого параметра.

Рассмотрим модельную задачу, при решении которой продемонстрируем те трудности, которые возникают в задачах о деформировании тел из идеального упругопластического материала в предельном состоянии, и приведем один из алгоритмов регуляризации.

Изучим одноосное однородное деформирование прямолинейного стержня с площадью поперечного сечения A , один конец которого защемлен, а к другому приложена растягивающая или сжимающая продольная сила P , см. [1]. Материал стержня является упругопластическим с билинейной диаграммой одноосного растяжения. Деформацию будем

¹Профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (государственный технический университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru

отмечать буквой ε , а напряжение σ . Начальное значение предела текучести обозначается через $\sigma_y^0 > 0$. $E > 0$ – модуль Юнга, $E_t \geq 0$ – касательный модуль Юнга. При использовании теории пластического течения с изотропным упрочнением определяющее соотношение материала стержня может быть записано в виде

$$\dot{\sigma} = b\dot{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

где

$$b = \begin{cases} E, & |\sigma| < \sigma_y \\ E_t, & |\sigma| = \sigma_y \end{cases} \cup \begin{cases} |\sigma| = \sigma_y, & \sigma\dot{\varepsilon} \leq 0, \\ |\sigma| = \sigma_y, & \sigma\dot{\varepsilon} > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma_y = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{|\sigma(\tau)|, \sigma_y^0\}$ – текущее значение предела текучести; t – монотонно возрастающий параметр дифференцирования (с начальным значением $t = 0$), точка обозначает производную по t .

Уравнение равновесия в скоростях можно записать в виде

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{P}}{A}. \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.3) получаем, принимая во внимание (1.2), нелинейное ОДУ

$$k\dot{\varepsilon} = \dot{P}, \quad (1.4)$$

которое следует решать с начальным условием

$$\varepsilon(0) = 0. \quad (1.5)$$

В уравнении (1.4) введен касательный коэффициент жесткости (аналог касательной матрицы жесткости [4])

$$k(\sigma, \dot{\varepsilon}) = bA.$$

Начальная задача (1.4), (1.5) описывает деформирование стержня из упругопластического материала. Причем уравнение (1.4) является аналогом системы уравнений, которая получается при дискретизации МКЭ дифференциальных уравнений, описывающих деформирование тела из упругопластического материала.

Очевидно, что равновесные конфигурации стержня определяются интегрированием начальной задачи (1.4), (1.5). Причем при монотонном пластическом деформировании стержня равновесные конфигурации в плоскости (ε, σ) соответствуют диаграмме одноосного деформирования.

Разрешимость же задачи (1.4), (1.5) зависит от значения касательного модуля E_t .

Если $E_t > 0$ (упругопластический материал с упрочнением), то задача (1.4), (1.5) регулярна как при упругом ($k = EA$), так и при упругопластическом ($k = E_t A$) деформировании. Решение задачи единственно и предельные состояния не достигаются.

Если $E_t = 0$ (идеальный упругопластический материал), то задача (1.4), (1.5) регулярна при упругом ($k = EA$) и сингулярна при упругопластическом ($k = 0$) деформировании. В последнем случае при $\dot{P} \neq 0$ решение не существует, а при $\dot{P} = 0$ решение существует, но не единствено. Предельное состояние стержня достигается при $P_{lim} = \sigma_y^0 A$.

Для стержня из упругопластического материала с упрочнением задачу (1.4), (1.5) можно решать, используя в качестве параметра деформирования силу $P(\dot{P} = 1)$. Для стержня из идеального упругопластического материала при деформировании за пределом упругости силу P в качестве параметра деформирования использовать нельзя, так как при $\dot{P} = 1$ решение задачи (1.4), (1.5) не существует. Таким образом, стандартный алгоритм

решения задачи о деформировании упругопластического тела с заданной внешней силой для определения равновесных конфигураций в предельном состоянии использовать нельзя.

Чтобы начальную задачу (1.4), (1.5) решить каким - нибудь численным методом, уравнение (1.4) предварительно следует представить в нормальной форме Коши, т.е. разрешить относительно производной $\dot{\varepsilon}$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{P}}{k}, \quad (1.6)$$

Видно, что в предельном состоянии правая часть уравнения (1.6) теряет смысл, так как $k = 0$.

В монографиях [6], [7] показано, что параметр нагрузки P не всегда является удачным при решении задачи и можно поставить вопрос о выборе наилучшего, в некотором смысле параметра. Доказано, что если решать задачу при помощи метода продолжения по параметру, то наилучшим параметром, доставляющим наилучшую обусловленность соответствующей линейной системе уравнений продолжения, будет длина дуги интегральной кривой задачи.

Преобразуем задачу (1.6), (1.5) к наилучшему параметру - аргументу, обозначив его через λ . Предварительно в уравнении (1.6) дифференцирование по переменной t заменим на дифференцирование по переменной λ , тогда уравнение (1.6) примет вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{1}{k} \frac{dP}{d\lambda}. \quad (1.7)$$

Учитывая смысл параметра λ , как элемента длины дуги, имеем еще одно уравнение

$$\left(\frac{d\varepsilon}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dP}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (1.8)$$

Разрешая систему уравнений (1.7), (1.8) относительно производных, получаем уравнения, записанные в нормальной форме Коши

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}. \quad (1.9)$$

Если длину дуги λ отсчитывать от начальной точки задачи (1.6), (1.5) и нагружение стержня производить из недеформированного состояния, то начальные условия для системы уравнений (1.9) примут вид

$$\varepsilon(0) = 0, \quad P(0) = 0. \quad (1.10)$$

Таким образом, получена начальная задача (1.9), (1.10), преобразованная к наилучшему аргументу, правая часть которой уже не теряет смысл и при значении $k = 0$, поэтому эту задачу можно проинтегрировать любым численным методом решения начальных задач для ОДУ.

Знак плюс или минус в системе (1.9) выбирается в зависимости от направления движения вдоль интегральной кривой задачи.

В [6], [7] отмечаются некоторые свойства преобразованной начальной задачи (1.9), (1.10). В частности доказывается, что правая часть преобразованной задачи имеет наименьшую квадратичную норму, которая, как видно из системы (1.9), равна единице, поэтому задача (1.9), (1.10) может быть проинтегрирована даже в сингулярном случае, когда касательный коэффициент жесткости k равен нулю.

Задача (1.9), (1.10) интегрировалась методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности в случае идеального упругопластического материала при следующих значениях механических констант [7]: $E = 1 \text{ ГПа}$, $E_t = 0$, $\sigma_y^0 = 10 \text{ МПа}$. Диаграмма одноосного растяжения воспроизводится при численном решении с высокой точностью.

2. Регуляризация системы конечноэлементных уравнений

Предложенная выше процедура регуляризации одномерной задачи положена в основу численного алгоритма решения задачи о деформировании тел из идеального упругопластического материала в предельных состояниях.

Система уравнений квазистатического деформирования упругопластического тела после дискретизации МКЭ по пространственным переменным запишется в виде [1], [4]

$$K\dot{U} = \dot{R}. \quad (2.1)$$

Здесь $K = \|k_{ij}\|$ – симметричная касательная матрица жесткости порядка n ; $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ – вектор узловых перемещений; R – вектор внешних сил. Остальные обозначения совпадают с принятыми ранее. Систему ОДУ следует решать при начальных условиях

$$U(0) = U_0. \quad (2.2)$$

В [1] приводятся определяющие соотношения, обобщающие соотношения (1.1), (1.2) для одноосного деформирования стержня на пространственные тела, в силу чего матрица $K = K(\dot{U})$, поэтому соотношения (2.1), (2.2) представляют собой начальную задачу для системы нелинейных ОДУ.

Пусть вектор внешних сил R зависит только от параметра P , характеризующего интенсивность действия внешних сил:

$$R = PF. \quad (2.3)$$

Здесь вектор $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ характеризует распределение внешних сил. С учетом (2.3) систему (2.1) можно переписать в виде

$$K\dot{U} = \dot{P}F. \quad (2.4)$$

Предельная нагрузка (параметр P принимает значение P_{lim}) соответствует вырождению матрицы K . Это возможно только для тела из идеального упругопластического материала. Очевидно, что стандартные алгоритмы интегрирования нелинейной начальной задачи (2.4), (2.2) в окретности предельных нагрузок работать не будут.

Проведем регуляризацию задачи (2.4), (2.2), используя вышеприведенный алгоритм для одноосного случая. Тогда систему уравнений (2.4), преобразованную к наилучшему аргументу λ , можно записать в виде

$$K \frac{dU}{d\lambda} = \frac{dP}{d\lambda} F. \quad (2.5)$$

Аргумент λ , как элемент длины дуги интегральной кривой задачи (2.4), (2.2), должен удовлетворять равенству

$$\left(\frac{dU}{d\lambda} \right)^T \frac{dU}{d\lambda} + \left(\frac{dP}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (2.6)$$

Решение системы линейных уравнений (2.5), полученное при помощи правила Крамера, будет иметь вид

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Здесь Δ – определитель матрицы K ; Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ , после замены в нем i -го столбца вектор-столбцом F .

Принимая во внимание равенства (2.7), система уравнений (2.5), (2.6) может быть разрешена относительно производных и мы получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \pm \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + \Delta^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + \Delta^2}}, \quad (2.8)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Если аргумент λ отсчитывать от начальной точки задачи (2.4), (2.2) и нагружение тела происходит из недеформированного состояния, то систему уравнений (2.8) надо интегрировать при следующих начальных условиях

$$U(0) = U_0, \quad P(0) = 0. \quad (2.9)$$

Преобразованная к наилучшему аргументу начальная задача (2.8), (2.9) выгодно отличается от непреобразованной начальной задачи (2.1), (2.2). В самом деле, в вырожденном случае определитель Δ касательной матрицы жесткости K равен нулю, поэтому задачу (2.1), (2.2) невозможно преобразовать к нормальной форме Коши и, следовательно, численно проинтегрировать. Преобразованная задача лишена этого недостатка. Из системы уравнений (2.8) видно, что правые части ее не теряют смысла и в том случае, когда определитель Δ обращается в ноль.

Поясним ситуацию, при которой предложенный алгоритм будет работоспособным. Для этого наряду с матрицей жесткости K введем в рассмотрение расширенную матрицу \bar{K} , получающуюся, если к матрице K приписать справа вектор-столбец F , т.е. $\bar{K} = (KF)$. Пусть при некотором значении аргумента матрица K вырождается и ее ранг становится равным не n , а $r < n$. Такая точка на интегральной кривой задачи называется особой.

Если вектор-столбец F будет линейно зависимым со столбцами матрицы K , то ранг расширенной матрицы тоже будет равен r , т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) = r.$$

Если вектор-столбец F будет линейно независимым со столбцами матрицы K , то ранг расширенной матрицы будет равен $r + 1$, т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) + 1 = r + 1.$$

В нашем случае при достижении предельной нагрузки $P = P_{lim}$ тела из идеального упругопластического материала матрица K вырождается и ее ранг становится равным не n , а $n - 1$. Если вектор-столбец F будет линейно независимым со столбцами матрицы K , то ранг расширенной матрицы будет равен n , т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) + 1 = n.$$

Такая точка на интегральной кривой задачи называется предельной точкой. В этом случае среди определителей Δ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ найдется, по крайней мере, один определитель отличный от нуля и преобразованная задача (2.8), (2.9) может быть успешно проинтегрирована любым численным методом решения начальных задач для ОДУ.

Если вектор-столбец F будет линейно зависимым со столбцами матрицы K , то ранг расширенной матрицы будет тоже равен $n - 1$, т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) = n - 1.$$

Такая точка на интегральной кривой задачи называется точкой бифуркации. В этом случае правые части системы ОДУ (2.8) теряют смысл и численно проинтегрировать уже не удастся даже задачу, преобразованную к наилучшему аргументу (2.8), (2.9), однако метод продолжения решения по наилучшему параметру позволяет преодолевать также точки таких типов, но алгоритм их прохождения является более сложным.

3. Численная реализация алгоритма регуляризации

При построении решения задачи о растяжении прямолинейного стержня, изготовленного из идеального упругопластического материала, воспользуемся регуляризацией, предложенной выше.

Система уравнений (2.4), записанная в развернутом виде, может быть представлена следующим образом

$$k \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} P. \quad (3.1)$$

Здесь k , введенный ранее касательный коэффициент жесткости. Коэффициенты k_{ij} вычислялись по формулам

$$k_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} N_i(x) \frac{dN_j(x)}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \frac{dN_j(x)}{dx} dx,$$

где базисные функции $N_m(x)$ являются кусочно линейными и имеют вид

$$N_m(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, & x \in [x_{m-1}, x_m]; \\ \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m}, & x \in [x_m, x_{m+1}]; \\ 0, & x < x_{m-1} \cup x > x_{m+1}. \end{cases}$$

Систему ОДУ (3.1) следует решать при начальных условиях

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Начальная задача (3.1), (3.2) для идеального упругопластического стержня является сингулярной при достижении усилием P предельного значения, так как в этом случае касательный коэффициент жесткости k принимает нулевое значение. Согласно алгоритму регуляризации преобразуем систему ОДУ (3.1) к наилучшему аргументу λ , переписав ее в виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1/d\lambda \\ du_2/d\lambda \\ \vdots \\ du_n/d\lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{dP}{d\lambda}. \quad (3.3)$$

Аргумент λ , как элемент длины дуги интегральной кривой задачи (3.1), (3.2), должен удовлетворять равенству

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{du_i}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dP}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (3.4)$$

Решение системы, линейных относительно производных уравнений (3.3), полученное по правилу Крамера, можно записать в виде

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{1}{k} \frac{\Delta_i}{\Delta} \frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Здесь Δ – определитель матрицы системы уравнений (3.3); Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ , после замены в нем i -го столбца вектор-столбцом, состоящим из единиц.

Принимая во внимание равенства (3.5), система уравнений (3.3), (3.4) может быть разрешена относительно производных и мы получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\lambda} &= \pm \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + k^2 \Delta^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm \frac{k\Delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + k^2 \Delta^2}}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

которую нужно решать при следующих начальных условиях

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad P(0) = P_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Здесь предполагается, что аргумент λ отсчитывается от начальной точки задачи (3.1), (3.2).

Преобразованная к наилучшему аргументу начальная задача (3.6), (3.7) выгодно отличается от непреобразованной начальной задачи (3.1), (3.2). В самом деле, в вырожденном случае задача (3.1), (3.2) является сингулярной и ее невозможно преобразовать к нормальной форме Коши и, следовательно, численно проинтегрировать. Преобразованная задача лишена этого недостатка. Из системы уравнений (3.6) видно, что правые части ее не теряют смысла и в том случае, когда касательный коэффициент жесткости k принимает нулевое значение, а значит эта задача может быть с успехом проинтегрирована.

Правило Крамера становится непригодным при решении систем уравнений большой размерности, однако для решения системы уравнений (3.3) можно применить любой численный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. В самом деле, если в системе уравнений (3.3) положить $k = dP/d\lambda = 1$, то решение этой системы, полученное любым методом, можно представить в виде $du_i/d\lambda = k_i, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, в силу линейности, решение системы уравнений (3.3) примет вид

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{k_i}{k} \frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Учитывая смысл наилучшего параметра λ , получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\lambda} &= \pm \frac{k_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2 + k^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2 + k^2}}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

которую следует решать при начальных условиях (3.7).

В качестве тестового примера исследуем задачу, рассмотренную в [1], т.е. изучим растяжение прямолинейного стержня длиной 0.1 м, квадратного поперечного сечения (сторона квадрата равна 0.01 м). Один конец стержня защемлен, а к свободному концу приложена сила P . Стержень изготовлен из идеального упругопластического материала с механическими константами $E = 1 \text{ ГПа}$, $E_t = 0$, $\sigma_y^0 = 10 \text{ МПа}$. Решение для стержневой (одномерной) модели строится при помощи формы Бубнова - Галеркина МКЭ, при этом стержень вдоль своей оси разбивается на десять элементов, т.е. $n = 10$. Решение линейной задачи (3.3) отыскивалось при помощи метода Гаусса, а начальная задача (3.9), (3.7) с однородными начальными условиями интегрировалась методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Диаграмма одноосного растяжения воспроизводится при численном решении с высокой точностью. При этом, в отличии от алгоритма, предложенного в работе [1], никаких дополнительных итерационных процессов организовывать не требуется.

4. Геометрически нелинейный случай

Изучим задачу из п.1 о квазистатическом поведении прямолинейного стержня из идеального упругопластического материала в геометрически нелинейной постановке. Сохраним обозначения, принятые в п.1. Поведение стержня описывается уравнением (1.4), которое после преобразования к наилучшему аргументу λ , примет вид (1.9). После решения начальной задачи (1.9), (1.10), полученные значения деформации ε можно использовать для нахождения перемещений u точек стержня. Для этого, согласно подхода Лагранжа, можно воспользоваться нелинейным соотношением

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) является квадратным уравнением относительно производной $\frac{du}{dx}$, решая которое получаем следующие значения

$$\frac{du}{dx} = -1 \pm \sqrt{1 + 2\varepsilon}.$$

Знак минус в этом равенстве не соответствует физическому смыслу задачи, поэтому окончательно получаем

$$\frac{du}{dx} = -1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon}. \quad (4.2)$$

Учитывая, что в начальный момент стержень имел нулевые перемещения, интегрируя равенство (4.2), получаем

$$u(x) = (-1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon})x. \quad (4.3)$$

Если до деформирования стержень имел длину, равную l , то согласно (4.3), перемещение его свободного конца будет вычисляться по формуле

$$u(l) = (-1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon})l.$$

В общем же случае для решения данной задачи следует использовать МКЭ. С учетом нелинейного равенства (4.1), уравнение (1.7) можно записать в виде

$$\left(1 + \frac{du}{dx} \right) \frac{d}{d\lambda} \frac{du}{dx} = \frac{1}{k} \frac{dP}{d\lambda}. \quad (4.4)$$

После применения к задаче (4.4) по пространственной переменной x МКЭ, получаем систему уравнений типа (3.3), которая является линейной относительно производных, но коэффициенты ее матрицы являются функциями перемещений. После преобразования к наилучшему аргументу получим начальную задачу, интегрирование которой позволит определить перемещения в физически и геометрически нелинейном случае.

5. Заключение

В работе дан алгоритм регуляризации задач о деформировании тел, изготовленных из идеального упругопластического материала в предельных состояниях. В основе подхода лежит метод продолжения решения по наилучшему параметру [6], [7], которым является длина дуги интегральной кривой задачи. После преобразования исходной сингулярной задачи к наилучшему параметру, задача становится регулярной и может быть успешно проинтегрирована. При этом, в отличии от алгоритма, предложенного в работе [1], никаких дополнительных итерационных процессов организовывать не требуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00013) и целевой программы Министерства образования и науки РФ 2.1.1/5267.

Автор благодарит студента Филимонова Д.Г. за помощь при проведении численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б.Д., Алексин В.В., Коробейников С.Н. Определение предельных состояний упругопластических тел // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т.41. №5. – С. 196-204.
2. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.
4. Bathe K.-J. Finite element procedures in engineering analysis. – Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, 1982.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – L.:McGraw-Hill, 1991.
6. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.
7. Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: МАИ-ПРИНТ, 2010.
8. Bathe K.-J., Dvorkin E.N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations // Comput. and Structures. – 1983. – V.17. N 5/6. – P. 871-879.

Passage of the limit states of elasticoplastic bodies

© E. B. Kuznetsov²

Abstract. The problem of quasi static deformation of elasticoplastic bodies is considered. After using of method of finite elements the problem of equilibrium states determination is reduced to the system of nonlinear ordinary differential equations. At the limit state ideal elasticoplastic bodies the problem is singular. The method of solution continuation with respect to the best parameter is used as regularizing.

Key Words: limit state, method of continuation, the best parameter, finite element.

²Professor of Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (State Technical University), Moscow; kuznetsov@mai.ru

УДК 517.9

Неклассические разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (начальная задача)

© М. В. Булатов¹, Т. В. Амосова², Г. Ванден Берге³

Аннотация. В статье рассмотрена начальная задача для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые не содержат первую производную. Для численного решения таких задач предложены новые двушаговые разностные схемы четвертого порядка. Проведен анализ свойств таких схем и их сравнение с известными методами на модельных примерах.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, начальная задача, разностные схемы, метод Нумерова.

1. Введение

В работе рассмотрены численные методы решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений

$$y''(t) = A(t)y(t) + f(t), y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, t \in [0, 1], \quad (1.1)$$

где $A(t)$ — матрица размерности $(n \times n)$, $f(t)$ — заданная, а $y(t)$ — искомая вектор-функция. В дальнейшем изложении предполагается, что элементы матрицы $A(t)$ и вектор-функции $f(t)$ обладают той гладкостью, которая необходима для проведения рассуждений.

В статье представлены новые двушаговые методы решения задачи (1.1) и проведено сравнение этих методов с известными разностными схемами на модельном примере.

2. Двушаговые схемы

Зададим на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N$ и обозначим $A_i = A(t_i)$, $f_i = f(t_i)$, а y_i как аппроксимацию точного решения $y(t_i)$.

Для задачи (1.1) разработаны классические линейные k – шаговые методы

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{i+1-j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j (A_{i+1-j} y_{i+1-j} + f_{i+1-j}). \quad (2.1)$$

Известно [2], что максимальный порядок устойчивых разностных схем равен $k+2$, если k – четное число, и $k+1$ в противном случае. Из двушаговых схем (2.1) максимальный порядок, четвертый, имеет метод Нумерова

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2/12(A_{i+1}y_{i+1} + f_{i+1} + 10(A_iy_i + f_i) + A_{i-1}y_{i-1} + f_{i-1}).$$

¹Главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск; mybul@icc.ru

²Аспирант, Восточно-Сибирская государственная академия образования, г. Иркутск; tatjanaams@rambler.ru

³Профессор, Университет Гента, г. Гент; Guido.VandenBerghe@Gent.be

Вводя разностные операторы

$$\Delta[y_i] = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \quad \xi_j[y_i] = \beta_0^j y_{i+1} + \beta_1^j y_i + \beta_2^j y_{i-1}, \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

двушаговые линейные методы для задачи (1.1) можно записать

$$\Delta[y_i] = h^2 \xi_1[(A_i + f_i)]. \quad (2.3)$$

Эти методы устойчивы и имеют как минимум первый порядок, если выполнено условие

$$\beta_0^1 + \beta_1^1 + \beta_2^1 = 1. \quad (2.4)$$

Возьмем аналогичную схему (одноопорный вариант), имеющую вид

$$\Delta[y_i] = h^2(A(\xi_2[t_i]\xi_2[y_i] + f(\xi_2[t_i]))), \quad (2.5)$$

где коэффициенты $\beta_0^2, \beta_1^2, \beta_2^2$ также удовлетворяют условию первого порядка, т.е.

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1. \quad (2.6)$$

Учитывая уравнение (2.6) и тот факт, что $t_{i+1} = t_i + h$ схемы (2.5) перепишем

$$\Delta[y_i] = h^2(A_\varepsilon \xi_2[y_i] + f_\varepsilon), \quad (2.7)$$

здесь мы использовали следующие обозначения $t_{i-1} + (\beta_1^2 + 2\beta_0^2)h = t_\varepsilon$, $\varepsilon = \beta_1^2 + 2\beta_0^2$, $A_\varepsilon = A(t_\varepsilon)$, $f_\varepsilon = f(t_\varepsilon)$. Объединим формулы (2.3) и (2.7) в переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{pmatrix} E - h^2 \beta_0^1 A_{i+1} \\ E - h^2 \beta_0^2 A_\varepsilon \end{pmatrix} y_{i+1} = \begin{pmatrix} 2E + h^2 \beta_2^1 A_i \\ 2E + h^2 \beta_2^2 A_\varepsilon \end{pmatrix} y_i + \begin{pmatrix} -E + h^2 \beta_2^1 A_{i-1} \\ -E + h^2 \beta_2^2 A_\varepsilon \end{pmatrix} y_{i-1} + h^2 \begin{pmatrix} \psi_i \\ \varphi_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где E – единичная матрица порядка n , а $\psi_i = \xi_i[f_i]$, $\varphi_\varepsilon = f(t_\varepsilon)$. В общем случае СЛАУ (2.8) может не иметь классического решения. Найти «решение» этой системы можно следующим образом: умножим обе части (2.8) на прямоугольную матрицу $(V|W)$ размерности $(n \times 2n)$ такую, чтобы матрица $V(E - h^2 \beta_0^1 A_{i+1}) + W(E - h^2 \beta_0^2 A_\varepsilon)$ – была невырожденной, а далее будем находить решение уже полученной системы. В самом простом случае матрицы V и W можно выбирать соответственно $c_1 E$, $c_2 E$ где c_1 и c_2 – скалярные параметры. В этом случае мы получаем линейную комбинацию методов (2.3) и (2.7), которая является хорошо изученной. В данной работе предлагаем умножить обе части системы (2.8) на прямоугольную матрицу размерности $(n \times 2n)$ вида

$$L_{i+1} = (E - h^2 \beta_0^1 A_{i+1} | d(E - h^2 \beta_0^2 A_\varepsilon)),$$

где d – свободный параметр. В итоге предложенной матричной комбинации получим разностную схему

$$M_{i+1} y_{i+1} = P_i y_i + Q_{i-1} y_{i-1} + g_{i+1}, \quad (2.9)$$

где

$$M_{i+1} = L_{i+1} \begin{pmatrix} E - h^2 \beta_0^1 A_{i+1} \\ E - h^2 \beta_0^2 A_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad P_i = L_{i+1} \begin{pmatrix} 2E + h^2 \beta_2^1 A_i \\ 2E + h^2 \beta_2^2 A_\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$Q_{i-1} = L_{i+1} \begin{pmatrix} -E + h^2 \beta_2^1 A_{i-1} \\ -E + h^2 \beta_2^2 A_\varepsilon \end{pmatrix}, g_{i+1} = h^2 L_{i+1} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \varphi_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать интерполяционный случай таких схем, т.е. $t_\varepsilon \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$, учитывая, что $t_\varepsilon = t_{i-1} + (\beta_1^2 + 2\beta_0^2)h$, получим ограничения на параметр ε

$$\varepsilon \in [0, 2]. \quad (2.10)$$

Отметим [5], что если $A(t)$ — симметричная матрица, и $d = 1$ мы получаем нормальное решение системы (2.8).

Если выполнены условия (2.4) и (2.6), то схемы (2.3) и (2.7) имеют, как минимум, первый порядок. Схема (2.9) содержит семь свободных параметров $\beta_j^i, i = 1, 2; j = 0, 1, 2$ и d , и два уравнения на порядок (2.4) и (2.6). Таким образом, мы можем выбирать свободные параметры, чтобы схемы (2.9) имели как можно более высокий порядок, или обладали преимуществами над известными схемами.

В работе [1] выписаны условия четвертого порядка на схемы (2.9), которые имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0^1 + \beta_1^1 + \beta_2^1 = 1 \\ \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \\ d + 1 = \beta_1^1 + 2\beta_0^1 + d\varepsilon \\ \frac{5}{6}(d + 1) = \beta_1^1 + d\beta_1^2 \\ \frac{5}{6}(d + 1) = \beta_1^1 - d\varepsilon^2 + 2d\varepsilon, \end{array} \right.$$

и выполнено условие (2.10).

В частности, эта система имеет следующее решение

$$d = 0, \quad \beta_1^1 = \frac{5}{6}, \quad \beta_0^1 = \frac{1}{12}, \quad \beta_2^1 = \frac{1}{12},$$

со свободными параметрами $\beta_1^2, \beta_0^2, \beta_2^2, \varepsilon$. Нетрудно убедится, что при таких коэффициентах разностная схема (2.9) совпадает с методом Нумерова.

Общее решение выше представленной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_2^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{3}{2}\varepsilon + 1, & \beta_0^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\varepsilon, & \beta_1^2 &= -\varepsilon^2 + 2\varepsilon, \\ \beta_1^1 &= \frac{5}{6}(d + 1) + d\varepsilon^2 - 2d\varepsilon, & \beta_0^1 &= \frac{1}{12}(1 + d) - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}d\varepsilon, \\ \beta_2^1 &= -\frac{11}{12}d + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{3}{2}d\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.11)$$

со свободными параметрами ε , и $d \neq -1$.

Поясним, почему параметр $d \neq -1$. Если параметр $d = -1$, то это означает, что мы из разностной схемы (2.3) вычитаем разностную схему (2.7), т.е. в левой части (2.9) получаем ноль.

Вводя обозначения $S_{i+1} = E - h^2(\frac{1}{12}(d+1) - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}d\varepsilon)A_{i+1}$, $U_{i+1} = E - h^2(\frac{1}{12}\varepsilon - \frac{1}{2}B)A_\varepsilon$, перепишем разностную схему (2.9) в виде

$$\begin{aligned} (S_{i+1}^2 + dU_{i+1}^2)y_{i+1} &= (S_{i+1}(2E + h^2(\frac{5}{6}(d+1) + d\varepsilon^2 - 2d\varepsilon)A_i) - \\ &- dU_{i+1}(2E + h^2(-\varepsilon^2 + 2\varepsilon)A_\varepsilon))y_i + (S_{i+1}(-E + h^2(\frac{1}{12}(1 - 11d) - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{3}{2}d\varepsilon)A_{i-1}) - \\ &- dU_{i+1}(-E + h^2(\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\varepsilon + 1)A_\varepsilon))y_{i-1} + h^2(S_{i+1}\xi_i[f_i] + dU_{i+1}f_\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.12)$$

которая содержит два свободных параметра d и ε и имеет четвертый порядок.

В частности, при $\varepsilon = 1$ мы получим семейство симметричных разностных схем (2.9). Такие схемы были детально исследованы в статье [1]. Напомним, что разностная схема называется симметричной, если $\alpha_j = \alpha_{k-j}$ и $\beta_j = \beta_{k-j}$, $j = 0, 1, \dots, [k/2]$.

Для изучения свойств устойчивости различных разностных схем Ламберт и Ватсон [3] предложили использовать следующее простое модельное уравнение

$$y'' = -k^2 y. \quad (2.13)$$

Вводя обозначение $v = hk$ любой симметричный двушаговый метод, примененный к этому уравнению, можно записать в виде

$$y_{i+1} - 2R(v^2)y_i + y_{i-1} = 0.$$

Для симметричных двушаговых схем известно

Определение 2.1. [2] Рациональная функция $R(v^2)$ называется функцией устойчивости метода. Интервал $(0, v_0^2)$, в котором $|R(v^2)| \leq 1$ для $v^2 \leq 0 \leq v_0^2$, называется интервалом устойчивости метода. Метод называется P -устойчивый, если $|R(v^2)| \leq 1$, для любых $v^2 > 0$.

В следующем разделе проанализированы несимметричные разностные схемы вида (2.12) и приведены области устойчивости этих схем.

3. Несимметричные схемы

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon \neq 1$. В этом случае мы имеем семейство несимметричных схем. Для изучения свойств устойчивости рассмотрим модельное уравнение (2.13).

В этом случае, обозначая $v = hk$ любой несимметричный двушаговый метод, примененный к уравнению (2.13), можно записать в виде

$$a(d, \varepsilon, v^2)y_{i+1} + b(d, \varepsilon, v^2)y_i + c(d, \varepsilon, v^2)y_{i-1} = 0. \quad (3.1)$$

Запишем характеристическое уравнение для (3.1)

$$a(d, \varepsilon, v^2)\lambda^2 + b(d, \varepsilon, v^2)\lambda + c(d, \varepsilon, v^2) = 0. \quad (3.2)$$

Коэффициенты $a(d, \varepsilon, v^2)$, $b(d, \varepsilon, v^2)$, $c(d, \varepsilon, v^2)$ имеют очень громоздкий вид, поэтому будем исследовать свойства устойчивости полинома (3.2), используя критерий Рауса–Гурвица [4]. Для этого в формуле (3.2) произведем замену переменных $\lambda = \frac{z+1}{z-1}$, которая отображает единичную окружность в левую полуплоскость. В итоге будем иметь характеристический полином

$$\alpha(d, \varepsilon, v^2)z^2 + \beta(d, \varepsilon, v^2)z + \gamma(d, \varepsilon, v^2) = 0. \quad (3.3)$$

Коэффициенты $\alpha(d, \varepsilon, v^2)$, $\beta(d, \varepsilon, v^2)$, $\gamma(d, \varepsilon, v^2)$ имеют менее громоздкий вид, чем коэффициенты $a(d, \varepsilon, v^2)$, $b(d, \varepsilon, v^2)$, $c(d, \varepsilon, v^2)$. Приведем их вид

$$\begin{aligned} \alpha(d, \varepsilon, v^2) &= 1 + \frac{1}{12}v^2 + \frac{1}{12}v^2d + d, \\ \beta(d, \varepsilon, v^2) &= 2d - 2d\varepsilon + \frac{1}{12}v^2d - \frac{7}{12}v^2d\varepsilon + \frac{1}{12}v^2d^2 + \frac{5}{12}v^2d^2\varepsilon - v^2d^2\varepsilon^2 + \frac{1}{12}v^2d^2\varepsilon^3 + \frac{3}{12}v^2d\varepsilon^2 - v^2d\varepsilon^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(d, \varepsilon, v^2) = & 4 - \frac{1}{3}dv^2 - \frac{1}{3}v^2 - \frac{7}{36}v^4d - \frac{5}{36}v^4d^2 + \frac{8}{3}v^2d\varepsilon^2 + \frac{8}{3}v^2d^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}v^4d^2\varepsilon + v^4d^2\varepsilon^4 - 3v^4d^2\varepsilon^3 - \\ & \frac{1}{18}v^4 + 4d + dv^4\varepsilon^4 - dv^4\varepsilon^3 - \frac{1}{2}dv^4\varepsilon.\end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения (3.2) по модулю меньше единицы, т.е. выполнены неравенства [4]

$$\begin{cases} \alpha(d, \varepsilon, v^2) \geq 0 \\ \beta(d, \varepsilon, v^2) \geq 0 \\ \gamma(d, \varepsilon, v^2) \geq 0 \end{cases}. \quad (3.4)$$

Приведем области значений d и v при различных значениях ε при которых выполнена система неравенств (3.4). Эти области называются областями устойчивости, на рисунках они заштрихованы.

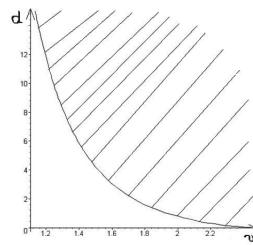


Рис. 1: Область устойчивости при $\varepsilon = 0$.

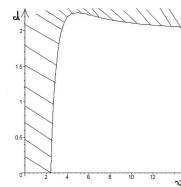


Рис. 2: Область устойчивости при $\varepsilon = 1$.

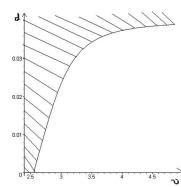


Рис. 3: Область устойчивости при $\varepsilon = 2$.

4. Численные эксперименты

В данном разделе приведены результаты численных расчетов тестовых примеров при различных параметрах d . При проведении этих расчетов стартовые значения y_0 и y_1 выбирались как точные значения $y(t_0)$ и $y(t_1)$ соответственно.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$y''(t) = \left(\frac{2a}{t^3} + \frac{a^2}{t^4}\right)y(t), t \in [1, 10], a = -20,$$

которое имеет точное решение

$$y(t) = e^{-20/t},$$

где $y_0 = y(1) = e^{-20}$ и $y_1 = y(1+h) = e^{-20/(1+h)}$.

На отрезке $[1, 10]$ зададим равномерные сетки с шагами $h_j = 0.2/2^j$, $j = 1, 2, 3$ и обозначим $er_j = |e^{-2} - y_{N_j}|$, $N_j = 9/h_j$. Результаты вычислений представлены в таблице 1 и таблице 2 при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$ соответственно.

d	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$
2	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
3	$7 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
5	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$

Таблица 1: Результаты вычислений при $\varepsilon = 1$.

d	h=0.1	h=0.05	h=0.025
2	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
3	$1 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
5	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2: Результаты вычислений при $\varepsilon = 2$.

Напомним, что при $d = 0$ мы имеем метод Нумерова. Как видно из таблиц при любых значениях h метод Нумерова предпочтительнее (дает более точные результаты вычислений) схем (2.12), но следующий пример иллюстрирует преимущества предложенных схем над методом Нумерова.

Пример 2. Рассмотрим модельную задачу [3]

$$y''(t) = -k^2 y(t), t \in [0, 4\pi], k = 5,$$

и в качестве точного решения возьмем

$$y(t) = \sin(5t),$$

где $y_0 = y(0) = 0$ и $y_1 = y(h) = \sin(5h)$.

На отрезке $[0, 4\pi]$ зададим равномерные сетки с шагами $h_j = \pi/2^j$, $j = 1, 2, 3, 4$ и обозначим $er_j = |\sin(20\pi) - y_{N_j}| = |y_{N_j}|$, $N_j = 4\pi/h_j$. Результаты вычислений представлены в таблице 3 при $\varepsilon = 2$. Результаты вычислений при $\varepsilon = 1$ представлены в статье [1].

d	$h = \pi/2$	$h = \pi/4$	$h = \pi/8$	$h = \pi/16$
0	*	*	$6 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-13}$
1	$2 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-14}$
3	$6 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-14}$
5	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-14}$

Таблица 3: Результаты вычислений при $\varepsilon = 2$.

Из данной таблицы видно, что методы предложенные в статье, предпочтительнее метода Нумерова, т.к. справляются со вторым примером с более крупным шагом интегрирования.

Работа поддержана грантом РФФИ №11-01-00639-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bulatov M. V., Vanden Berghe G. Two-step fourth order methods for linear ODEs of the second order // Vol. 51. № 4. 2009. – P. 449–460.
2. Ixaru L. Gr., Vanden Berghe G. Exponential Fitting. – Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 2004. – 201 p.
3. Lambert J. D., Watson I. A. Symmetric multistep methods for periodic initial value problems. - -J. Inst. Math. Appl., 1976. – P. 189 – 202.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.– С.483 - 488.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.– 112 с.

Not classic difference schemes for ordinary differential equations of the second order(initial value problems)

© M. V. Bulatov⁴, T. V. Amocova⁵, G. Vanden Berghe⁶

Abstract. In this paper we consider the initial problem for systems of linear ordinary differential equations of second order which do not contain the first derivative. To solve such problems numerically, we propose new two-step difference schemes of order 4-th. We give a thorough analysis of the schemes proposed, compare them with well-known ones, and test them on modal examples.

Key Words: ordinary differential equations of second order, initial value problems, difference schemes, Numerov method.

⁴Chif researcher, ISDCT SB RAS, Irkutsk; mybul@icc.ru.

⁵Post-graduate student Irkutsk State Pedagogical Academy, Irkutsk; tatjanaams@rambler.ru

⁶Professor, Gent University, Gent; Guido.VandenBerghe@Gent.be

УДК 517.938

О топологической классификации A -диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами

© В. З. Гринес¹, Ю. А. Левченко²

Аннотация. В работе выделен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых состоит из поверхностных двумерных базисных множеств. При некоторых предположениях на структуру пересечения двумерных инвариантных многообразий точек базисных множеств, получена топологическая классификация диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: диффеоморфизм, базисное множество, аттрактор, топологическая классификация.

Напомним, что под A -диффеоморфизмом трехмерного многообразия $f : M^3 \rightarrow M^3$ понимается диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A , введенной С. Смейлом [5]:

1. множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ является гиперболическим;
2. периодические точки плотны в $\Omega(f)$.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [5] неблуждающее множество $\Omega(f)$ A -диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Определение 1.1. Базисное множество \mathcal{B} A -диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ называется *поверхностным базисным множеством*, если \mathcal{B} принадлежит f -инвариантной замкнутой поверхности $M_{\mathcal{B}}^2$ топологически вложенной в 3-многообразие M^3 .

Будем называть f -инвариантную поверхность $M_{\mathcal{B}}^2$ *носителем* для \mathcal{B} .

Напомним, что базисное множество \mathcal{B} A -диффеоморфизма $f : M \rightarrow M$ называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества \mathcal{B} такая, что $f(U) \subset \text{int } U$, $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}$.

Если \mathcal{B} является двумерным базисным множеством A -диффеоморфизма f , заданного на замкнутом 3-многообразии M^3 , то согласно [1] (теорема 3), \mathcal{B} является либо аттрактором либо репеллером.

Согласно [7], [8] аттрактор \mathcal{B} A -диффеоморфизма, f заданного на трехмерном замкнутом многообразии M^n , называется *растягивающимся аттрактором* если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности $\dim(E_{\mathcal{B}}^u)$ неустойчивого подрасслоения $E_{\mathcal{B}}^u$. Репеллер диффеоморфизма f называется сжимающимся, если он является растягивающимся аттрактором для f^{-1} .

¹Заведующий кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

²Старший преподаватель кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ulev4enko@gmail.com.

Согласно [1] (теорема 2) растягивающийся двумерный аттрактор диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ состоит из двумерных неустойчивых многообразий $W^u(x)$, $x \in \mathcal{B}$, и локально гомеоморфен прямому произведению двумерного Евклидового пространства и канторовского множества. Аналогичную структуру имеет сжимающийся двумерный репеллер.

Напомним, что пару (a, b) называют типом базисного множества \mathcal{B} , если $a = \dim E_x^s$, $b = \dim E_x^u$, где $x \in \mathcal{B}$. В [2] доказано, что поверхностный аттрактор (репеллер) \mathcal{B} размерности два A -диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ имеет тип $(2, 1)$ ($(1, 2)$) и не является ни растягивающимся аттрактором, ни сжимающимся репеллером. Более того, установлено, что любое поверхностное двумерное базисное множество является объединением конечного числа многообразий, каждое из которых гомеоморфно двумерному тору, ручно вложенному в M^3 , а ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на несущее многообразие сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора.

Из работы [6] следует, что любое двумерное базисное множество A -диффеоморфизма трехмерного многообразия является в точности одним из следующих: растягивающимся аттрактором, сжимающимся репеллером, поверхностным аттрактором, поверхностным репеллером.

В работе [4] получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер). Там же доказано, что в этом случае несущее многообразие диффеоморфно трехмерному тору и неблуждающее множество содержит в точности одно нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество.

В настоящей работе мы рассматриваем класс диффеоморфизмов, у которых неблуждающее множество состоит из двумерных поверхностных базисных множеств.

Следующая теорема, доказанная в [3] описывает структуру многообразия, допускающего диффеоморфизмы такого типа.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ A -диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из только из поверхностных двумерных базисных множеств. Тогда M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.*

Обозначим \mathcal{A} (\mathcal{R}) объединение всех поверхностных двумерных аттракторов (репеллеров) диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$.

Тогда на $M^3 \setminus \mathcal{A}$ устойчивые многообразия $W^s(z)$, $z \in \mathcal{A}$ задают двумерное слоение $N^s = \bigcup_z W^s(z)$. Аналогично неустойчивые двумерные многообразия $W^u(z)$, $z \in \mathcal{R}$ задают двумерное слоение $N^u = \bigcup_z W^u(z)$ на $M^3 \setminus \mathcal{R}$.

Пусть G класс структурно устойчивых диффеоморфизмов на M^3 , удовлетворяющих следующим условиям:

1) неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит только из связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров;

2) двумерные слоения N^s и N^u пересекаются по одномерному слоению N^{su} , определенному на $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такому, что каждая компонента связности любого слоя из N^{su} есть открытая дуга, имеющая ровно две граничные точки одна из которых принадлежит \mathcal{A} , а другая \mathcal{R} .

Напомним, что два диффеоморфизма $f, f' : M^3 \rightarrow M^3$ называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $g : M^3 \rightarrow M^3$ такой, что $f' = gfg^{-1}$.

Результатом настоящей работы является следующая теорема:

Т е о р е м а 1.2. Пусть f и f' структурно устойчивые диффеоморфизмы из класса G . Тогда для того, чтобы диффеоморфизмы f и f' были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы существовали аттракторы $A \subset \mathcal{A}$, $A' \subset \mathcal{A}'$ и гомеоморфизм $\Psi : A \rightarrow A'$ такие, что $f'|_{A'} = \Psi f|_A \Psi^{-1}$.

Благодарности. Авторы благодарят за финансовую поддержку грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плыкин Р.В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С. Смейла// Мат. сб. – 1971. – Т. 84, №2. – С. 301-312.
2. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях// Мат. зам. – 2005. – Т. 78, №6. – С. 813-826.
3. Гринес В.З., Медведев В.С., Левченко Ю.А. О структуре 3-многообразия, допускающего А-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством// Труды СВМО. – 2010. – Т. 12, №2. С. 7-12.
4. Grines V. Z., Zhuzhoma E. V. Expanding attractors// Regular and chaotic dynamics. – 2006. – V. 11, №2. – P. 1-21.
5. Smale S. Differentiable dynamical systems// Bull.Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73, №1. – P. 741-817.
6. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds// Journal of Modern Dynamics. – 2010. – V. 4. – P. 517–548.
7. Williams R.F. One-dimensional non-wandering sets// Topology. – 1967. – V. 6. – P. 473-487.
8. Williams R. F. Expanding attractors// Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. – 1974. – V. 43. – P. 169-203.

On classification of A-diffeomorphisms of 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers

© V.Z. Grines³, Y.A. Levchenko⁴

Abstract. The present paper is devoted to topological classification of structurally stable diffeomorphisms with two-dimensional surface basic sets on 3-manifolds. Topological classification of such diffeomorphisms was obtained under certain conditions on the structure of the intersection of two-dimensional invariant manifolds.

Key Words: A-diffeomorphism, basic set, attractor, topological classification

³Head of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

⁴Assistant Professor of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ulev4enko@gmail.com.

УДК 519.6..517.977.58

Разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями

© Ф. В. Лубышев¹, А. Р. Манапова², М. Э. Файрузов³

Аннотация. Излагается метод разностной аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решением.

Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптическое уравнение, оператор, разностная аппроксимация, функционал, минимизирующая последовательность.

1. Введение

В данной работе рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления процессами в неоднородных анизотропных средах. Управляемые процессы описываются краевыми задачами для квазилинейных уравнений эллиптического типа. Ставятся и исследуются задачи для состояния с разрывными коэффициентами и решениями. Подобные задачи для состояния возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации и др. Построены и исследованы конечно-мерные разностные аппроксимации задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с разрывными коэффициентами и разрывными решениями. Полученные результаты могут найти применение и при решении обратных задач теплообмена, рассматриваемых в вариационной постановке.

2. Постановка задач с разрывными коэффициентами и решениями для состояния. Корректность постановки

Пусть $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в \mathbb{R}^2 с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область Ω разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней границей» $\overline{S} = \{x_1 = \xi, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < x_1 < \xi, 0 < x_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω^- и Ω^+) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2 с границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, а $\overline{S} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_1$ – общая часть границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Следовательно, Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной границы» \overline{S} подобластей Ω_1 и Ω_2 , а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω (в отличие от S -внутренней границы области Ω). Далее, будем обозначать через $\overline{\Gamma}_k$ – границы областей Ω_k без S , $k = 1, 2$, так что $\partial\Omega_1 = \overline{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \overline{\Gamma}_2 \cup S$, где части Γ_k , $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ ($\overline{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть

¹Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

²Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

³Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

$\partial\Omega_k$ после вычета S), $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α , $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α , $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω , то есть нормаль n направлена внутрь области Ω ($n = n(x)$ – единичный вектор нормали к S с выбранной ориентацией на S). Заметим, что поскольку векторы $n_1(x)$ и $n_2(x)$, $x \in S$ противоположно ориентированы на S , то $n(x) = n_1(x) = -n_2(x)$ на S . Ниже при постановке краевых задач, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. В дальнейшем на кусках $\bar{\Gamma}_k$, $k = 1, 2$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры будут задаваться граничные условия определенного типа.

Предположим, что условия физического процесса позволяют моделировать его следующей задачей, а именно, рассмотрим следующую краевую задачу в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей Ω_1 и Ω_2 , разбитой на части внутренней границей S .

Задача А. Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\bar{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \bar{\Omega}_1 = \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \bar{\Omega}_2 = \Omega^-$, где компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Функция $u_1(x)$, определенная на $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial\Omega_1$, удовлетворяет в Ω_1 уравнению

$$L_1 u_1 = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \right) + d_1(x) q_1(u_1) = f_1(x), \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.1)$$

а на границе $\partial\Omega_1 \setminus S = \bar{\Gamma}_1$ условию

$$u_1(x) = 0, \quad x \in \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S, \quad (2.2)$$

2) Функция $u_2(x)$, определенная на $\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \partial\Omega_2$, удовлетворяет в Ω_2 уравнению

$$L_2 u_2 = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} \right) + d_2(x) q_2(u_2) = f_2(x), \quad \text{в } \Omega_2, \quad (2.3)$$

а на границе $\partial\Omega_2 \setminus S = \bar{\Gamma}_2$ условию

$$u_2(x) = 0, \quad x \in \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S, \quad (2.4)$$

3) Искомые функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют еще дополнительным условиям на S , позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной (внутренней) границы S областей Ω_1 и Ω_2 , следующего вида:

$$g(x) = k_1^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2) (u_2(x) - u_1(x)), \quad x \in S. \quad (2.5)$$

Задачу (2.1) – (2.5) можно переписать в более компактном виде. Рассмотрим функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Тогда поставленную выше задачу А с разрывным решением можно сформулировать в следующем более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\bar{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 квазилинейному уравнению

$$Lu(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

границым условиям на внешней границе $\partial\Omega$ (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = (\partial\Omega_1 \setminus S) \cup (\partial\Omega_2 \setminus S),$$

и условиям сопряжения на внутренней границе S (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$\left[k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] = 0, \quad g(x) = \left(k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S,$$

где $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+ - u^-$ – скачок функции $u(x)$ на S , а $k_\alpha^{(1)}(x), k_\alpha^{(2)}(x), d(x), f(x)$ и $q(\xi)$, $\alpha = 1, 2$ – функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2 , обладающие некоторыми условиями гладкости в соответствующих областях Ω_k , $k = 1, 2$, претерпевающими разрыв на S первого рода $k_\alpha^{(1)}(x) \neq k_\alpha^{(2)}(x)$, $d_1(x) \neq d_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$, $q_1(\xi) \neq q_2(\xi)$, $x \in S$. В дальнейшем, относительно заданных функций будем предполагать:

$$\begin{aligned} k_\alpha(x) &\in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), \quad 0 < \nu_\alpha^p \leq k_\alpha^{(p)}(x) \leq \bar{\nu}_\alpha^p, \quad \alpha, p = 1, 2, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ d(x) &\in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), \quad 0 \leq d_0 \leq d(x) \leq \bar{d}_0, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ \theta(x_2) &\in L_\infty(S), \quad 0 < \theta_0 \leq \theta(x_2) \leq \bar{\theta}_0, \quad x \in S, \quad f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2); \end{aligned} \quad (2.8)$$

функции $q_\alpha(\xi)$ определены на \mathbb{R} со значениями в \mathbb{R} и удовлетворяют условиям:

$$q_\alpha(0) = 0, \quad 0 \leq q^0 \leq \frac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq L_q < \infty, \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \xi_1 \neq \xi_2. \quad (2.9)$$

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega_0)$, $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$V(\Omega_0) = \{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\}. \quad (2.10)$$

Здесь $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевское пространство функций, заданных в подобластях Ω_k , $k = 1, 2$, с границей $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ и нормой [1]

$$\|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)} = \int_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.11)$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u, \vartheta)_V = (u_1, \vartheta_1)_{W_2^1(\Omega_1)} + (u_2, \vartheta_2)_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2, \quad (2.12)$$

$V = V(\Omega_0)$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega_0)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k + \int_S [u]^2 dS. \quad (2.13)$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$. Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0) = \{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\} \quad (2.14)$$

с нормой (2.13):

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int_S [u]^2 dS. \quad (2.15)$$

Обобщенным решением задачи А будем называть такую функцию $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} Q(u, \vartheta) &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x) q(u) \vartheta \right] d\Omega_0 + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \theta(x) [u] [\vartheta] dS = \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x) \vartheta d\Omega_0 = l(\vartheta), \quad \forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Т е о р е м а 2.1. Пусть выполнены условия (2.8), (2.9). Тогда существует единственное обобщенное решение задачи А в смысле определения (2.16). Задача о нахождении обобщенного решения из (2.16) эквивалентна решению линейного операторного уравнения $Au = F$, где нелинейный оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2} \rightarrow \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ определяется равенством $(Au, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = Q(u, \vartheta)$, $\forall u, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$, а правая часть $F \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ определяется соотношением $(F, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = l(\vartheta)$, $\forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$, причем справедлива априорная оценка $\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} \leq C \sum_{k=1}^2 \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}$.

3. Разностная аппроксимация задачи для состояния с разрывными коэффициентами и решением. Корректность

Рассмотрим задачу А с разрывными коэффициентами и разрывным решением. Для аппроксимации задачи А и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$ и в $\overline{\Omega}$ [2]-[5]. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки $\hat{\omega}_1 = \{x_1^{(i_1)} \in [0, l_1] : i_1 = \overline{0, N_1}, x_1^{(0)} = 0, x_1^{(N_1)} = l_1, h_{1i_1} = x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)}\}$, $\hat{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} \in [0, l_2] : i_2 = \overline{0, N_2}, x_2^{(0)} = 0, x_2^{(N_2)} = l_2, h_{2i_2} = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}\}$, а также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в область $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \overline{S}$: $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 \times \hat{\omega}_2$. Очевидно, всегда можно построить сетку $\hat{\omega}_1$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом.

При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и, исходя из положения точки $x_1 = \xi$, число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$.

Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной задачи А не носит принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\bar{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$, и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ , а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$. Введем сетки узлов: $\bar{\omega}_1^{(1)} = \left\{ x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, N_{1\xi} h_1 = \xi \right\}$, $\bar{\omega}_1^{(2)} = \left\{ x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : i_1 = \overline{N_{1\xi}, N_1}, N_1 h_1 = l_1 \right\}$; $\omega_1^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = N_{1\xi}, x_1 = l_1\}$; $\bar{\omega}_2 = \left\{ x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2 \right\}$, $\omega_2 = \bar{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}$, $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \cup \bar{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \cup \omega_2$, $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \cup \omega_2$, $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = (\bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}) \times \bar{\omega}_2 = \left\{ x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, N_{1\xi} h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1 \right\} \times \bar{\omega}_2$ – сетка в $\bar{\Omega}$, $\omega_1^{(1)+} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \bar{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \bar{\omega}_2$, $S_\xi = \{x_1 = \xi, x_2 = h_2, 2h_2, \dots, (N_2 - 1)h_2\} = \left\{ x_1 = \xi, x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_2 = \overline{1, N_2 - 1} \right\}$, $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi$, $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi$, $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup S_\xi = \bar{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$.

При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полуnormы сеточных функций, заданных на различных сетках.

Множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2 \subset \Omega_1 = \Omega^-$ обозначим через $H^{(1)}(\bar{\omega}^{(1)})$, а множество сеточных функций $y_2(x)$, заданных на сетке $\bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2 \subset \Omega_2 = \Omega^+$ обозначим через $H^{(2)}(\bar{\omega}^{(2)})$. Множество $H^{(k)}(\bar{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, \vartheta_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{x \in \bar{\omega}^{(k)}} y_k(x) \vartheta_k(x) \hbar_1 \hbar_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^{1/2}, \quad (3.1)$$

обозначим $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$, со скалярными произведениями и нормами:

$$\begin{aligned} (y_1, \vartheta_1)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})} &= \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \bar{\omega}_2} y_{1\bar{x}_1} \vartheta_{1\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(1)} \times \omega_2^+} y_{1\bar{x}_2} \vartheta_{1\bar{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_1, \vartheta_1)_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})}, \\ (y_2, \vartheta_2)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})} &= \sum_{\omega_1^{(2)+} \times \bar{\omega}_2} y_{2\bar{x}_1} \vartheta_{2\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(2)} \times \omega_2^+} y_{2\bar{x}_2} \vartheta_{2\bar{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_2, \vartheta_2)_{L_2(\bar{\omega}^{(2)})}, \\ \|\nabla y_1\|^2 &= \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \bar{\omega}_2} y_{1\bar{x}_1}^2(x) h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(1)} \times \omega_2^+} y_{1\bar{x}_2}^2 \hbar_1 h_2, \\ \|\nabla y_2\|^2 &= \sum_{\omega_1^{(2)+} \times \bar{\omega}_2} y_{2\bar{x}_1}^2(x) h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(2)} \times \omega_2^+} y_{2\bar{x}_2}^2 \hbar_1 h_2, \\ \|y_k\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}^2 &= \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^2, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Через $V = V(\bar{\omega}^{(1,2)})$ обозначим пространство пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением

$$V \equiv V(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \left\{ y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}) \right\}. \quad (3.3)$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$\begin{aligned} (y, \vartheta)_V &= (y_1, \vartheta_1)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})} + (y_2, \vartheta_2)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}, \quad \|y\|_V^2 = \sum_{k=1}^2 \|y_k\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}^2, \\ y(x), \vartheta(x) &= \begin{cases} y_1(x), \vartheta_1(x), & x \in \bar{\omega}^{(1)}, \\ y_2(x), \vartheta_2(x), & x \in \bar{\omega}^{(2)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$V = V(\bar{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

В гильбертовом пространстве $V(\bar{\omega}^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму:

$$\|y\|_*^2 = \|\nabla y_1\|^2 + \|\nabla y_2\|^2 + \|y_1\|_{L_2(\gamma^{(1)} \cap \bar{\Gamma}_1)}^2 + \|y_2\|_{L_2(\gamma^{(2)} \cap \bar{\Gamma}_2)}^2 + \|[y]\|_{L_2(S_\xi)}^2, \quad (3.5)$$

где

$$\|y_1\|_{L_2(\gamma^{(1)} \cap \bar{\Gamma}_1)}^2 = \sum_{x_2 \in \bar{\omega}_2} y_1^2(0, x_2) \hbar_2(x_2) + \sum_{0 \leq x_1 \leq \xi} y_1^2(x_1, 0) \hbar_1(x_1) + \sum_{0 \leq x_1 \leq \xi} y_1^2(x_1, l_2) \hbar_1(x_1);$$

$$\|y_2\|_{L_2(\gamma^{(2)} \cap \bar{\Gamma}_2)}^2 = \sum_{x_2 \in \bar{\omega}_2} y_2^2(l_1, x_2) \hbar_2(x_2) + \sum_{\xi \leq x_1 \leq l_1} y_2^2(x_1, 0) \hbar_1(x_1) + \sum_{\xi \leq x_1 \leq l_1} y_2^2(x_1, l_2) \hbar_1(x_1),$$

$$\begin{aligned} [y]_{S_\xi} &= y_2(x) - y_1(x), \quad x \in S_\xi, \quad -\text{скакок функции } y(x) \text{ на } S_\xi, \quad \|[y]\|_{L_2(S_\xi)}^2 = \\ &\sum_{x_2 \in \bar{\omega}_2} (y_2(\xi, x_2) - y_1(\xi, x_2))^2 h_2, \quad \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S, \quad \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S, \quad S_\xi = \\ &\{x_1 = \xi, x_2 = h_2, 2h_2, \dots, (N_2 - 1)h_2\}. \end{aligned}$$

Пусть $\overset{0}{\gamma} -$ часть $\partial\omega^{(k)}$. Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}, \overset{0}{\gamma}^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\overset{0}{\gamma}^{(k)}$.

Заметим, что для сеточных функций $y_k(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}, \overset{0}{\gamma}^{(k)})$ справедливо неравенство

$$\|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^2 \leq C_{\bar{\omega}^{(k)}, \overset{0}{\gamma}^{(k)}} [\|\nabla y_1\|^2 + \|\nabla y_2\|^2]. \quad (3.6)$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y = (y_1, y_2)$:

$$\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\} \quad (3.7)$$

с нормой (3.5)

$$\|y\|_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}}^2 = \|y\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|_{L_2(S_\xi)}^2. \quad (3.8)$$

Через $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ обозначим пространство пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$:

$$\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})\}, \quad (3.9)$$

с нормой (3.5)

$$\|y\|_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}}}^2 = \|y\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \|\nabla y_k\|^2 + \|y_2\|_{L_2(\gamma^{(2)} \cap \bar{\Gamma}_2)}^2 + \|[y]\|_{L_2(S_\xi)}^2. \quad (3.10)$$

Дифференциальной задаче А (см. (2.1) – (2.5)) поставим в соответствие следующую сеточную задачу A_h .

Задача А_h. Требуется найти функцию $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определенную на $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)}$, $y(x) = y_1(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(1)}$, $y(x) = y_2(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют условиям:

1) Сеточная функция $y_1(x)$, определенная на $\bar{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)} \cup \partial\omega^{(1)}$, удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$L_1 y_1(x) = - \left(a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_1} \right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_2} \right)_{x_2} + d_{1h}(x) q_1(y_1) = f_{1h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \quad (3.11)$$

а на границе $\partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi = \gamma^{(1)}$ условию

$$y_1(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(1)}; \quad (3.12)$$

2) Сеточная функция $y_2(x)$, определенная на $\bar{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$, удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$L_2 y_2(x) = - \left(a_{1h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_1} \right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_2} \right)_{x_2} + d_{2h}(x) q_2(y_2) = f_{2h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \quad (3.13)$$

а на границе $\partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi = \gamma^{(2)}$ условию

$$y_2(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(2)}; \quad (3.14)$$

3) Искомые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ связаны между собой дополнительными условиями на S_ξ , позволяющими «спинуть» решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вдоль сеточного множества S_ξ :

$$\begin{aligned} a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_1}(x) - \frac{h_1}{2} \left[\left(a_{2h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_2} \right)_{x_2}(x) - d_{1h}(x) q_1(y_1) + f_{1h}(x) \right] = \\ = \theta_h(x_2) (y_2(x) - y_1(x)), \quad x \in S_\xi = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} a_{1h}^{(2)}(x_1 + h_1, x_2) y_{2x_1}(x) + \frac{h_1}{2} \left[\left(a_{2h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_2} \right)_{x_2}(x) - d_{2h}(x) q_2(y_2) + f_{2h}(x) \right] = \\ = \theta_h(x_2) (y_2(x) - y_1(x)), \quad x \in S_\xi = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь через $a_{1h}^{(\alpha)}$, $a_{2h}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, $d_{\alpha h}$, $f_{\alpha h}$, $\alpha = 1, 2$, θ_h обозначены усреднения функций $k_1^{(\alpha)}$, $k_2^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, d_α , f_α , $\alpha = 1, 2$, θ по Стеклову [2] – [5].

Запишем разностную схему (3.11) – (3.16) в виде:

$$A^{(1)} y_1 = A_1^{(1)} y_1 + A_2^{(1)} y_1 = \varphi_1(x), \quad x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi, \quad (3.17)$$

$$y_1(x) = 0, \quad x \in \partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi = \gamma^{(1)}; \quad (3.18)$$

$$A_1^{(1)} y_1(x) = \begin{cases} - \left(a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1} \right)_{x_1}(x) + \frac{1}{2} d_{1h}(x) q_1(y_1), & x \in \omega^{(1)}; \\ \frac{2}{h_1} [a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_1}(x) + \theta_h(x_2) y_1(x)] + \frac{1}{2} d_{2h}(x) q_2(y_2), & x \in S_\xi, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$A_2^{(1)} y_1(x) = - \left(a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2} \right)_{x_2}(x) + \frac{1}{2} d_{1h}(x) q_1(y_1), \quad x \in \omega^{(1)} \setminus S_\xi, \quad (3.20)$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_{1h}(x), & x \in \omega^{(1)}; \\ f_{1h}(x) + \frac{2}{h_1} \theta_h(x_2) y_2(x), & x \in S_\xi, \end{cases} \quad (3.21)$$

где сеточная функция $y_2(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$ является решением следующего операторного уравнения:

$$A^{(2)} y_2 = A_1^{(2)} y_2 + A_2^{(2)} y_2 = \varphi_2(x), \quad x \in \omega^{(2)} \cup S_\xi, \quad (3.22)$$

$$y_2(x) = 0, \quad x \in \partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi; \quad (3.23)$$

$$A_1^{(2)} y_2(x) = \begin{cases} - \left(a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1} \right)_{x_1}(x) + \frac{1}{2} d_{2h}(x) q_2(y_2), & x \in \omega^{(2)}; \\ - \frac{2}{h_1} [a_{1h}^{(2)}(x_1 + h_1, x_2) y_{2x_1}(x) - \theta_h(x_2) y_2(x)] + \frac{1}{2} d_{2h}(x) q_2(y_2), & x \in S_\xi, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$A_2^{(2)}y_2(x) = - \left(a_{2h}^{(2)}y_{2\bar{x}_2} \right)_{x_2}(x) + \frac{1}{2}d_{2h}(x)q_2(y_2), \quad x \in \omega^{(2)} \setminus S_\xi, \quad (3.25)$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} f_{2h}(x), & x \in \omega^{(2)}; \\ f_{2h}(x) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(x), & x \in S_\xi, \end{cases} \quad (3.26)$$

Рассмотрим теперь $H^{(1)}(\bar{\omega}^{(1)})$ – множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2$. Через $H^{(1)}(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)})$ обозначим подмножество $H^{(1)}(\bar{\omega}^{(1)})$, состоящее из сеточных функций $y_1(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(1)}$, обращающихся в нуль на $\overset{0}{\gamma}{}^{(1)} \subseteq \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi$. Далее, на множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\bar{\omega}^{(1)}$ и обращающихся в нуль на $\partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi = \gamma^{(1)}$, определим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (y_1, \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} &= \sum_{x \in \omega^{(1)}} y_1(x)\vartheta_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in S_\xi} y_1(x)\vartheta_1(x)h_1h_2 = \\ &= (y_1, \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)+} \times \omega_2)}, \quad y_1, \vartheta_1 \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее, скалярное произведение (3.27) индуцирует норму

$$\|y_1\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} = \|y_1\|_{L_2(\omega^{(1)+} \times \omega_2)} = (y_1, \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}^{1/2}. \quad (3.28)$$

Норма (3.28), порождаемая скалярным произведением (3.27), превращает это множество в нормированное пространство, которое обозначим через $L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi) \equiv L_2(\omega^{(1)+} \times \omega_2)$. Аналогично вводятся $H^{(2)}(\bar{\omega}^{(2)})$, $H^{(2)}(\bar{\omega}^{(2)}, \overset{0}{\gamma}{}^{(2)})$, где $\overset{0}{\gamma}{}^{(2)} \subseteq \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi$, $L_2(\omega^{(2)} \cup S_\xi) = L_2(\omega_1^{(2)-} \times \omega_2)$.

Умножим теперь (3.17) скалярно $(\cdot, \cdot)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}$ на сеточную функцию $\vartheta_1(x) \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})$. Тогда получим

$$(A^{(1)}y_1, \vartheta_1) = (A_1^{(1)}y_1, \vartheta_1) + (A_2^{(1)}y_1, \vartheta_1) = (\varphi_1, \vartheta_1), \quad \forall \vartheta_1 \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)}). \quad (3.29)$$

Аналогично имеем

$$(A^{(2)}y_2, \vartheta_2) = (A_1^{(2)}y_2, \vartheta_2) + (A_2^{(2)}y_2, \vartheta_2) = (\varphi_2, \vartheta_2), \quad \forall \vartheta_2 \in H^{(2)}(\omega^{(2)}, \gamma^{(2)}). \quad (3.30)$$

Используя соотношения (3.17)–(3.21), (3.22)–(3.26), а также разностные формулы Грина, после довольно длинных преобразований, найдем, что для соотношений (3.29), (3.30) справедливы представления:

$$\begin{aligned} &\sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1} \vartheta_{1\bar{x}_1} h_1h_2 + \left[\sum_{\omega_1^{(1)} \times \omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2} \vartheta_{1\bar{x}_2} h_1h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \vartheta_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1h_2 \right] - \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) (y_2(\xi, x_2) - y_1(\xi, x_2)) \vartheta_1(\xi, x_2) h_2 + \\ &+ \left[\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) \vartheta_1(x) h_1h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) \vartheta_1(\xi, x_2) h_1h_2 \right] - \\ &= \left[\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) \vartheta_1(x) h_1h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) \vartheta_1(\xi, x_2) h_1h_2 \right], \quad \forall \vartheta_1 \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)}), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\omega_1^{(2)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1} \vartheta_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left[\sum_{\omega_1^{(2)} \times \omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2} \vartheta_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) \times \right. \\
& \quad \left. \times \vartheta_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right] + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) (y_2(\xi, x_2) - y_1(\xi, x_2)) \vartheta_2(\xi, x_2) h_2 + \\
& + \left[\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) \vartheta_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_1(\xi, x_2)) \vartheta_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right] + \\
& = \left[\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) \vartheta_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) \vartheta_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right], \quad \forall \vartheta_2 \in H^{(2)}(\omega^{(2)}, \gamma^{(2)}). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Соотношения (3.31) и (3.32) позволяют определить решение сеточной задачи A_h или (3.17) - (3.26) следующим образом.

Определение 3.1. Под решением сеточной краевой задачи A_h понимаем сеточную функцию $y(x) = y^-(x) \equiv y_1(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)})$, $y(x) = y^+(x) \equiv y_2(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})$, удовлетворяющую сумматорным тождествам (3.31) - (3.32) для всех функций $\vartheta = \vartheta^-(x) \equiv \vartheta_1(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)})$, $\vartheta = \vartheta^+(x) \equiv \vartheta_2(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})$.

Сумматорные тождества (3.31), (3.32) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1} \vartheta_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(1)} \times \omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2} \vartheta_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) \times \right. \right. \\
& \quad \left. \times \vartheta_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \Bigg\} + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1} \vartheta_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(2)} \times \omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2} \vartheta_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) \vartheta_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \right) \right\} + \left\{ \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] [\vartheta_1(\xi, x_2)] h_2 \right\} + \\
& + \left\{ \left(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) \vartheta_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) \vartheta_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \left(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) \vartheta_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) \vartheta_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) = \right. \right. \\
& \quad \left. \left. = \left(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) \vartheta_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) \vartheta_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) \vartheta_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) \vartheta_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Из (3.33) при $\vartheta^+(x) = \vartheta_2(x) = 0$ следует (3.31), а при $\vartheta^-(x) = \vartheta_1(x) = 0$ следует соотношение (3.32).

Введем в рассмотрение скалярные произведения:

$$[y_\alpha, \vartheta_\alpha]_2^{(\alpha)} = \sum_{\omega_1^{(\alpha)}} \sum_{\omega_2^+} y_\alpha(x) \vartheta_\alpha(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} y_\alpha(\xi, x_2) \vartheta_\alpha(\xi, x_2) h_1 h_2, \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.34}$$

Нетрудно видеть, что (3.34) можно записать в виде:

$$[y_\alpha, \vartheta_\alpha]_2^{(1)} = \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2^+} y_1(x) \vartheta_1(x) \hbar_1 h_2, \quad [y_2, \vartheta_2]_2^{(2)} = \sum_{\omega_1^{(1)-}} \sum_{\omega_2^+} y_2(x) \vartheta_2(x) \hbar_1 h_2. \tag{3.35}$$

С учетом (3.27), (3.34) сумматорное тождество (3.33) перепишем в следующем виде:

$$\left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1} \vartheta_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left[a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2}, \vartheta_{1\bar{x}_2} \right]_2^{(1)} \right\} + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1} \vartheta_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left[a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2}, \vartheta_{2\bar{x}_2} \right]_2^{(2)} \right\} + \left\{ (d_{1h} q_1(y_1), \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} + (d_{2h} q_2(y_2), \vartheta_2)_{L_2(\omega^{(2)} \cup S_\xi)} \right\} + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] [\vartheta_1(\xi, x_2)] h_2 = \left\{ (f_{1h}, \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} + (f_{2h}, \vartheta_2)_{L_2(\omega^{(2)} \cup S_\xi)} \right\}. \quad (3.36)$$

или в виде

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(\alpha)} y_{\alpha\bar{x}_1} \vartheta_{\alpha\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left[a_{2h}^{(\alpha)} y_{\alpha\bar{x}_2}, \vartheta_{\alpha\bar{x}_2} \right]_2^{(\alpha)} \right\} + \sum_{\alpha=1}^2 (d_{\alpha h} q_\alpha(y_\alpha), \vartheta_\alpha)_{L_2(\omega^{(\alpha)} \cup S_\xi)} + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] [\vartheta(\xi, x_2)] h_2 = \sum_{\alpha=1}^2 (f_{\alpha h}(x), \vartheta_\alpha(x))_{L_2(\omega^{(\alpha)} \cup S_\xi)}. \quad (3.37)$$

В силу тождества (3.37), решение сеточной краевой задачи A_h можно сформулировать в следующем более компактном виде.

Определение 3.2. Под решением сеточной краевой задачи A_h будем понимать сеточную функцию $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$, которая удовлетворяет сумматорному тождеству:

$$\begin{aligned} Q_h(y, \vartheta) &= \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(\alpha)} y_{\alpha\bar{x}_1} \vartheta_{\alpha\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left[a_{2h}^{(\alpha)} y_{\alpha\bar{x}_2}, \vartheta_{\alpha\bar{x}_2} \right]_2^{(\alpha)} \right\} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 (d_{\alpha h} q_\alpha(y_\alpha(x)), \vartheta_\alpha(x))_{L_2(\omega^{(\alpha)} \cup S_\xi)} + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] [\vartheta(\xi, x_2)] h_2 = \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 (f_{\alpha h}, \vartheta_\alpha)_{L_2(\omega^{(\alpha)} \cup S_\xi)} = l_h(\vartheta), \quad \forall \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (2.8), (2.9). Тогда существует единственное решение сеточной задачи (3.38). Задача о нахождении решения разностной схемы из сумматорного тождества (3.38) эквивалентна решению операторного уравнения $A_h y = F_h$, где A_h – разностный оператор, действующий из $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ в $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ и сеточная функция $F \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ определяются равенствами $(A_h y, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}} = Q_h(y, \vartheta)$, $(F_h, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}} = l_h(\vartheta)$, $\forall y, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка $\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}} \leq C \sum_{k=1}^2 \|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)} \cup S_\xi)}$.

4. Постановка задач оптимального управления. Корректность постановок

Пусть управляемый процесс описывается в $\bar{\Omega}$ краевой задачей A с разрывными коэффициентами и решением, в которой $k_\alpha(x)$, $d(x)$, $q(\xi)$, $\theta(x_2)$, $f_2(x)$ – заданные функции,

а функция $g(x) = f_1(x)$, $x \in \Omega_1 = \Omega^-$ выступает в качестве управления. Будем предполагать, что заданные функции удовлетворяют условиям (2.8), (2.9).

Введем множество допустимых управлений

$$U = \{g(x) = f_1(x) \in L_2(\Omega_1) : \xi_1 \leq f_1(x) \leq \bar{\xi}_1 \text{ п.в. на } \Omega_1\}, \quad \text{или} \quad (4.1)$$

$$U = \{g(x) = f_1(x) \in L_2(\Omega_1) : \|g\|_{L_2(\Omega_1)} \leq R_1\}, \quad (4.2)$$

где ξ_1 , $\bar{\xi}_1$, R_1 – заданные константы, п.в. - почти всюду.

Зададим функционалы цели $g \rightarrow J(g)$ следующих видов

$$J(g) = \int_{\Omega_1} |u(x, g) - u_0^{(1)}(x)|^2 d\Omega_1, \quad \text{или} \quad (4.3)$$

$$J(g) = \int_{\Omega_2} |u(x, g) - u_0^{(2)}(x)|^2 d\Omega_2, \quad \text{или} \quad (4.4)$$

$$J(g) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |u(x, g) - u_0(x)|^2 d\Omega_0, \quad (4.5)$$

где $u_0^{(k)}(x) \in L_2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, $u_0(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$ – заданные функции.

Задачи оптимального управления состоят в том, чтобы найти такие управление $g_* \in U$ в соответствующих задачах, которые минимизируют на множестве U функционал цели $g \rightarrow J(g)$ одного из видов (4.3), (4.4), (4.5). Точнее, на решениях $u(x) = u(x, g)$ задачи A_h , отвечающих всем допустимым управлением $f_1 = g \in U$, требуется минимизировать один из функционалов цели (4.3) - (4.5).

Т е о р е м а 4.1. Пусть множество допустимых управлений U задано соотношением (4.1), $u(x, g) \equiv u(x, f_1)$ – решение задачи A , отвечающее управлению $g(x) = f_1(x) \in U$, а функционал цели $g \rightarrow J(g)$ задается формулой (4.3). Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_*(x) = f_{1*}(x) \in U$, т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$, причем U_* слабо компактно в $H = L_2(\Omega_1)$ и любая минимизирующая последовательность $\{g_*^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится ко множеству U_* .

5. Разностные аппроксимации задач оптимального управления

Рассмотрим следующую постановку задачи оптимального управления.

Задача F₁. На решениях $u(x) = u(x, g)$ задачи A , отвечающих всем допустимым управлением $g(x) \equiv f_1(x) \in U \subset H = L_2(\Omega_1)$, где множество допустимых управлений U имеет вид (4.1), требуется минимизировать функционал цели $g \rightarrow J(g)$, $g \in U$ вида (4.3).

Задаче F_1 поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$\begin{aligned} J_h(\Phi_h) &= \sum_{x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi} |y_1(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)|^2 h_1 h_2 = \\ &= \sum_{x \in \omega^{(1)}} |y_1(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)|^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in S_\xi} |y_1(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)|^2 h_1 h_2 = \\ &= \|y_1(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}^2 = \|y_1(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\|_{L_2(\omega^{(1)} \times \omega_2)}^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) = y(x, \Phi_h) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\omega^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции $\vartheta(x) = (\vartheta_1(x), \vartheta_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\omega^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$Q_h(y, \vartheta) = (\Phi_h, \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} + (f_{2h}, \vartheta_2)_{L_2(\omega^{(2)} \cup S_\xi)}, \quad \forall \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}), \quad (5.2)$$

а сеточные управлении $\Phi_h(x)$ таковы, что

$$\begin{aligned} \Phi_h(x) &\in U_h \subset H_h = L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi), \\ U_h &= \{\Phi_h(x) \in L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi) : \xi_1 \leq \Phi_h(x) \leq \bar{\xi}_1, x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $u_{0h}^{(1)}$ – сеточная аппроксимация функции $u_0^{(1)}$, определяемая через усреднение по Стеклову [2] – [5]. Справедлива следующая

Т е о р е м а 5.1. Задача для сеточного состояния (5.2) однозначно разрешима для $\forall \Phi_h \in U$, причем справедлива априорная оценка

$$\|y(x, \Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}} \leq C \left[\|\Phi_h(x)\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} + \|f_{2h}(x)\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} \right]. \quad (5.4)$$

Для задачи оптимального управления F_1 справедливы следующие утверждения:

$$J_{h*} = \inf \{J_h(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} > -\infty, \quad U_{h*} = \{\Phi_{h*} \in U_h : J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\} \neq \emptyset.$$

Аналогичные утверждения справедливы и при других заданиях функционалов цели вида (4.4), (4.5) и множеств допустимых управлений вида (4.1), (4.2).

Исследованы вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу. На основе метода А.Н. Тихонова [6], [7], [4] проведена регуляризация аппроксимаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.: Наука, 1973.
2. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М.: Высшая школа, 1987.
3. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1991. Т. 31. №1. С. 17-30.
4. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БГУ, 1999.
5. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области // Т. СВМО, 2009, Т.11, №1. С. 133-144.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Difference approximations of optimal controlling problems for quasi-linear elliptic equation with discontinuous coefficients and solutions

© F. V. Lubyshev⁴, A. R. Manapova⁵, M. E. Fairuzov⁶

Abstract. Method of difference approximation of optimal controlling problem for quasi-linear elliptic equations with discontinuous coefficients and solution is stated.

Key Words: optimal control, elliptic equation, operator, difference approximation, functional, minimizing sequence.

⁴Full professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.

⁵Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.

⁶Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.9

Альтернативные системы дифференциальных уравнений плотности дислокаций для крутильной жёсткости стержней

© С. Н. Алексеенко¹, С. Н. Нагорных²

Аннотация. На основе диффузионной теории упругости выведены дифференциальные уравнения, описывающие динамику крутильной жесткости стержней. Изложена принципиальная схема применения метода дополнительного аргумента к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, предназначенному в рамках данного подхода для описания стационарных диссипативных структур

Ключевые слова: плотность дислокаций, диффузионная неупругость, нелинейное уравнение первого порядка в частных производных, метод дополнительного аргумента

Известно, что упругая крутильная жесткость (КЖ) тонких стержней вычисляется как количество вязкой жидкости, протекающей через трубу соответствующего сечения [1]. Роль такой жидкости в твёрдом поликристаллическом стержне могут играть дислокации - элементарные носители деформации, динамикой которых описывают многие механические свойства [1].

Целью настоящей работы является разработка метода вычисления КЖ тонких стержней на основе диффузионной дислокационной модели [3] и теории упругости [1].

Диффузионная модель дислокаций основана на кинетике скалярных плотностей скользящих ν_δ и переползающих ν дислокаций [3]:

$$\dot{\nu}_\delta = G - a_\delta \nu_\delta - b \nu_\delta \nu, \quad (1.1)$$

$$\dot{\nu} = b \nu_\delta \nu - a_M(\nu) \nu + S \operatorname{div}[(\nu_\kappa - \nu) \nabla \nu], \quad (1.2)$$

где $\nu_\kappa, G, a_\delta, b, S$ - постоянные величины, $a_M(\nu)$ - сток переползающих дислокаций, ∇ - трёхмерный градиент. Через ν_δ, ν определяются деформация, напряжение материала, а также в точке переключения $\nu_\delta = a_M b^{-1}$ около однородного решения определяется зарождение продольных и поперечных трещин, как неустойчивый рост ν до критического значения ν_κ при равенстве нулю потоков на внешней поверхности стержня

$$\frac{\partial \nu}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ z=l}} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (1.3)$$

где l - расстояние вдоль оси, R - радиус стержня. В данной статье рассматриваются возможности расщепления решения системы (1.1) - (1.2)

$$\nu(x, y, z) = \tilde{\nu}(x, y) + \bar{\nu}(z) \quad (1.4)$$

¹Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

²Доцент кафедры теоретической физики, Нижегородский педуниверситет, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

в стационарном случае.

Подставив (1.4) в (1.1) - (1.2) и исключив ν_δ , получим

$$S\nu_\kappa\Delta(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\Delta(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu})=0. \quad (1.5)$$

В первом варианте расщепления вида (1.4) допустим, что $\tilde{\nu}$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\tilde{\nu}=-1, \quad (1.6)$$

где $\tilde{\nu}=const$ на контуре сечения стержня радиуса R . Оставшиеся слагаемые в (1.5) составляют уравнение

$$-S\nu_\kappa+S\nu_\kappa\Delta\bar{\nu}-S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\Delta\bar{\nu}+S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu})=0. \quad (1.7)$$

Примем в рамках этого подхода, что $\tilde{\nu} \ll \bar{\nu}$, поэтому слагаемыми с $\tilde{\nu}$ в (1.7) можно пренебречь. Тогда получим

$$-S\nu_\kappa+S\nu_\kappa\Delta\bar{\nu}-S\bar{\nu}\Delta\bar{\nu}+S\bar{\nu}-S(\nabla(\bar{\nu}))^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b\bar{\nu}}-a_M(\bar{\nu})\right]\bar{\nu}=0. \quad (1.8)$$

Предполагая, что $\nu_\kappa \gg \bar{\nu}$ и $(\nabla\bar{\nu})^2=(C_1^2+2C_1\delta\bar{\nu}')(1-\delta^2)^{-1}$, где C_1, δ - постоянные, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с бифуркацией Богданова - Такенса [4]:

$$\bar{\nu}''-(\mu_1+\mu_2\bar{\nu})\bar{\nu}'+f_1(\bar{\nu})=0, \quad (1.9)$$

где $\mu_1:=\frac{2C_1\delta}{(1-\delta^2)\nu_\kappa}$, $\mu_2:=\frac{4C_1\delta}{(1-\delta^2)\nu_\kappa^2}$, $f_1:=A\bar{\nu}+B\bar{\nu}^2-C_2$, A, B, C_2 - постоянные.

Вычтя из (1.5) уравнение (1.7), получим

$$(\Delta\tilde{\nu}+1)(\nu_\kappa-\nu)=0. \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) описывает два события: либо возникновение распределения дислокаций при упругом кручении, либо при неупругом кручении. Последнее проистекает ввиду зануления квазилинейной диффузии дислокаций сразу по двум причинам: равенство нулю коэффициента диффузии и лапласиана от ν . Чтобы раздельно исследовать роли того и другого явления, допустим $\nu \approx \nu_\kappa$. Значение символа ν_κ состоит в том, что плотность дислокаций имеет критическое значение, при котором материал стержня течёт подобно жидкости. В [3] исследовалось дислокационное зарождение трещин при циклическом кручении стержней, причем ν_κ^\top имел смысл критической плотности дислокаций, вызывающей зарождение продольных или поперечных трещин в стержне. Вообще, ν_κ является универсальной величиной во всех процессах стимулированной диффузии [3]. Этим и объясняется особый интерес изучения квазилинейного дифференциального уравнения (1.2), когда ν достаточно близко к ν_κ .

Так что, беря в другом варианте расщепления в (1.5) $\tilde{\nu}(x, y) + \bar{\nu}(z) \approx \nu_\kappa$, придём к уравнению:

$$S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2=\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu}). \quad (1.11)$$

Допуская, кроме того, что $\tilde{\nu} \gg \bar{\nu}$, раскладывая правую часть (1.11) в ряд Тейлора по $\bar{\nu}$ вблизи $\tilde{\nu}$ и ограничиваясь членами первого порядка малости по $\bar{\nu}$, получим:

$$(\nabla\tilde{\nu})^2=f(\tilde{\nu})\tilde{\nu}, \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{d\bar{\nu}}{dz}\right)^2 = \Phi\bar{\nu}, \quad (1.13)$$

где

$$f(\tilde{\nu}) = \frac{1}{S} \left[\frac{bG}{a_\delta + b\tilde{\nu}} - a_M(\tilde{\nu}) \right],$$

$$\Phi = f'(\nu_\kappa)\nu_\kappa + f(\nu_\kappa), \quad f'(\nu_\kappa) = -\frac{1}{S} \left[\frac{b^2 G}{(a_\delta + b\nu_\kappa)^2} - a'_M(\nu_\kappa) \right].$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (1.13) при начальном условии $\bar{\nu}|_{z=0} = \bar{\nu}_0^2 = const > 0$ имеет решение

$$\bar{\nu} = \left(\frac{\sqrt{\Phi}}{2} z \pm \bar{\nu}_0 \right)^2. \quad (1.14)$$

Система уравнений (1.6), (1.9) относится к упругому кручению со слабодиссипативной динамикой $\bar{\nu}$ вдоль оси кручения [4]. Уравнение (1.12) описывает движение $\tilde{\nu}$ с диссипативной динамикой, т.к. в соответствии с [5] величина $(\nabla\tilde{\nu})^2$ характеризует диссипацию.

Согласно [1] КЖ C при модуле сдвига μ будет равна:

$$\int_{\tilde{S}} \mu (\nabla \tilde{\nu})^2 dx dy = C. \quad (1.15)$$

Учитывая определение вектора Бюргерса \vec{b} в [1]:

$$\int_{\tilde{S}} \tilde{\nu} dx dy = \vec{b},$$

имеем упругую C либо квазиупругую \tilde{C} КЖ в линейном по $\tilde{\nu}$ приближении: $C = \mu \frac{\pi R^4}{2}$, $\tilde{C} = \frac{1}{S} \left(\frac{bG}{a_\delta} - a_M \right) \vec{b}$. Момент кручения $M = \tau C$ при $\tau = const$ будет определять упругое либо неупругое кручение. В общем случае КЖ C из (1.15) вычисляется на основе решения уравнения (1.12).

Сформулируем итог вышеприведенных выкладок в виде следующего утверждения: *Если в точке переключения $\nu_\delta = a_M(\nu)b^{-1}$, $\nu = \tilde{\nu} + \bar{\nu}$, $\tilde{\nu}|_S \neq 0$, $\bar{\nu}(z_0) \neq 0$, то стационарное трёхмерное уравнение стимулированной диффузии (1.2) при $\nu \approx \nu_\kappa$, $\tilde{\nu} \gg \bar{\nu}$ сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (1.12) и в обыкновенных производных (1.13), а при $\tilde{\nu} \ll \bar{\nu} \ll \nu_\kappa$ сводится к системе дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных (1.6) и в обыкновенных производных (1.9).*

Кроме В.И.Таланова в цитированной выше работе [5], величину $(\nabla\tilde{\nu})^2$ определяли как диссипацию Я.Б.Зельдович [2] и другие авторы. Так что мы можем с полным основанием называть уравнение (1.12), полученное в данной работе, уравнением *стационарных диссипативных структур*.

Применим для исследования уравнения (1.12) метод дополнительного аргумента (МДА) [6, 7, 8], который даёт возможность анализировать условия существования решений и строить численные решения в исходных координатах. Опишем принципиальную схему исследования задачи Коши для уравнения (1.12) с помощью МДА.

Так как уравнение (1.12) рассматривается в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$ с дополнительными условиями на окружности, то вначале перейдём к полярным координатам. Обозначив $u(r, \varphi) = \tilde{\nu}(x, y)$, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 = f(u)u \quad (1.16)$$

с начальным условием

$$u|_{r=R} = g(\varphi), \quad (1.17)$$

причем функцию $g(\varphi)$ не будем предполагать периодической по φ , этим самым учитывая в плоской задаче изменение условий вдоль стержня.

Преобразуем уравнение (1.16) к системе квазилинейных уравнений. И, чтобы не менять структуру МДА, сделаем в задаче (1.16)-(1.17) замену независимой переменной: $\rho = R - r$. В результате придем к задаче Коши:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{(R - \rho)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 = f(u)u, \quad (1.18)$$

$$u|_{\rho=0} = g(\varphi). \quad (1.19)$$

Дальнейшие преобразования нелинейного уравнения (1.18) зависят от предположений о знаках $\partial_\rho u$ и $\partial_\varphi u$. В данной работе будем исходить из того, что в направлении от границы вглубь стержня $\tilde{\nu}$ уменьшается. Тогда из (1.18) следует

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\sqrt{f(u)u - \frac{1}{(R - \rho)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2}. \quad (1.20)$$

Обозначив $q = \frac{1}{R - \rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ и продифференцировав (1.18) по φ , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{f'(u)u \frac{\partial u}{\partial \varphi} + f(u)\frac{\partial u}{\partial \varphi} - 2q\frac{\partial q}{\partial \varphi}}{-2\sqrt{f(u)u - q^2}}.$$

Разделив последнее равенство на $R - \rho$ и учитывая, что

$$\frac{1}{R - \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R - \rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{(R - \rho)^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

придем к уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} - \frac{q}{(R - \rho)\sqrt{f(u)u - q^2}} \frac{\partial q}{\partial \varphi} = - \left[\frac{f'(u)u + f(u)}{2\sqrt{f(u)u - q^2}} - \frac{1}{R - \rho} \right] q. \quad (1.21)$$

Обозначив

$$A(\rho, u, q) = \frac{q}{(R - \rho)\sqrt{f(u)u - q^2}},$$

$$B(\rho, u, q) = \frac{f'(u)u + f(u)}{2\sqrt{f(u)u - q^2}},$$

перепишем уравнение (1.21) в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} - A(\rho, u, q) \frac{\partial q}{\partial \varphi} = - \left[B(\rho, u, q) - \frac{1}{R - \rho} \right] q. \quad (1.22)$$

С учетом (1.20) "сконструируем" уравнение для u с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} - A(\rho, u, q) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\sqrt{f(u)u - q^2} - A(\rho, u, q)q. \quad (1.23)$$

Из (1.17) для $u(\rho, \varphi)$ вытекает начальное условие

$$u|_{\rho=0} = g(\varphi). \quad (1.24)$$

Соответственно, для $u(\rho, \varphi)$ в качестве начального условия возьмём

$$q|_{\rho=0} = \frac{1}{R}g(\varphi). \quad (1.25)$$

Составим для задачи (1.22) - (1.25) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta(s, \rho, \varphi)}{ds} = A(s, w_1, w_2), \quad \eta|_{s=\rho} = \varphi, \quad (1.26)$$

$$\frac{dw_1(s, \rho, \varphi)}{ds} = -\sqrt{f(w_1)w_1 - w_2^2} - A(s, w_1, w_2)w_2, \quad (1.27)$$

$$w_1|_{s=0} = g(\eta(0, \rho, \varphi)), \quad (1.28)$$

$$\frac{dw_2(s, \rho, \varphi)}{ds} = -\left[B(s, w_1, w_2) - \frac{1}{R-s}\right]w_2, \quad (1.29)$$

$$w_2|_{s=0} = \frac{1}{R}g'(\eta(0, \rho, \varphi)). \quad (1.30)$$

Предположим, что

$$f(g(\varphi))g(\varphi) - \frac{(g'(\varphi))^2}{R^2} > 0 \quad (1.31)$$

для всех $\varphi \in (-\infty, \infty)$.

Преобразуем задачу (1.26) - (1.30) в систему интегральных уравнений. Так как в правую часть (1.26) искомая функция $\eta(s, \rho, \varphi)$ не входит, то для неё получим не уравнение, а выражение. В результате придём к системе двух интегральных уравнений:

$$w_1(s, \rho, \varphi) = g(\varphi - \int_0^\rho A(\nu, w_1, w_2)d\nu) - \int_0^s \left[\sqrt{f(w_1)w_1 - w_2^2} - A(\tau, w_1, w_2)w_2 \right] d\tau, \quad (1.32)$$

$$w_2(s, \rho, \varphi) = \frac{g'(\varphi - \int_0^\rho A(\nu, w_1, w_2)d\nu)}{R - \rho} \exp \left(- \int_0^s B(\tau, w_1, w_2)d\tau \right) \quad (1.33)$$

относительно двух неизвестных функций $w_1(s, \rho, \varphi), w_2(s, \rho, \varphi)$.

Доказательство существования локального решения системы интегральных уравнений (1.32) - (1.33) и построение для неё численного решения в достаточно узкой полоске вблизи окружности $x^2 + y^2 = R^2$ может быть осуществлено с помощью метода последовательных приближений. Путем непосредственных оценок доказывается, что существует такая постоянная величина T , что при $0 < \rho \leq T$ последовательные приближения сходятся. Дифференцируя рекуррентные соотношения для последовательных приближений, можно убедиться, что при достаточно малом T решение системы (1.32) - (1.33) будет дифференцируемо по всем своим аргументам. Функции $u(\rho, \varphi) = w_1(\rho, \rho, \varphi), q(\rho, \varphi) = w_2(\rho, \rho, \varphi)$ дадут решение задачи Коши (1.22) - (1.25), а функция $u(\rho, \varphi)$ будет непрерывно дифференцируемым решением задачи (1.18) - (1.19), где $f(u) = \frac{1}{S} \left[\frac{bG}{a_\delta + bu} - a_M(u) \right]$.

Т е о р е м а 1.2. Пусть a_M дважды непрерывно дифференцируемая функция, $g(\varphi) \in C^2(-\infty, \infty)$, выполнено условие (1.31). Тогда задача (1.16) - (1.17) имеет непрерывно дифференцируемое ограниченное решение $u(\rho, \varphi)$ в области $R - T \leq r \leq R, -\infty < \varphi < \infty$, где число T определяется явным образом из исходных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М. Наука.1987.- 245 с.
2. Зельдович Я.Б. Предельный закон теплопередачи во внутренней задаче при малых скоростях. ЖЭТФ,1937, т.7, в.12, с.1466 - 1468.
3. Крупкин П.Л., Куров И.Е., Нагорных С.Н., Цыванюк К.И. Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении. ФММ, 1988, т.66, в.5, с. 978-984.
4. Богданов Р.И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. - М. "Вузовская наука"2003, - 376 с.
5. Таланов В.И. Стимулированная диффузия и кооперативные эффекты в распределенных кинетических системах. Сб."нелинейные волны". - М. Наука, 1983, с 47 - 56.
6. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема. Доклады Академии наук, 1992, т.323, №3. -5с.
7. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Доклады РАН, 2001, т.379, №1. - 5 с.
8. Алексеенко С.Н., Нагорных С.Н. Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций// Журнал СВМО, 2010, т. 12, №1. С.41-45.

Alternative systems of the dislocation density partial differential equation for the torsional stiffness of rods

© S. N. Alekseenko³, S. N. Nagornyh⁴

Abstract. On the base of the theory of elasticity, the equations governing a dynamics of the dislocation density for the torsional stiffness of rods is obtained. In is presented a basic scheme to apply the method of additional argument for solving a first-order nonlinear partial differential equation assigned within the framework of an approach under consideration to describe pseudoequilibrated dissipative structures.

Key Words: dislocation density, diffusion unelasticity, nonlinear first-order partial differential equations, method of additional argument.

³The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

⁴The senior lecture of the theoretical physics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

УДК 519.71

Нерегулярная эллиптическая краевая задача с вырождением на границе

© Д. И. Бояркин¹

Аннотация. В работе рассматривается нерегулярная краевая задача для эллиптического уравнения с вырождением на границе области. Гладкое многообразие вырождения может иметь коразмерность больше двух. Получены априорные оценки для решения задачи и определена его гладкость. При исследовании используются методы функционального анализа и геометрии гладких многообразий

Ключевые слова: эллиптические операторы, гладкое многообразие, преобразование Фурье, условие Лопатинского

1. Классификация многообразия вырождения коразмерности $k \geq 2$

Зависимость свойств решений граничной задачи от природы касания векторного поля границы вдоль многообразия коразмерности $k = 2$ и исследование этих свойств, впервые было проделано R. Borrelli в работе [1].

Пусть G - ограниченная область в R^n , $n \geq 3$, с кусочно-гладкой границей Γ^{n-1} и μ -гладкое векторное поле, определенное на Γ^{n-1} , касается Γ^{n-1} вдоль $(n-k)$ -мерного гладкого многообразия Γ^{n-k} , $k \geq 2$, но не касается Γ^{n-k} .

Определим гладкие $(n-i)$ -мерные многообразия Γ^{n-i} , $2 \leq i \leq k-2$, таким образом, чтобы $\Gamma^{n-1} \supset \dots \supset \Gamma^{n-i} \supset \dots \supset \Gamma^{n-(k-1)} \supset \Gamma^k$. Многообразие Γ^k является ориентируемым в Γ^{k-1} с помощью поля μ . Пусть $\beta = \langle \mu, n \rangle$ - скалярное произведение μ и n , где n -вектор внешней нормали к Γ^{n-1} в точках Γ^{k-1} . В точках Γ^k функция $\beta = 0$. Обозначим через Γ_+^{k-1} множество точек Γ^{k-1} , в которых $\beta > 0$, а через Γ_-^{k-1} - множество точек Γ^{k-1} , где $\beta < 0$. Пусть $\beta^k = \langle \mu, n^k \rangle$ - скалярное произведение μ и n^k , где n^k - нормаль к Γ^k , лежащая в касательной плоскости к Γ^k и направленная в сторону Γ_+^{k-1} .

В зависимости от структуры поля μ $(n-k)$ -мерное многообразие Γ^{n-k} отнесем к одному из классов:

- к первому классу, если $\beta > 0, \beta^k > 0$;
- ко второму классу, если $\beta > 0, \beta^k < 0$;
- к третьему классу, если $\Gamma_+^{k-1} = \emptyset$ либо $\Gamma_-^{k-1} = \emptyset$.

Заметим что, так как поле μ не касается самого многообразия Γ^k , то Γ^k может относиться только к одному классу.

В настоящей работе рассматривается случай, когда Γ^k принадлежит к первому классу.

¹Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им Н.П. Огарева, г. Саранск; boyarkindi@gmail.com

2. Постановка задачи краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f \text{ в } G, \quad (2.1)$$

$$\mu(x, D)u = \varphi \text{ на } \partial G - 1, \quad (2.2)$$

$$u = \varphi^k \text{ на } \partial G - k, \quad (2.3)$$

где L - эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами; $\mu(x, D)$ - дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ .

Обозначим через N^{n-k} - $(n-k+1)$ -мерное гладкое многообразие, проходящее через Γ^{n-k} трансверсально к полю μ . Продолжим гладким образом поле μ в достаточно малую окрестность Ω^k многообразия Γ^{n-k} в $N^{n-k+1} \cap G$. Так как Γ^{n-k} относится к первому классу, то каждую точку из Ω^k можно соединить с N^{n-k+1} интегральной кривой поля μ .

Далее, определим $(n-i+1)$ -мерные плоскости нормалей N^{n-i} к Γ^{n-k} , $2 < i \leq k-1$, проходящие соответственно через Γ^{n-i} . Заметим, что $N^{n-i} \in N^{n-i+1}$. Предположим, что в малой окрестности Ω многообразия Γ^{n-k} в G выполняется условие $[n_i, \mu] = 0$, где n_i - нормаль к плоскости N^{n-i} , $[,]$ - скобка Пуассона.

В работе Егорова Ю. В. - Кондратьева В. А. [1] при исследовании задачи с косой производной для эллиптического оператора второго порядка были предложены методы, которые основывались на теории эллиптических краевых задач и геометрии гладких многообразий. Эти методы позволяют исследовать краевые задачи для эллиптического оператора при более общих граничных условиях [2]. Подобные задачи возникают при моделировании явлений упругости, фильтрации и многих других физических процессов.

Т е о р е м а 2.1. *Если $u \in H_{s+1}(G)$, $d > 0$ - достаточно малое число и $s > \frac{3}{2}$, то существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u , что*

$$\begin{aligned} C^{-1} \left(\|u\|_s + \|\mu(x, D)hu\|_s + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i u\|_s^{N^{n-i+1}} + \|h^k u\|_s^{N^{n-k}} \right) \leq \\ \leq \|f\|_{s-2} + \|\mu(x, D)hf\|_{s-2} + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i f\|_{s-2}^{N^{n-i+1}} + \|h^k f\|_{s-2}^{N^{n-k}} + + \|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{T-1}} + \\ \|h\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} + \|h^i \varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} \right) + \|\varphi^k\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{T-\pi}} + \|u\|_0 \leq \\ \leq C \left(\|u\|_s + \|\mu(x, D)hu\|_s + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i u\|_s^{N^{n-i+1}} + \|h^k u\|_s^{N^{n-k}} \right), \end{aligned}$$

где $f = Lu$ в G , $\varphi = \mu(x, D)u$ на Γ^{n-1} , $\varphi^k = u$ на Γ^{n-k} , $h \in C^\infty(G)$ и $h = 1$ вне $(\frac{d}{2})$ - окрестности многообразия Γ^{n-1} , $h^i \in C^\infty(G)$, $i = 2, \dots, k-2$, причем h^i равна 1 в $(\frac{d}{2})$ окрестности многообразия Γ^{n-i} и равна нулю вне d окрестности этого многообразия, $h^k \in C^\infty(G)$ и $h = 1$ вне $(\frac{d}{2})$ - окрестности многообразия Γ^{n-k} .

С л е д с т в и е 2.1. *Пространство решений однородной задачи*

- $Lu = 0$ в G
- $\mu(x, D)u = 0$ на ∂G

- $u = 0$ на $n-k$

конечномерно

Следствие 2.2. Обозначим через $\Pi_s(G)$ пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\Pi_s(G)} = \|u\|_s + \|\mu(hu)\|_s + \sum_{i=1}^{k-1} \|n_i(h^i u)\|_s^{N^{n-i}} + \|h^k u\|_s.$$

Через Γ_s^{n-i} ($i = 2, \dots, k-1$) - пространства функций, определенных на Γ^{n-i} с конечной нормой

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-i}} = \|u\|_s^{n-i} + \|h^i u\|_{s+1}^{n-i},$$

Γ_s^{n-1} - пространство функций, определенных на Γ^{n-1} с конечной нормой

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-1}} = \|u\|_s^{n-1} + \|hu\|_{s+1}^{n-1},$$

Γ_s^{n-k} - пространство функций, определенных на Γ^{n-k} с конечной нормой

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-k}} = \|u\|_s^{n-k} + \|hu\|_{s+1}^{n-k}, \text{ где } h, h^i, h^k \text{ функции, определенные в теореме 2.1..}$$

Тогда область значений оператора

$u \rightarrow (Lu, \mu(x, D)u|_{\Gamma^{n-1}}, n_i(x, D)u|_{\Gamma^{n-i}}) u|_{\Gamma^{n-k}}, i = 2, \dots, k-1$, действующего из

$\Pi_s(G) \times \Pi_{s-2}(G) \times \Gamma_{s-\frac{3}{2}}^{n-1} \times \dots \times \Gamma_{s-\frac{3}{2}}^{n-(k-1)} \times H_{s-\frac{3}{2}}(\Gamma^{n-k})$ замкнута.

Теорема 2.2. Если многообразие Γ^{n-k} принадлежит к первому классу и известно, что

$u \in H_s(G), Lu \in H_s(G), \mu(x, D)u \in H_{s+\frac{1}{2}}(\Gamma^{n-1}), n_i(x, D)u \in H_{s+\frac{1}{2}}(\Gamma^{n-i}), i = 2, \dots, k-1, u \in H_{s+\frac{1}{2}}(\Gamma^{n-k})$, где $s > 0$ то $u \in H_{s+1}(G)$ и существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u , что

$$\begin{aligned} \|u\|_s &\leq C (\|f\|_{s-2} + \|\mu(x, D)hf\|_{s-2} + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i f\|_{s-2}^{N^{n-i+1}} + \|h^k f\|_{s-2}^{N^{n-k}} + \|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \\ &\quad \|h\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} + \|h^i \varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} \right) + \|\varphi^k\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-k}} + \|u\|_s \end{aligned}$$

right)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borrelli R. The singular, second order oblique derivative problem. –J. Math. and Mech., 1966, 51-81.
2. Бояркин Д. И. Одно обобщение задачи с косой производной. УМН, 1983, 38, 1(229), 157-158.
3. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. - М.: Наука, 1984, 360 с.
4. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. О задаче с косой производной. – Матем. сб., 1969, 78, 148-176.

Irregular elliptic regional problem degenerating on border

© D.I. Boyarkin ²

Abstract. In work the irregular regional problem for the elliptic equation is considered. Aprioristic estimations for the decision of a problem are received. At research methods of the functional analysis and geometry of smooth varieties are used

Key Words: elliptic operators, smooth variety, transformation Fourier, condition Lopatinsky

²Docent of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk;
boyarkindi@gmail.com

УДК 519.6538.945

Численное моделирование гармоник намагнченности диска из жесткого сверхпроводника второго рода в приближении экранировки поля в центре образца

© Н. Д. Кузьмичев¹ А. А. Федченко²

Аннотация. В работе выполнено математическое моделирование отклика жесткого сверхпроводника второго рода на приложенное внешнее гармонически модулированное магнитное поле. Сверхпроводник имел форму короткого цилиндра (таблетки). В рамках модели Кима и в приближении экранировки поля в центре образца рассчитаны гистерезисные кривые и гармоники намагнченности. Результаты расчета сравниваются с результатами ранее выполненного эксперимента на поликристаллах высокотемпературного сверхпроводника.

Ключевые слова: высокотемпературный сверхпроводник, критическое состояние, вихри Абрикосова, модель Кима, гармоники намагнченности

1. Введение

Интерес к магнитным свойствам различной структуры высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) не угасает из-за их практической важности и сложности строения. В плане применений в электро- и радиоизмерительной технике необходимо знать отклик различной геометрической формы ВТСП на переменное и постоянное магнитные поля. Данной проблеме посвящено много работ, как в отечественной, так и зарубежной литературе [1]. Известно, что при воздействии внешнего магнитного поля на ВТСП, образец откликается сигналом сложной формы, и намагнченность сверхпроводника зависит от предыстории его состояния, т.е. обнаруживает гистерезис.

2. Постановка задачи и модель расчета

В работе рассматривается процесс проникновения магнитного поля в жесткий сверхпроводник второго рода в форме короткого цилиндра находящегося в критическом состоянии в рамках приближения Кима [1]. Магнитное поле в такие сверхпроводники проникает в виде потока, образованного нитями Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга. Изменение магнитного потока внутри указанного сверхпроводника вызывает в области проникновения вихрей Абрикосова электрическое поле, которое в свою очередь, мгновенно создает экранирующий сверхпроводящий ток (сверхток) с критической плотностью J_c . Расчет распределения сверхтока и магнитного поля в образце, а также намагнченности и восприимчивости сверхпроводника представляет собой непростую задачу. Это связано с несколькими причинами. Во-первых, необходимо для каждой геометрии учитывать размагничивающее поле; во-вторых, процесс намагничивания сверхпроводника будет гистерезисным из-за разбиения

¹Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

²Аспирант, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; starlightalex@gmail.com.

сверхпроводника на области с противоположно текущими экранирующими сверхтоками; в-третьих, внутри сверхпроводника требуется учитывать текущую плотность потока поля на границах областей разбиения.

Использовалось приближение полной экранировки магнитного поля в центре цилиндра и модель Кима [1, 2]: $J_c(B) = \alpha / (|B| + B_0)$. Данное приближение игнорирует радиальную составляющую магнитного поля и соответственно кривизну нитей Абрикосова. В этом случае уравнение критического состояния для цилиндра радиуса R и длины d в аксиальном внешнем поле имеет вид [6]:

$$\frac{dH}{dr} = \pm \frac{\alpha}{(|H| + H_0) \sqrt{1 + \left(\frac{2r}{d}\right)^2}}. \quad (2.1)$$

Здесь r – есть текущий радиус цилиндра, $H(r)$ представляет собой осевую составляющую напряженности магнитного поля, α – объемная плотность силы пиннинга ($\alpha = const$), а H_0 (или B_0) – некоторое характерное поле. Уравнение (2.1) решается с граничным условием $H(R) = H_{ex}$. Где H_{ex} – напряженность внешнего магнитного поля. Знак «+» соответствует растущему магнитному полю, а знак «–» убывающему полю. Следовательно, в переменном магнитном поле ($H_{ex}(t) = H_d + h \cdot \cos(\omega t)$) сверхпроводник разбивается на области с противоположно текущими экранирующими сверхтоками. Это приводит к гистерезису в намагничивании жесткого сверхпроводника.

Численный расчет распределения магнитного поля и сверхтока внутри сверхпроводника необходимо производить отдельно для каждой области, используя уравнение (2.1) с учетом текущих граничных условий. Полученные распределения сверхтока используются в дальнейшем для вычисления петли намагниченности жесткого сверхпроводника в рамках вышеотмеченных приближений.

Уравнение (2.1) решается аналитически, но дальнейшее использование полученных формул для вычисления петли гистерезиса намагниченности и гармоник намагниченности приводит к чрезвычайной громоздкости функций выраженных через интегралы неудобных для дальнейшего анализа и сравнения с экспериментом.

Намагниченность \mathbf{M} цилиндрического сверхпроводника вычислялась согласно формуле используемой для определения магнитного момента системы токов [4, 5] учитывая, что экранирующий ток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2V} \int_{\rho}^R [\mathbf{r}, \mathbf{J}_c] dV \quad (2.2)$$

Здесь V – объем сверхпроводника, ρ – радиус внутренней части цилиндра, куда поле не проникло. Интеграл (2.2) разбивается на сумму нескольких интегралов с противоположно текущими сверхtokами J_c . Число областей с противоположными сверхtokами в случае одновременного присутствия переменного и постоянного полей достигает четырех.

В эксперименте при изучении магнитных свойств измеряется напряжение сигнала отклика сверхпроводника на переменное магнитное поле в присутствии постоянного поля [4-7]. Указанное напряжение возникает на концах приемной катушки, внутри которой помещен сверхпроводник. Напряжение сигнала отклика будет периодической негармонической функцией времени имеющее в своем составе большое количество синфазных и квадратурных составляющих гармоник. Гармоники напряжения пропорциональны соответствующим гармоникам намагниченности или восприимчивости: $\varepsilon_n^{''} \propto M_n^{''}$.

Здесь синфазные (действительные) M_n' и квадратурные (мнимые) M_n'' составляющие гармоник порядка n намагнченности вычислялись согласно формулам [3]:

$$M_n' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(t) \cos(n\omega t) d(\omega t), \quad (2.3)$$

$$M_n'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(t) \sin(n\omega t) d(\omega t). \quad (2.4)$$

Величина $M(t) = M(H_d + h \cdot \cos(\omega t))$ – модуль намагнченности сверхпроводящего цилиндра, определяемый выражением (2.2).

С целью более детального изучения поведения ВСТП была разработана специальная программа. В основе этого приложения лежат алгоритмы расчета гармоник намагнченности и ключевых параметров сверхпроводника на основе численных методов.

3. Структура и алгоритм работы программы

Программа позволяет провести исследование поведения ВСТП в переменных и постоянных магнитных полях, изучить интересующие зависимости и анализировать имеющуюся модель в сравнении с экспериментальными данными. Алгоритм позволяет вычислять гистерезисные и нелинейные процессы путем изучения синфазных и квадратурных частей амплитуд гармоник напряженности отклика сверхпроводника. Программа вычисляет зависимости намагнченности образца ВСТП от внешнего магнитного поля, комбинирующего воздействие двух составляющих: постоянного H_d и переменного амплитудой h , не ограничивая их величин.

При решении задачи моделирования поведения сверхпроводника важная роль отводилась так называемому принципу объектно-ориентированного программирования.

Алгоритм действия программы включает в себя несколько шагов. На этапе препроцессинга формируются объекты классов «сверхпроводник» и «магнитное поле».

Дифференциальное уравнение, задающее распределение величины магнитного поля в сверхпроводнике решается численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности. В качестве такого уравнения выступает уравнение критического состояния для короткого цилиндра в модели Кима (2.1).

Расчет намагнченности образца начинается с вычисления величины радиуса ρ , на глубину которого проникло внешнее магнитное поле, и радиусов λ и ζ , в которых направление течения тока критической плотности меняет свой знак. Вычисление производится для каждого момента времени в течение всего периода изменения магнитного поля с учетом предыдущего воздействия на образец. Проблема нахождения значений радиусов ρ , λ и ζ , которая программно может быть сведена к задаче нахождения нуля функции, решена при помощи алгоритма, реализованного на базе метода Брэндта [8]. Он оказался наиболее эффективным по соотношению быстрота–точность–надежность в сравнении с остальными методами (Ньютона, Миллера, Аткена и др. [9, 10]). Намагнченность всего образца рассчитывается путем интегрирования уравнений, полученных для нескольких частей с учетом направления течения тока.

На этом этапе конечным результатом является массив, содержащий текущее значение времени и соответствующие ему величины напряженности поля, 3-х радиусов и критической плотности тока.

Проведение гармонического анализа для такого большого объема данных оказалось достаточно трудоемкой и затратной по времени задачей. С помощью алгоритма быстрых преобразований Фурье удалось с достаточно высокой точностью вычислить значения действительных и мнимых составляющих гармоник с первой до одиннадцатой. Расчет происходит следующему принципу: один из параметров магнитного поля (амплитуда переменной составляющей) принимается неизменной, другой параметр изменяется от некоторого стартового значения до конечного. С некоторым шагом для каждого сочетания компонентов поля рассчитываются составляющие гармоник.

Свернутая классовая диаграмма программы выглядит следующим образом:

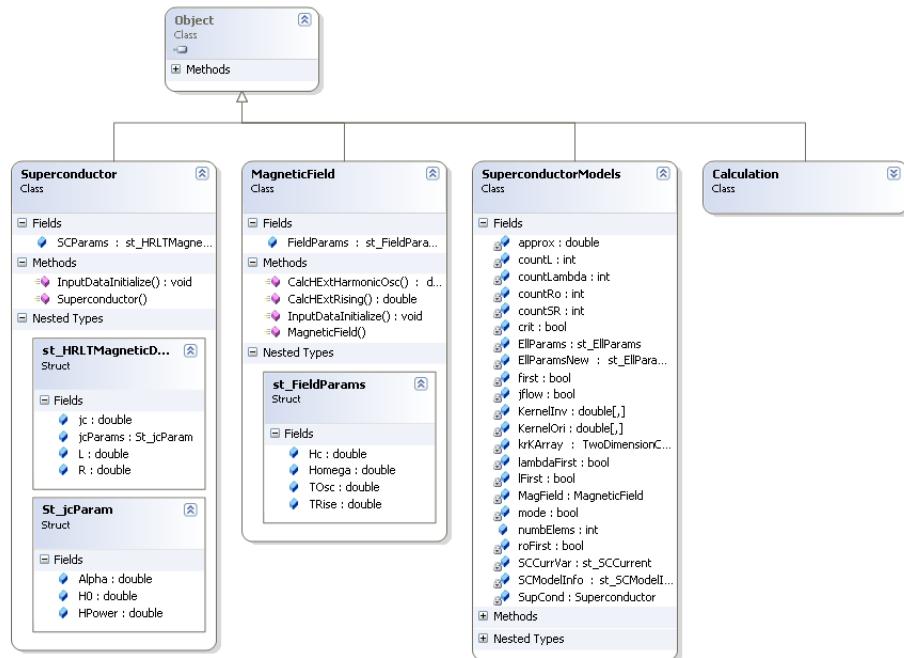


Рисунок 3.1

Классовая диаграмма проекта в свернутом виде.

Программа написана на языке программирования C# (C Sharp) с использованием средств разработки Microsoft Visual Studio 2005.

4. Результаты расчета

Такие параметры как критическая плотность тока j_c и объемная плотность силы пиннинга α , являются важными характеристиками сверхпроводника и факторами, влияющими на форму кривых гармоник.

Были вычислены оптимальные величины вышеперечисленных и других параметров, при которых модель, определяемая уравнением (2.1), наилучшим образом сходилась бы с результатами эксперимента, представленного в работе [7]. Расчет производился для используемых в эксперименте поликристаллических образцов ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в виде коротких цилиндров («таблетка») с соотношением $L/D = 0,12$ (для образца №1) и $L/D = 0,18$ (для образца №2), где $D = 20$ mm – диаметр образца, L – его высота. Получены следующие параметры:

для образца №1:

$$\alpha = 19 \cdot 10^9 A^2/m^3, H_0 = 6000 A/m \text{ и } j_c(0) = 3,167 \cdot 10^6 A/m^2;$$

для образца №2:

$$\alpha = 22 \cdot 10^9 A^2/m^3, H_0 = 8000 A/m \text{ и } j_c(0) = 2,75 \cdot 10^6 A/m^2.$$

Для образца №2 с такими характеристиками была рассчитана гистерезисная петля намагниченности при амплитуде модуляции переменного магнитного поля 300 Ое (рис. 4.1).

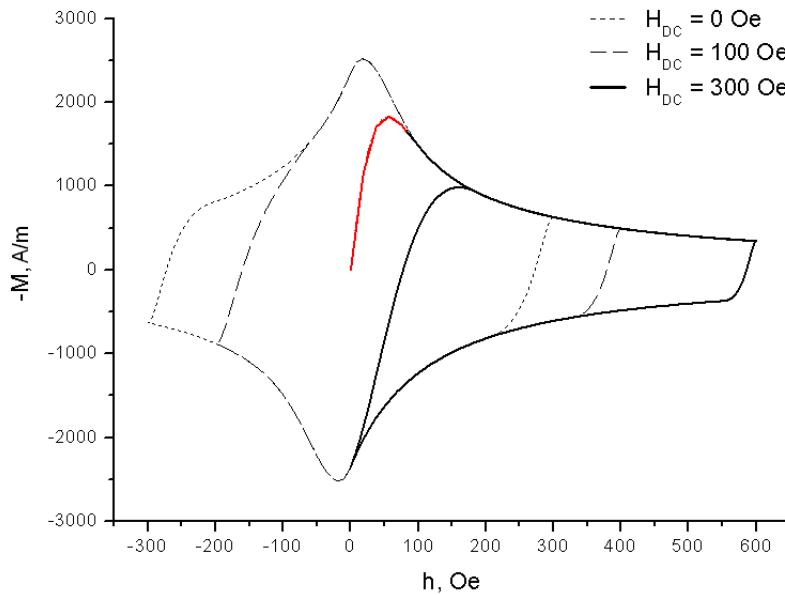


Рисунок 4.1

Петли намагниченности, рассчитанные программой.

На рисунке 4.2 представлена первая гармоника, ее действительная и мнимая части, рассчитанная для образца №2 при больших амплитудах модуляции.

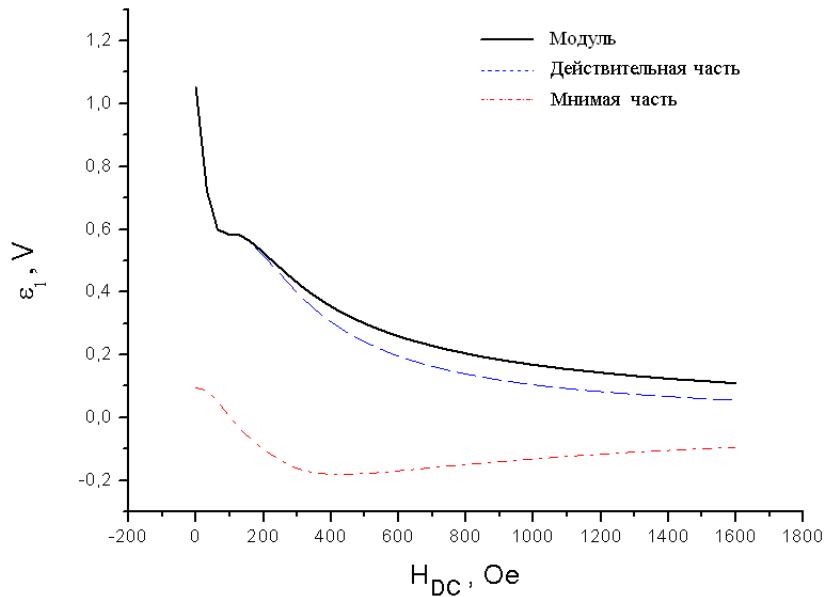


Рисунок 4.2

Первая гармоника намагниченности.

На рисунке 4.3 показаны кривые, построенные по экспериментальным [7] и расчетным данным для амплитуд модуляций 100, 300 и 470 Ое для второй гармоники (образец №2).

Изображенная кривая вычисляется следующим образом:

$$M_n = \sqrt{(M'_n)^2 + (M''_n)^2}, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_n = K \cdot M_n, \quad (4.2)$$

$$K = \mu_0 \cdot N \cdot S \cdot \omega \cdot n. \quad (4.3)$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная, N – число витков, S – площадь поперечного сечения сверхпроводящего образца, ω – частота колебаний переменной составляющей магнитного поля, n – номер гармоники. Значение K/n для экспериментальной работы [7] есть: $K/n \approx 6,42 \cdot 10^{-4} A/V \cdot m$.

Для сравнения, символами выделены кривые, построенные программой при таких же условиях.

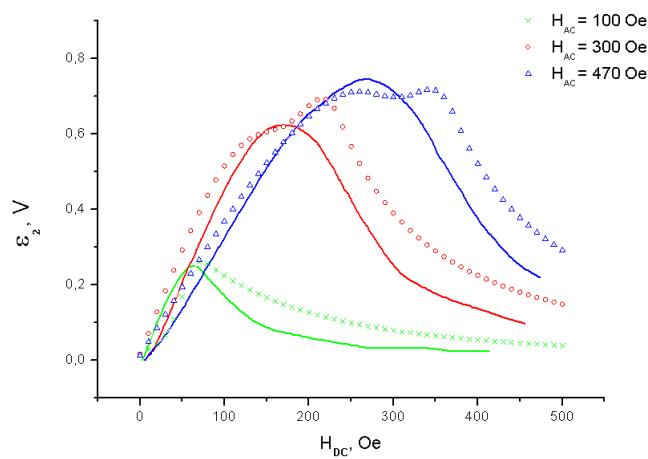


Рисунок 4.3

Сравнение экспериментальных [7] и расчетных данных второй гармоники для больших амплитуд модуляции. Сплошные линии – данные, полученные в ходе эксперимента; линии, выделенные символами – данные, рассчитанные программой.

Экспериментальные и расчетные данные для третьей (образец №1) и четвертой (образец №2) гармоники представлены на рисунках 4.4 и 4.5.

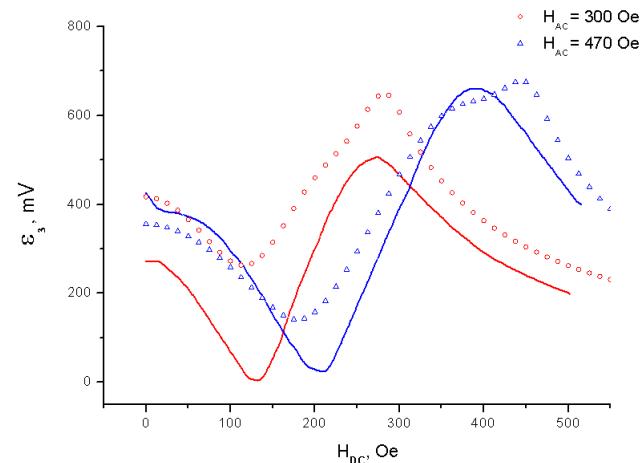


Рисунок 4.4

Сравнение экспериментальных [7] и расчетных данных третьей гармоники.

Однако четвертая и последующие гармоники демонстрируют некоторые расхождения. Хотя результаты эксперимента и результаты работы программы имеют сходство в точках экстремума и формах кривых. По всей видимости, это может быть обусловлено пренебрежением искривления линий магнитного потока, проникающего в образец ВТСП.

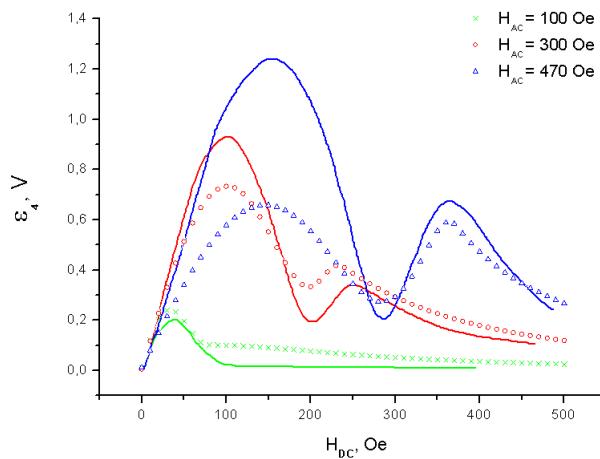


Рисунок 4.5

Сравнение экспериментальных [7] и расчетных данных четвертой гармоники.

5. Заключение

В статье на основе разработанной программы рассматривается нелинейный отклик жесткого сверхпроводника 2-го рода в виде короткого цилиндра на основе модели Кима в рамках приближения полной экранировки магнитного поля в центре цилиндра. Получены кривые намагнченности и гармоник. Низкие данные получены ввиду того, что используемые в эксперименте образцы содержат большое количество слабых связей. Если считать, что образцы состоят из отдельных изолированных сверхпроводящих гранул в виде столбиков диаметром $d \sim 1 \mu$, то параметры будут иметь значение $j_c(0) \approx 10^{10} A/m^2 (10^6 A/cm^2)$. Это говорит о том, что среднее значение j_c гранул поликристалла близко к соответствующему параметру монокристалла $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ($\sim 10^7 A/cm^2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kim Y.B., Heampstead C.F., Strnad A.R. Critical persistent currents in hard superconductors// Phys. Rev. Lett. – 1962. – V. 9. – P. 306-309.
2. Anderson P.W., Kim Y.B. Hard superconductivity: Theory of the motion of Abrikosov flux line// Rev. Mod. Phys. – 1964. – V. 36. – P. 39-46.
3. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагнченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагнченности на примере высокотемпературных сверхпроводников// ЖТФ. – 1994. – Т. 64., Вып. 12. – С. 63-74.
4. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред// М.: Наука – 1982. – 620 с.

5. Кугушев А.М., Голубева Н.С. Основы радиоэлектроники// М.: Энергия – 1969. – 880 с.
6. Кузьмичев Н.Д. Нелинейные магнитные свойства и вольтамперные характеристики высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ // М.: Докт. дисс. – 2002. – 288 с.
7. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В. Генерация гармоник поликристаллическими $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в сильных переменных магнитных полях// Письма в ЖТФ. – 1992. – Т. 18., Вып. 8. – С. 11-15.
8. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations.// Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall – 1977. – 354 с.
9. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов, 2-е изд., перераб. и доп.// М.: ФИЗМАТЛИТ – 2005. – 304 с.
10. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том 1. 2// Изд-во «Наука» – 1976. – 304 с.

Numerical simulation of magnetization harmonics of disc-shaped hard type-II superconductor with approximation of magnetic field screening in the sample center.

© N. D. Kuzmichev³ A. A. Fedchenko⁴

Abstract. Article include mathematical model of the response of disk-shaped hard superconductor to an applied external harmonically modulated magnetic field. In solution which gives Kim model and in approximation of magnetic field screening in the sample center were calculated hysteretic magnetization curves, the first and higher harmonics of magnetization. Calculation results are compared with data of previously performed experiments on polycrystals of high-temperature superconductor.

Key Words: high-temperature superconductor, critical state, Abrikosov vortices, Kim model, magnetization harmonics.

³Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru

⁴Postgraduate student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; starlightalex@gmail.com

УДК 517.938

О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством

© Т. М. Митрякова¹, О.В. Почкина², А. Е. Шишенкова³

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс Φ диффеоморфизмов поверхности M^2 с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Каждой периодической орбите \mathcal{O}_i , $i = 1, \dots, k_f$ диффеоморфизма $f \in \Phi$ соответствует представление динамики диффеоморфизма f в виде “источник–сток”, где источник (сток) — это репеллер R_i (аттрактор A_i) диффеоморфизма f . Устанавливается, что пространство орбит блуждающего множества $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$ представляет собой набор конечного числа двумерных торов. Откуда, в частности, следует, что ограничение диффеоморфизма f на множество V_i топологически сопряжено с линейным сжатием

Ключевые слова: цепно рекуррентное множество, пространство орбит, аттрактор, репеллер.

1. Определения и формулировка результатов

В настоящей работе рассматривается класс Φ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов f с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданных на гладких ориентируемых замкнутых поверхностях M^2 с метрикой d .

Напомним, что ε -цепью длины n , соединяющей точку $x \in M^2$ с точкой $y \in M^2$ для каскада f называется последовательность $x = x_0, \dots, x_n = y$ точек в M^2 такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq n$. Точка $x \in M^2$ называется цепно рекуррентной для f , если для любого $\varepsilon > 0$ существует n , зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины n , соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек f называется цепно рекуррентным множеством f и обозначается \mathcal{R}_f . Цепной компонентой называется класс эквивалентности точки $x \in \mathcal{R}_f$ относительно отношения эквивалентности \sim : $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -цепь, соединяющая точку x с точкой y и ε -цепь, соединяющая точку y с точкой x .

Пусть $f \in \Phi$. Из того, что цепно рекуррентное множество \mathcal{R}_f конечно, следует, что оно состоит из периодических точек ($\mathcal{R}_f = \text{Per}_f$) и каждая цепная компонента совпадает с периодической орбитой. Периодическая точка $p \in \text{Per}_f$ является гиперболической, если среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{per(p)}}{\partial x}\right)|_p$ нет чисел, по модулю равных 1. Гиперболическая структура множества \mathcal{R}_f приводит к существованию у каждой точки $p \in \mathcal{R}_f$ устойчивого W_p^s и неустойчивого W_p^u многообразий, которые определяются следующим образом: $W_p^s = \{x \in M : d(f^{kper(p)}(x), p) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty\}$, $W_p^u = \{x \in M : d(f^{-kper(p)}(x), p) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty\}$.

Заметим, что в общем случае диффеоморфизмы из класса Φ не являются структурно устойчивыми, но любой диффеоморфизм $f \in \Phi$ является Ω -устойчивым (см., напри-

¹Ассистент кафедры теории функций, Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru.

²Доцент кафедры теории функций, Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

³Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

мер, [3]), в силу чего периодические орбиты диффеоморфизма f допускают нумерацию $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{k_f}$, согласующуюся с отношением С. Смейла, то есть $i \leq j$, если $W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset$. Не уменьшая общности будем считать, что нумерация орбит выбрана так, что номер любой седловой орбиты больше номера любой стоковой и меньше номера любой источниковой орбиты. Для $i = 1, \dots, k_f$ положим $W_i^s = W_{\mathcal{O}_i}^s$, $W_i^u = W_{\mathcal{O}_i}^u$ и для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим

$$A_i = \bigcup_{j=1}^i W_j^u, R_i = \bigcup_{j=i+1}^{k_f} W_j^s.$$

В настоящей работе устанавливаются следующие свойства диффеоморфизмов $f \in \Phi$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $f \in \Phi$. Тогда*

- 1) $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$;
- 2) W_i^u является гладким подмногообразием многообразия M^2 ;
- 3) множество A_i является аттрактором⁴ диффеоморфизма $f \in \Phi$;
- 4) $(\text{cl } W_{i+1}^u \setminus W_{i+1}^u) \subset A_i$.

Для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$. Обозначим через $\hat{V}_i = V_i/f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_i и через $\rho_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ — естественную проекцию.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть $f \in \Phi$. Тогда*

- 1) проекция $\rho_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого 2-многообразия на пространстве орбит \hat{V}_i и отображение η_i , состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{i_i} : \pi_1(\hat{V}_i) \rightarrow \mathbb{Z}$ на каждой компоненте связности \hat{V}_i многообразия \hat{V}_i ;
- 2) многообразие \hat{V}_i состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному тору.

2. Динамика диффеоморфизмов класса Φ

В работе [1] была доказана лемма 2.1., которая понадобится для доказательства теоремы 1.1.

Л е м м а 2.1. *Пусть σ — гиперболическая седловая неподвижная точка диффеоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$, $N_\sigma \subset W_\sigma^s$ — компактная окрестность точки σ и $r \in N_\sigma$. Тогда, для любой последовательности точек $\{r_n\} \subset (M^2 \setminus N_\sigma)$, сходящейся к точке r , существует подпоследовательность $\{r_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \rightarrow +\infty$ и точка $q \in (W_\sigma^u \setminus \sigma)$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_j}(r_{n_j})\}$ сходится к точке q .*

Теорема 1.1. Пусть $f \in \Phi$. Тогда

- 1) $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$;
- 2) W_i^u является гладким подмногообразием многообразия M^2 ;

⁴Пусть f — гомеоморфизм многообразия M^2 . Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^2$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей или изолирующей. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1} .

3) множество A_i является аттрактором⁵ диффеоморфизма $f \in \Phi$;

4) $(cl W_{i+1}^u \setminus W_i^u) \subset A_i$.

Доказательство.

1) Соотношение $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$ следует из теоремы о спектральном разложении (см., например, [3]).

2) Докажем, что W_i^u является гладким подмногообразием многообразия M^2 . Не уменьшая общности будем считать, что множество \mathcal{R}_f диффеоморфизма f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f .

Возможны три случая: a) $\dim W_i^u = 0$; b) $\dim W_i^u = 1$; c) $\dim W_i^u = 2$.

В случае a) W_i^u является точкой и, следовательно, гладким подмногообразием многообразия M^2 .

В случае c) W_i^u является открытым и двумерным, и, следовательно, гладким подмногообразием многообразия M^2 .

Докажем утверждение в случае b). Пусть $x \in W_i^u$ и $N_x \subset W_i^u$ — компактное множество, содержащее x . Согласно обобщенной теореме об устойчивом многообразии гиперболической точки (см., например, [5], теорема 7.3), W_i^u является образом \mathbb{R}^1 относительно инъективной иммерсии. Следовательно, существует карта $\psi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ многообразия M^2 такая, что $\psi(U_x \cap N_x) = \mathbb{R}^1$. Если W_i^u не является гладким подмногообразием M^2 , то существует последовательность $\{x_n\} \subset (W_i^u \setminus N_x)$ такая, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow +\infty$. Из леммы 2.1. следует, что существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \rightarrow +\infty$ и точка $y \in W_i^s$ такие, что последовательность точек $\{y_j = f^{-k_j}(x_{n_j})\}$

сходится к точке y . Так как $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$, то $y \in W_l^u$ для некоторого $l \in \{1, \dots, k_f\}$.

Рассмотрим три возможных случая: [a] $\dim W_l^u = 0$; [b] $\dim W_l^u = 1$; [c] $\dim W_l^u = 2$.

[a] Если $\dim W_l^u = 0$, то $y_j \in W_l^u$ для всех j , начиная с некоторого. Следовательно, $i = l$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [a] невозможен.

[c] Если $\dim W_l^u = 2$, то $W_l^u = \mathcal{O}_l$, $y = \mathcal{O}_l$. Следовательно $\mathcal{O}_l \subset W_i^s$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [c] невозможен.

[b] Если $\dim W_l^u = 1$, то $l \neq i$, так как диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет гомоклинических точек в силу конечности множества \mathcal{R}_f . Следовательно, из леммы 2.1. следует, что существует подпоследовательность $\{y_{j_r}\}$, последовательность целых чисел $m_r \rightarrow +\infty$ и точка $z \in W_l^s$ такие, что последовательность точек $\{f^{m_r}(y_{j_r})\}$ сходится к точке z . Так как $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$, то $z \in W_t^u$ для некоторого $t \in \{1, \dots, k_f\}$. Рассуждая как выше, получаем, что $\dim W_t^u = 1$ и $t \neq l$. Так как, в силу Ω -устойчивости, диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет циклов, то $t \neq i$. Повторяя вышеприведенные рассуждения и учитывая, что множество \mathcal{R}_f конечно получаем, что случай [b] невозможен.

Таким образом, W_i^u — гладкое подмногообразие многообразия M^2 для каждого $i \in \{1, \dots, k_f\}$.

3) В силу теоремы о фильтрации (см., например, [3]), для диффеоморфизма $f \in \Phi$ существует *фильтрация*, то есть последовательность M_1, \dots, M_{k_f-1} 2-подмногообразий с

⁵Пусть f — гомеоморфизм многообразия M^2 . Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^2$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей или изолирующей. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1} .

гладкой границей многообразия M^2 таких, что $M^2 = M_{k_f} \supset M_{k_f-1} \supset \dots \supset M_1 \supset M_0 = \emptyset$ и для каждого $i = 1, \dots, k_f$ выполняются условия:

- 1) $f(M_i) \subset \text{int } M_i$;
- 2) $\mathcal{O}_i \subset \text{int } (M_i \setminus M_{i-1})$;
- 3) $\mathcal{O}_i = \bigcap_{l \in \mathbb{Z}} f^l(M_i \setminus M_{i-1})$;
- 4) $\bigcap_{l \geq 0} f^l(M_i) = \bigcup_{j \leq i} W_{\mathcal{O}_j}^u = \bigcup_{j \leq i} \text{cl}(W_{\mathcal{O}_j}^u)$.

Тогда утверждение о том, что множество A_i (R_i) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f непосредственно следует из свойств 1) — 4) фильтрации.

4) Не уменьшая общности будем считать, что множество \mathcal{R}_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f .

Пусть $x \in (\text{cl } W_{i+1}^u \setminus W_{i+1}^u)$. Тогда существует последовательность $\{x_k\} \subset W_{i+1}^u$ такая, что $d(x_k, x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Из того, что $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$, следует, что $x \in W_j^u$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k_f\}$.

Возможны три случая: a) $\dim W_j^u = 0$; b) $\dim W_j^u = 1$; c) $\dim W_j^u = 2$.

a) Если $\dim W_j^u = 0$, то $W_j^u = \mathcal{O}_j$, $x = \mathcal{O}_j$ и $x_k \in W_j^s$ для всех k , начиная с некоторого. Тогда, $W_{i+1}^u \cap W_j^s \neq \emptyset$ и, следовательно, $j < i+1$. Таким образом, $x \in A_i$.

c) Если $\dim W_j^u = 2$, то $x_k \in W_j^u$ для всех k , начиная с некоторого. Откуда $i+1 = j$ и $x \in W_{i+1}^u$. Получили противоречие с условием $x \in (\text{cl } W_{i+1}^u \setminus W_{i+1}^u)$, откуда следует, что случай c) невозможен.

b) Если $\dim W_j^u = 1$, то, согласно лемме 2.1., существует подпоследовательность x_{k_l} , последовательность целых чисел $m_l \rightarrow +\infty$ и точка $z \in W_j^s$ такие, что последовательность точек $z_l = f^{-m_l}(x_{k_l})$ сходится к точке z . Так как $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$, то $z \in W_t^u$ для некоторого $t \in \{1, \dots, k_f\}$. Возможны три случая: [a] $\dim W_t^u = 0$; [b] $\dim W_t^u = 1$; [c] $\dim W_t^u = 2$.

[a] Если $\dim W_t^u = 0$, то $W_t^u = \mathcal{O}_t$, $z = \mathcal{O}_t$. Следовательно, $\mathcal{O}_t \in W_j^s$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [a].

[c] Если $\dim W_t^u = 2$, то $z_l \in W_t^u$ для всех l , начиная с некоторого. Тогда $\mathcal{O}_t = \mathcal{O}_{i+1}$, откуда $j < i+1$ и, следовательно, $x \in A_i$.

[b] Если $\dim W_t^u = 1$, то $t > j$. Если $t = i+1$, то $x \in A_i$. Если $t \neq i+1$, то повторяя вышеприведенные рассуждения и учитывая конечность \mathcal{R}_f и отсутствие циклов, получим, что $x \in A_i$.

Доказательство закончено.

3. Структура пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов класса Φ

Для описания пространства орбит диффеоморфизмов класса Φ , нам понадобится следующая конструкция. Рассмотрим линейный диффеоморфизм $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданный формулой $b(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Заметим, что пространство орбит $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus O)_b$ действия диффеоморфизма b на $\mathbb{R}^2 \setminus O$ является стандартным двумерным тором и естественная проекция $p_{\mathbb{T}} : \mathbb{R}^2 \setminus O \rightarrow \mathbb{T}^2$ является накрытием. Обозначим через $\eta_{\mathbb{T}} : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$ — эпиморфизм, соответствующий накрытию $p_{\mathbb{T}}$.

В дальнейшем пара (\hat{P}, η) будет обозначать многообразие \hat{P} , состоящее из конечно-го числа двумерных торов $\mathbb{T}_1^2, \dots, \mathbb{T}_r^2$ и отображение η , составленное из эпиморфизмов

$\eta_{\hat{\tau}_1^2}, \dots, \eta_{\hat{\tau}_r^2}$. Пусть $\hat{\gamma}$ — пара гладких замкнутых кривых на \hat{P} , таких, что $\eta([\hat{\ell}]) = 1$ для каждого узла $\hat{\ell}$ пары $\hat{\gamma}$. Обозначим через $N(\hat{\gamma}) \subset \hat{P}$ — трубчатую окрестность узлов $\hat{\gamma}$, которую будем отождествлять с множеством $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$. Определим диффеоморфизм $\mu : \partial N(\hat{\gamma}) \rightarrow \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ формулой $\mu(x, y, z) = (z, y, x)$. Положим $\hat{P}_{\hat{\gamma}} = (\hat{P} \setminus \text{int } N(\hat{\gamma})) \bigcup_{\mu} (\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$ и будем говорить, что пространство $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$ получено *перестройкой многообразия* \hat{P} *вдоль* $\hat{\gamma}$.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пространство $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$ состоит из конечного числа двумерных торов.*

Доказательство. Поскольку множество $\hat{\gamma}$ состоит из двух непересекающихся узлов, то каждая компонента связности множества $\hat{P} \setminus \text{int } N(\hat{\gamma})$ является цилиндром (см., например, [4]). По построению, гомеоморфизм μ склеивает граничные окружности множества $\hat{P} \setminus \text{int } N(\hat{\gamma})$ с граничными окружностями двумерных колец. Таким образом, каждая компонента связности множества $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$ есть двумерный тор.

Доказательство закончено.

На рис. 3.1 изображена перестройка двумерного тора вдоль пары узлов. Результатом такой перестройки является многообразие $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$, гомеоморфное паре двумерных торов.

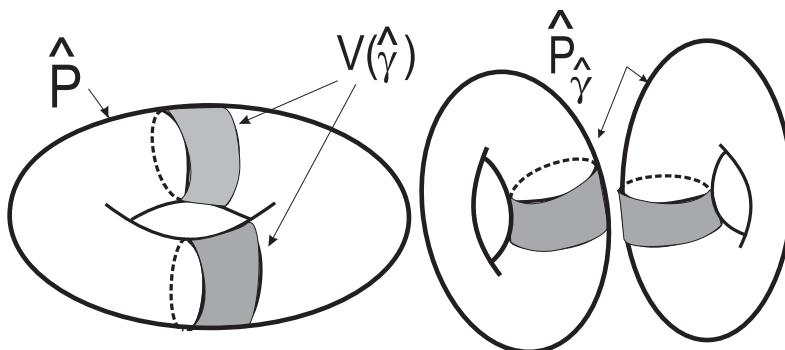


Рисунок 3.1

Перестройка двумерного тора вдоль пары узлов

Напомним, что ранее для $i = 1, \dots, k_f - 1$ были введены следующие обозначения:
 $A_i = \bigcup_{j=1}^i W_j^u$, $R_i = \bigcup_{j=i+1}^{k_f} W_j^s$, $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$, $\hat{V}_i = V_i/f$.

Теорема 1.2. Пусть $f \in \Phi$. Тогда

1) естественная проекция $\rho_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого 2-многообразия на пространстве орбит \hat{V}_i и отображение η_i , состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\hat{v}_i} : \pi_1(\hat{v}_i) \rightarrow \mathbb{Z}$ на каждой компоненте связности \hat{v}_i многообразия \hat{V}_i ;

2) многообразие \hat{V}_i состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному тору.

Доказательство.

1) Покажем, что группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на V_i .

По построению все неблуждающие точки диффеоморфизма f принадлежат объединению $A_i \cup R_i$. Откуда следует, что многообразие V_i состоит из блуждающих точек и, следовательно, группа F действует свободно на V_i .

В силу теоремы 1.1. множество A_i является аттрактором диффеоморфизма f и, следовательно, обладает окрестностью M_i такой, что $f(M_i) \subset \text{int } M_i$ и $\bigcap_{l \geq 0} f^l(M_i) = \bigcup_{j \leq i} W_{O_j}^u =$

$\bigcup_{k \leq i} cl(W_{\mathcal{O}_j}^u)$. Покажем, что множество $K_i = M_i \setminus \text{int } f(M_i)$ является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f на V_i . Для этого достаточно показать, что $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(K_i) = V_i$. Поскольку $K_i \subset V_i$, то $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(K_i) \subset V_i$. Предположим, что обратное включение не имеет места: то есть существует точка $x \in V_i$ такая, что $x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(K_i)$.

Поскольку M_i — окрестность A_i , то M_i содержит фундаментальную область ограничения диффеоморфизма f на $\bigcup_{j=1}^i W_j^s$ и, следовательно, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(M_i) \supset \bigcup_{j=1}^i W_j^s$. Так как $M_i \subset \bigcup_{j=1}^i W_j^s$, то $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(M_i) \subset \bigcup_{j=1}^i W_j^s$ и, следовательно, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(M_i) = \bigcup_{j=1}^i W_j^s$. Откуда $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(M_i) \setminus A_i = V_i$. Таким образом, $x \in f^{k_*}(M_i)$ для некоторого $k_* \in \mathbb{Z}$. Поскольку $x \notin A_i$ и $A_i = \bigcap_{k \geq 0} f^k(M_i)$, то существует $k^* > k_*$ такое, что $x \in f^{k^*}(M_i)$ и $x \notin f^{k^*+1}(M_i)$. Таким образом, $x \in f^{k^*}(K_i)$. Получили противоречие.

Если K — компактное подмножество множества V_i , то оно ограничено и, следовательно, существует число $N \in \mathbb{N}$ такое, что $K \subset \bigcup_{|k| \leq N} f^k(K_i)$. Тогда $f^k(K) \cap K = \emptyset$ для $|k| > 2N$. Откуда следует, что действие группы F является разрывным.

Из доказанного следует, что естественная проекция $\rho_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирует структуру 2-многообразия на пространстве орбит \hat{V}_i и отображение η_i , состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\hat{V}_i^j} : \pi_1(\hat{V}_i^j) \rightarrow \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, r_i$. По построению \hat{V}_i гомеоморфно многообразию, полученному из K_i отождествлением его границ в силу диффеоморфизма f . Откуда следует замкнутость многообразия \hat{V}_i .

2) Не уменьшая общности будем считать, что множество \mathcal{R}_f неподвижно, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени m диффеоморфизма f , а так как пространство V_i/f^m является m -листным накрытием для пространства V_i/f , то из того, что многообразие V_i/f^m состоит из конечного числа двумерных торов, аналогично верно и для многообразия V_i/f .

Обозначим через k_f^s , m_f и k_f^u — число стоковых орбит диффеоморфизма $f \in \Phi$, число седловых орбит и число источников орбит диффеоморфизма $f \in \Phi$, соответственно, и через p_i — период орбиты \mathcal{O}_i . Тогда, многообразие V_i , $i = 1, \dots, k_f^s$ является объединением бассейнов стоковых орбит без самих орбит. В силу теоремы о локальной топологической классификации гиперболических неподвижных точек диффеоморфизма ([2], теорема 5.5), ограничение диффеоморфизма f^{p_i} на компоненту связности многообразия V_i сопряжено с линейным диффеоморфизмом b , откуда следует, что каждая компонента связности многообразия \hat{V}_i гомеоморфна стандартному двумерному тору \mathbb{T}^2 а, следовательно, удовлетворяет заключению теоремы. Аналогично многообразие \hat{V}_i , $i = k_f^s + m_f + 1, \dots, k_f$ гомеоморфно стандартному двумерному тору \mathbb{T}^2 . Осталось рассмотреть многообразия \hat{V}_i для $i = k_f^s + 1, \dots, k_f^s + m_f$. Заметим, что переход от многообразия V_{i-1} к многообразию V_i для $i = k_f^s + 1, \dots, k_f - 1$ состоит в добавлении W_i^s и удалении W_i^u .

Согласно пункту 4) теоремы 1.1., $(W_i^u \setminus \mathcal{O}_i) \subset V_{i-1}$. Из определения множества V_i следует, что $V_i = V_{i-1} \setminus (W_i^u \setminus \mathcal{O}_i) \cup (W_i^s \setminus \mathcal{O}_i)$ и, согласно пункту 1) настоящей теоремы 1.2., пространство орбит \hat{V}_i является гладким замкнутым 2-многообразием, а проекция $\rho_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ является накрытием для любого $i = 1, \dots, k_f - 1$. Для $i = k_f^s + 1, \dots, k_f^s + m_f$ положим $\hat{\gamma}_i^u = \rho_{i-1}(W_i^u \setminus \mathcal{O}_i)$. Тогда в силу пункта 2) теоремы 1.1. и теоремы о локальной топологической классификации гиперболических неподвижных точек диффеоморфизма ([2], теорема 5.5) $\hat{\gamma}_i^u$ является парой гладких замкнутых кривых на многообразии \hat{V}_{i-1} .

такой, что $\eta[\hat{c}] = 1$ для каждого узла \hat{c} пары $\hat{\gamma}_i$.

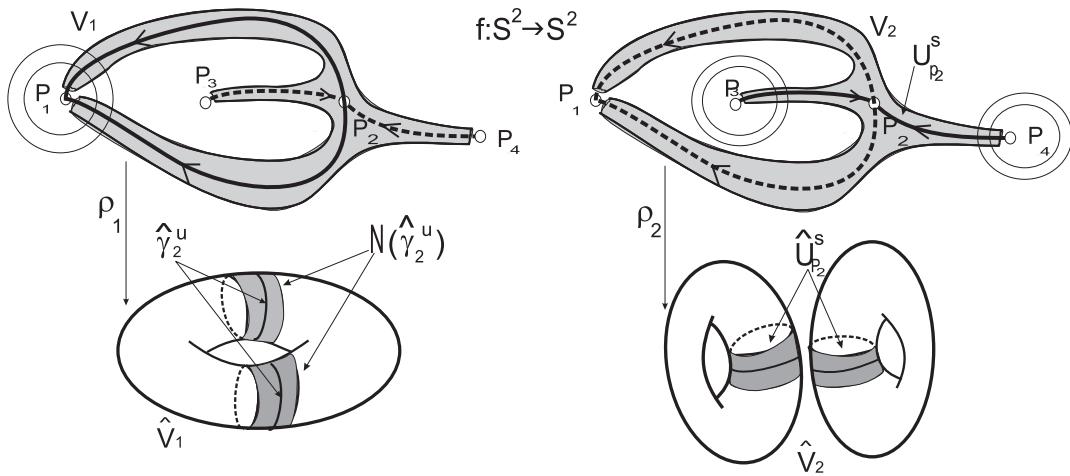


Рисунок 3.2

Перестройка пространств \hat{V}_{i-1} и \hat{V}_i

Докажем, что для любого диффеоморфизма $f \in \Phi$ пространство \hat{V}_i , $i \in \{k_f^s + 1, \dots, k_f^s + m_f\}$ получается из пространства \check{V}_{i-1} перестройкой вдоль замкнутых кривых $\hat{\gamma}_i^u = \rho_{i-1}(W_i^u)$. Для этого выберем трубчатую окрестность $N(\hat{\gamma}_i^u)$ узлов $\hat{\gamma}_i^u$, которую будем отождествлять с множеством $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$ и обозначим через $\mu_i : \partial N(\hat{\gamma}_i^u) \rightarrow \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\mu_i(x, y, z) = (z, y, x)$. Положим $U_{p_i}^s = \rho_{i-1}^{-1}(N(\hat{\gamma}_i^u)) \setminus W_i^u \cup W_i^s$, $\hat{U}_{p_i}^s = \rho_i(U_{p_i}^s)$ и $\check{V}_{i-1} = \check{V}_{i-1} \setminus \text{int } N(\hat{\gamma}_i^u)$.

На рисунке 3.2 введенные объекты изображены для диффеоморфизма $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, неблуждающее множество которого состоит в точности из четырех неподвижных точек, и значения $i = 2$. Кроме того, для лучшего понимания топологической структуры пространств \check{V}_{i-1} и \check{V}_i , изображены фундаментальные области (гомеоморфные двумерным кольцам) ограничения f на V_{i-1} и V_i .

Заметим, что $\hat{U}_{p_i}^s$ гомеоморфно паре двумерных колец. Построим гомеоморфизм между множествами $(\check{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u} = \check{V}_{i-1} \bigcup_{\mu_i} (\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$ и \check{V}_i . Обозначим через $q : \check{V}_{i-1} \bigcup (\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1) \rightarrow (\check{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u}$ — естественную проекцию. Тогда $(\check{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u} = q(\check{V}_{i-1}) \cup q(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$. С другой стороны, $\check{V}_i = \rho_i(\rho_{i-1}^{-1}(\check{V}_{i-1})) \cup \rho_i(U_{p_i}^s)$. Определим гомеоморфизм $\Phi_i : q(\check{V}_{i-1}) \rightarrow \rho_i(\rho_{i-1}^{-1}(\check{V}_{i-1}))$ формулой $\Phi_i(x) = \rho_i(\rho_{i-1}^{-1}(q^{-1}(x)))$. По построению, гомеоморфизм Φ_i переводит границы колец $q(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$ в границы колец $\hat{U}_{p_i}^s$ и, следовательно, продолжается на множество $q(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$ до гомеоморфизма $\Phi_i : (\check{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u} \rightarrow \check{V}_i$.

Так как $\hat{V}_{k_f^s}$ является дизъюнктным объединением конечного числа двумерных торов и для $i = k_f^s + 1, \dots, k_f$ многообразие \hat{V}_i гомеоморфно $(\check{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u}$, то согласно предложению 3.1., многообразие \hat{V}_i для любого $i = k_f^s + 1, \dots, k_f$ является дизъюнктным объединением конечного числа двумерных торов.

Доказательство закончено.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за постоянное внимание к работе, а также грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект НК-13П-13) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митрякова Т. М., Починка О. В. О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания// Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. - 2010. - Т. 270. - С. 198-219.
2. Palis J., Melo W. Геометрическая теория динамических систем. - Москва.; Мир.; 1998. - 301 с.
3. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. - Studies in Adv. Math.; Sec. edition, CRC Press, 1999. - 520 p.
4. Rolfsen D. Knots and links. - University of British Columbia; Math. Lecture Series 7, 1990. - 439 с.
5. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы// Успехи мат. наук. - 1970. - Т. 25, № 1. - С. 113-185.

On a structure of the space wandering orbits of diffeomorphisms on surfaces with the finite hyperbolic chain recurrent set

© Т.М. Mitryakova⁶, О. В. Pochinka⁷, А. Е. Shishenkova⁸

Abstract. In the present paper a class Φ of diffeomorphisms on surfaces M^2 with the finite hyperbolic chain recurrent set is considered. To each periodic orbit \mathcal{O}_i , $i = 1, \dots, k_f$ of $f \in \Phi$ corresponds a representation of the dynamics of a diffeomorphism f in the form “source — sink”, where source (sink) is a repeller R_i (an attractor A_i) of diffeomorphism f . It is assigned that the orbit space of the wandering set $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$ is a collection of the finite number of two-dimention torus. It implies, in particular, that the restriction of f to V_i is topologically conjugated with the homothety.

Key Words: chain recurrent set, space of orbits, attractor, repeller.

⁶Assistant of Theory Function Chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru

⁷Associate Professor of Theory Function Chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

⁸Associate Professor of Higher Mathematics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru

УДК 517.95

Априорные оценки для вырождающихся эллиптических операторов в обобщенных пространствах С.Л.Соболева

© Г. А. Смолкин¹

Аннотация. В работе получены априорные оценки в пространствах С. Л. Соболева для дифференциальных операторов второго порядка с неотрицательной характеристической формой специального вида. Указаны возможные обобщения.

Ключевые слова: пространства С. Л. Соболева, априорные оценки, теория псевдодифференциальных операторов, левый параметрикс.

Будем использовать общепринятые обозначения из работ [1], [2]. Пусть R^n - n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$, i - мнимая единица ($i^2 = -1$), $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - мультииндекс с целочисленными неотрицательными координатами и k - целое неотрицательное число, то положим

$$\partial_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\partial_j^k f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_j^k}, \quad D_j^k f(x) = (-i)^k \partial_j^k f(x), \quad j = 1, \dots, n.$$

Равенствами

$$\widehat{V}(\xi) = \int e^{-ix\xi} V(x) dx, \quad \widehat{V}(x_1, \xi') = \int e^{-ix'\xi'} V(x) dx'$$

определяем преобразования Фурье $\widehat{V}(\xi)$, $\widehat{V}(x_1, \xi')$ функции $V(x)$ по переменным x, x' соответственно.

Далее, через $[A, B] = AB - BA$ коммутатор операторов A, B . Наконец, буквой C , часто с индексами, будем обозначать положительные постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов. Их существование будет вытекать из контекста. При этом особые случаи оговариваются.

Пусть t, ρ, δ - вещественные постоянные. Пусть функция (символ) $p(x, \xi) \in C^\infty(R^n \times R^n)$ и для всех мультииндексов α, β , каждого компакта $K \subset R^n$ справедливы неравенства

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{t - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} (\xi), \quad x \in K. \quad (1.1)$$

Если при этом $1 \geq \rho > \delta \geq 0$, то, следуя работе [4], будем говорить, что символ $p(x, \xi)$ принадлежит классу $S_{\rho, \delta}^t(R^n)$. Отнесем к классу $S_\delta^t(R^n)$ все функции $p(x, \xi)$, для которых справедливо (1.1) при $1 > \rho = \delta \geq 0$. Символу $p(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^t$ или S_δ^t отвечает псевдодифференциальный оператор $p(x, D)$, определенный по формуле:

$$p(x, D)V(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(x, \xi) \tilde{V}(\xi) d\xi.$$

¹Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; gsmolkin@mail.ru

Число t называется порядком оператора $p(x, D)$.

Пусть $s \in R$, вещественная функция $g(\xi)$ на R^n такова, что найдутся постоянные L_j , принадлежащие отрезку $[0, 1]$, $j = 1, \dots, n$ и существуют положительные константы C_1, C_2 , не зависящие от $\xi \in R^n$ такие, что

$$C_1(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{L_j}) \leq g(\xi) \leq C_2(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{L_j}).$$

Определим норму $\|g^s(D)V\|$ функции $V(x)$ из $C_0^\infty(R^n)$ равенством

$$\|g^s(D)V\| = (\int |\tilde{V}(\xi)|^2 g^{2s}(\xi) d\xi)^{1/2}.$$

Пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по норме $\|g^s(D)V\|$ назовем обобщенным пространством С.Л.Соболева с весовой функцией $g(\xi)$. В случае когда $L_j = 1$, $j = 1, \dots, n$, вместо $\|g^s(D)V\|$ пишем, как обычно $\|V\|_s$, а само пространство обозначаем $H^s(R^n)$.

Далее всюду предполагаем, что функция $H \in C_0^\infty(|x_1| \leq 2)$, $0 \leq H(x_1) \leq 1$, $H(x_1) = 1$, если $|x_1| \leq 1$, H четная и полагаем $h_0 = h_0(x) = H(|x'|)H(x_1)$, $h_1 = h_0(x/4)$, $h_2 = h_0(x/8)$, $h(x_1) = H(4x_1)$,

$$p(x, D) = D_1^2 + x_1^{2m}(D_2^2 + \dots + D_n^2),$$

где m - целое неотрицательное число. В качестве весовой функции $g(\xi)$ чаще всего будем рассматривать функции $\lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, $\Lambda(\xi) = (1 + \xi_1^{2(m+1)} + |\xi'|^2)^{1/2/(m+1)}$, $q(\xi') = (1 + |\xi'|^2)^{1/2/(m+1)}$.

Основными результатами данной работы являются, излагаемые ниже, теоремы 1-2. Содержание этих теорем составляют следующие оценки норм.

$$\|D_1 h_0 U\|^2 + \|h_0 U\|_{1/(m+1)}^2 \leq C_1(Re(p(x, D)h_0 U, h_0 U) + \|h_0 U\|^2), \quad (1.2)$$

$$\|h_0 U\|_{s+2/(m+1)} \leq C_2(\|h_0 p(x, D)U\|_s + \|h_1 U\|_{s+1/(m+1)}), \quad s \in R, \quad (1.3)$$

$$\|q^{s+2}(D')h_0 U\| \leq C_3(\|q^s(D')h_0 p(x, D)U\| + \|a(D)h_1 U\|), \quad s \geq 0, \quad (1.4)$$

$$\|\Lambda^{s+2}(D)h_0 U\| \leq C_4(\|\Lambda^s(D)h_0 p(x, D)U\| + \|\Lambda^{s+1}(D)h_1 U\|), \quad s \geq 0, \quad (1.5)$$

где константы C_1, \dots, C_4 , не зависят от $U \in C^\infty(R^n)$,
 $a(\xi) = (1 + \xi_1^2 + |\xi'|^{2M})^{(s+1)/2/M/(m+1)}$, $M = [s] + 2$.

Вкратце обсудим эти неравенства и методы их доказательства.

Так как

$$p(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^{2m}|\xi'|^2 = \sum_{j=1}^n (X_j, \xi)^2,$$

где векторные поля

$$X_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad X_2 = (0, x_1^m, 0, \dots, 0), \dots, \quad X_n = (0, \dots, 0, x_1^m)$$

определенны на R^n , то оператор $p(x, D)$ принадлежит классу операторов, исследованию которого посвящены работы [2], [3], [5]. Поскольку алгебра Ли, порожденная полями X_1, \dots, X_n над $C^\infty(R^n)$, совпадает с пространством всех векторных полей на R^n , то из [2], [5] вытекает справедливость оценки вида (1.2), в которой вместо $\|D_1 h_0 U\|^2 + \|h_0 U\|_{1/(m+1)}^2$ фигурирует $\|h_0 U\|_\nu^2$, ν - некоторое положительное число. Вполне очевидно, что две любые близко лежащие точки x, y из R^n можно соединить дугами интегральных

линий полей X_1, \dots, X_n и их линейных комбинаций, при этом сумма длин дуг не превышает $\text{const} \cdot |x - y|^{1/(m+1)}$. Поэтому из [3] следует, что максимальное возможное значение $\nu = 1/(m+1)$. Заметим, что доказательства соответствующих неравенств, приведенных в работах Л. Хермандера [5], Е.В. Радкевича [2], автора [3], из которых следует оценка (1.2), являются достаточно сложными.

В данной работе показано, что специальный вид оператора $p(x, D)$ с символом $p(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^{2m} |\xi'|^2$, позволяет указать простое непосредственное доказательство оценки (1.2), опирающееся на равенство Парсеваля и формулу Ньютона-Лейбница (более подробно см. вывод теоремы 1).

Оценки (1.3), (1.4) получаются затем из (1.2) средствами исчисления псевдодифференциальных операторов и неравенства Шварца. Оператор $a(D)$ в (1.4) при этом является вспомогательным и введен только из-за того, что $q^s(\xi')$ не принадлежит ни одному из классов $S_{\rho, \delta}^t(R^n)$. Важно, что неравенство (1.4) позволяет оценивать производные функции U вдоль касательных направлений к плоскости $\{x : x_1 = 0\}$. Наконец, оценка (1.5) является обобщением оценки (1.3). Доказательство (1.5) опирается на лемму 2 и одну конструкцию, часто используемую при построении параметриков для псевдодифференциальных операторов.

В наши цели работы не входит охват как можно более широкого класса дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, для которых неравенства типа (1.2)-(1.5) получаются методами этой статьи. Наоборот, рассмотрен простой оператор $p(x, D)$. Его исследование вполне проясняет суть дела и демонстрирует одну из методик получения оценок вида (1.2)-(1.5) для дифференциальных и псевдодифференциальных операторов.

Тем не менее укажем на некоторые возможные обобщения. Результаты статьи можно обобщить например, на класс вырождающихся квазиэллиптических операторов по части переменных как со знакопределенной характеристической формой, так и со знакопеременной характеристической формой. Характерным примером здесь являются операторы вида:

$$\begin{aligned} p_1(x, D) &= a_1(x)D_1^{2\nu_1} + a_2(x)x_1^{2m_1} \sum_{j=2}^{n_1} D_j^{2\nu_j} + a_3(x)x_1^{2m_2} \sum_{j=n_1+1}^{n_2} D_j^{2\nu_j} + \dots, \\ p_2(x, D) &= a_1(x)D_1^{2\nu_1-1} + ia_2(x)x_1^{2m_1+1} \sum_{j=2}^{n_1} D_j^{2\nu_j} + ia_3(x)x_1^{2m_2+1} \sum_{j=n_1+1}^{n_2} D_j^{2\nu_j} + \dots, \end{aligned}$$

где $a_1(x), \dots$ — положительные функции, числа ν_1, \dots — натуральные, а m_1, \dots — целые и неотрицательные.

Для оператора $p_2(x, D)$ возможные оценки норм функции $h_0 U$ в пространствах С.Л.Соболева через соответствующие нормы функции $h_0 p_2(x, D)U$ получаются из неравенства

$$\begin{aligned} &\text{Re}(p_2(x, D)h_0 U, D_1 h_0 U) \geq \\ &\geq C_6 (\|a_1^{1/2}(x)D_1^{\nu_1} h_0 U\|^2 + \sum_{j=2}^{n_1} \|x_1^{m_1} a_2^{1/2}(x)D_j^{\nu_j} h_0 U\|^2 + \dots). \end{aligned}$$

Методы, изложенные в данной работе, позволяют, кроме того, получить энергетические и априорные оценки в R^n и в том случае, когда в операторе $p(x, D)$ вместо x_1^{2m} используется произвольная функция $F^2(x_1)$, не равная тождественно нулю ни в одном интервале, но для которой нуль может быть как изолированной точкой, так и предельной точкой нулей, а порядок нуля необязательно конечный.

Нам потребуются следующие известные леммы 1, 2, (см. [1], [5]).

Лемма 1. Пусть $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^{m_1}(R^n)$, $b(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^{m_2}(R^n)$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $c(x, D) = a(x, D)\varphi(x)b(x, D)$, $(\varphi(x)a(x, D))^*$ - формально сопряженный оператор к оператору $\varphi(x)a(x, D)$. Тогда $c(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^{m_1+m_2}(R^n)$, $(\varphi(x)a(x, \xi))^* \in S_{\rho, \delta}^{m_1}(R^n)$,

$$c(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=0}^N \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \partial_x^\alpha (\varphi(x)b(x, \xi)) + r_{1,N}(x, \xi),$$

$$(h(x)a(x, \xi))^* = \sum_{|\alpha|=0}^N \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \overline{\varphi(x)a(x, \xi)} + r_{2,N}(x, \xi),$$

порядки операторов $r_{1,N}(x, D)$, $r_{2,N}(x, D)$ стремятся к $-\infty$ при $N \rightarrow +\infty$.

Лемма 2. Если $a(x, \xi)$ принадлежит классам символов $S_\delta^t(R^n)$, $S_{\rho, \delta}^t(R^n)$, то для всякого компакта $K \subset R^n$ существует не зависящая от $U = U(x) \in C_0^\infty(K)$ такая постоянная C_K , что

$$\|a(x, D)U\|_s \leq C_K \|U\|_{t+s}.$$

Теорема 1. Существует, не зависящая от выбора функции $U = U(x) \in C^\infty(R^n)$, такая постоянная C , что верно неравенство

$$\|D_1 h_0 U\|^2 + \|h_0 U\|_{1/(m+1)}^2 \leq C(Re(p(x, D)h_0 U, h_0 U) + \|h_0 U\|^2).$$

Доказательство. Пусть $\mu = (1 + |\xi'|)^{-1/(m+1)}$, $V = V(x) = h_0 U(x)$. Из равенства

$$Re(p(x, D)V, V) = \|D_1 V\|^2 + \sum_{j=2}^n \|x_1^m D_j V\|^2$$

и равенства Парсеваля имеем

$$\|D_1 V\|^2 + \int \int x_1^{2m} |\xi'|^2 |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 d\xi' \leq C_1 Re(p(x, D)V, V). \quad (1.6)$$

Поэтому существуют такая постоянная C_2 , зависящая от C_1 и диаметра носителя функции $\widehat{V}(x_1, \xi')$ по переменной x_1 , что

$$\int \int x_1^{2m} (1 + |\xi'|)^2 |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 d\xi' \leq C_2 (Re(p(x, D)V, V) + \|V\|^2). \quad (1.7)$$

Так как по построению $H \in C_0^\infty(|x_1| \leq 2)$, $H(x_1) = 1$ при $|x_1| \leq 1$, то из формулы Ньютона-Лейбница и неравенства Шварца имеем

$$\begin{aligned} & \int_{|x_1| \leq \mu} \mu^{-2} |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \leq \int_{|x_1| \leq \mu} \mu^{-2} |H(x_1 \mu^{-1}) \widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ &= \int_{|x_1| \leq \mu} \mu^{-2} \left| \int_{-2\mu}^{x_1} \partial_t (H(t \mu^{-1}) \widehat{V}(t, \xi')) dt \right|^2 dx_1 \leq C_3 \int |\partial_t (H(t \mu^{-1}) \widehat{V}(t, \xi'))|^2 dt \\ &\leq C_4 \left(\int_{|x_1| \geq \mu} \mu^{-2} |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + \int |\partial_t \widehat{V}(t, \xi')|^2 dt \right). \end{aligned}$$

Следовательно, из неравенства

$$\int_{|x_1| \geq \mu} \mu^{-2} |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \leq \int x_1^{2m} (1 + |\xi'|)^2 |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1$$

получаем

$$\int \mu^{-2} |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \leq C_5 \left(\int x_1^{2m} (1 + |\xi'|)^2 |\widehat{V}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + \int |\partial_t \widehat{V}(t, \xi')|^2 dt \right).$$

Этим, в силу оценок (1.6), (1.7), завершается доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Существуют константы $C_1 = C_1(s), C_2 = C_2(s), C_3 = C_3(s)$, не зависящие от $U \in C^\infty(R^n)$ и такие, что

$$\|h_0 U\|_{s+2/(m+1)} \leq C_1 (\|h_0 p(x, D)U\|_s + \|h_1 U\|_{s+1/(m+1)}), \quad s \in R, \quad (1.8)$$

$$\|q^{s+2}(D')h_0 U\| \leq C_2 (\|q^s(D')h_0 p(x, D)U\| + \|a(D)h_1 U\|), \quad s \geq 0, \quad (1.9)$$

$$\|\Lambda^{s+2}(D)h_0 U\| \leq C_3 (\|\Lambda^s(D)h_0 p(x, D)U\| + \|\Lambda^{s+1}(D)h_1 U\|), \quad s \geq 0, \quad (1.10)$$

где функции $h_0, h_1, q, \lambda, \Lambda, a$ описаны во введении.

Доказательство. Пусть, либо $\mu(\xi) = \lambda^{s+1/(m+1)}(\xi)$, либо $\mu(\xi) = a(\xi)$.

Из теоремы 1 следует неравенство

$$\begin{aligned} \|\lambda^{1/(m+1)}(D)h_1 \mu(D)h_0 U\|^2 &\leq C_4 (Re(p(x, D)h_1 \mu(D)h_0 U, h_1 \mu(D)h_0 U) \\ &\quad + \|h_1 \mu(D)h_0 U\|^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Так как $h_k(x) = 1$ в окрестности носителя функции $h_{k-1}(x)$, $k = 1, 2$, то

$$\begin{aligned} (p(x, D)h_1 \mu(D)h_0 U, h_1 \mu(D)h_0 U) &= (h_1 \mu(D)h_2 p(x, D)h_0 U, h_1 \mu(D)h_0 U) \\ &\quad + ([h_2 p(x, D), h_1 \mu(D)]h_0 U, h_1 \mu(D)h_0 U) \\ &= (h_1 \mu(D)h_0 p(x, D)U, h_1 \mu(D)h_0 U) \\ &\quad + (h_1 \mu(D)[h_2 p(x, D), h_0]h_1 U, h_1 \mu(D)h_0 U) \\ &\quad + ([h_2 p(x, D), h_1 \mu(D)]h_0 U, h_1 \mu(D)h_0 U). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Заметим, что главные символы операторов

$$[h_1 p(x, D), h_0(x)], \quad [(h_2 p(x, D), h_1 \mu(D)]$$

чисто мнимые. Поэтому, используя лемму 1, нетрудно доказать неравенство

$$\begin{aligned} |Re(h_1 \mu(D)[h_1 p(x, D), h_0(x)]h_1 U, h_1 \mu(D)h_0 U)| \\ + |Re([(h_2 p(x, D), h_1 \mu(D)]h_0 U, h_1 \mu(D)h_0 U)| \leq C_5 \|\mu(D)h_1 U\|^2, \end{aligned}$$

откуда, учитывая (1.12), на основании леммы 1 (о символе сопряженного оператора) и неравенства Шварца имеем

$$\begin{aligned} Re(p(x, D)h_1(x)\mu(D)h_0 U, h_1 \mu(D)h_0 U) \\ \leq C_6 |Re(\lambda^{-1/(m+1)}(D)h_1 \mu(D)h_0 p(x, D)U, \lambda^{1/(m+1)}(D)h_1 \mu(D)h_0 U)| \\ + C_7 \|\mu(D)h_1 U\|^2 \leq (1/2/C_4) |\lambda^{1/(m+1)}(D)h_1 \mu(D)h_0 U\|^2 \\ + C_8 \|\lambda^{-1/(m+1)}(D)h_1 \mu(D)h_0 p(x, D)U\|^2 + C_9 \|\mu(D)h_1 U\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, из (1.11) получается неравенство:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{1/(m+1)}(D)h_1 \mu(D)h_0 U\|^2 \\ \leq C_{10} (\|\lambda^{-1/(m+1)}(D)h_1 \mu(D)h_0 p(x, D)h_1 U\|^2 + \|\mu(D)h_1 U\|^2), \end{aligned}$$

из которого следует

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{1/(m+1)}(D)\mu(D)h_0U\|^2 \\ & \leq C_{11}(\|\lambda^{-1/(m+1)}(D)\mu(D)h_0p(x, D)h_1U\|^2 + \|\mu(D)h_1U\|^2). \end{aligned}$$

Теперь, если положить $\mu(\xi) = \lambda^{s+1/(m+1)}(\xi)$, то придет к оценке (1.8).

Если же $\mu(\xi) = a(\xi)$, то оценка (1.9) вытекает из неравенств

$$\lambda^{1/(m+1)}(\xi)\mu(\xi) \geq C_{12}q^{s+2}(\xi'), \quad \lambda^{-1/(m+1)}(\xi)\mu(\xi) \leq C_{13}q^s(\xi').$$

Этим завершается доказательство теоремы 2 при $m = 0$, так как в этом случае оценка (1.10) совпадает с оценкой (1.8).

Теперь пусть $m > 0$. Положим

$$p_1(x, \xi) = p(x, \xi) + \lambda^{2/(m+1)}(\xi), \quad a_j(x, \xi) = \Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(\xi)p_1^{-1}(x, \xi),$$

где j – целое неотрицательное число. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha p(x, \xi) &= 0 \text{ при } |\alpha| > 2m, \\ |\partial_\xi^\alpha \Lambda(\xi)| &\leq C_\alpha \Lambda^{1-|\alpha|}(\xi), \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_1(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, x} p_1(x, \xi) \lambda^{(|\beta|-|\alpha|)/(m+1)}(\xi), \tag{1.14}$$

постоянные C_α , $C_{\alpha, \beta, x}$ при любых мультииндексах α , β не зависят от $\xi \in R^n$, $C_{\alpha, \beta, x} < \infty$ при $|x| < \infty$. Поэтому из леммы 1 (о символе композиции операторов) имеем

$$\begin{aligned} h_0 \Lambda^{s+2-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) &= h_1 a_j(x, D) h_0 p_1(x, D) \\ &\quad - h_0(x) q_j(x, D) - t_{1,j}(x, D) + r_{1,j}(x, D), \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$h_0 q_j(x, D) = h_1 q_j(x, D) h_0 - t_{2,j}(x, D) + r_{2,j}(x, D) \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned} q_j(x, \xi) &= \sum_{|\alpha|=1}^N (-i)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha a_j(x, \xi) \partial_x^\alpha p_1(x, \xi) / \alpha!, \\ t_{1,j}(x, \xi) &= \sum_{|\alpha|=1}^N (-i)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha a_j(x, \xi) [\partial_x^\alpha, h_0(x)] p_1(x, \xi) / \alpha!, \\ t_{2,j}(x, \xi) &= \sum_{|\alpha|=1}^N (-i)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha q_j(x, \xi) \partial_x^\alpha h_0(x) / \alpha!, \end{aligned}$$

число N выбираем так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\|r_{1,j}(x, D)h_1U\| + \|r_{2,j}(x, D)h_1U\| \leq C_{1,j} \|\Lambda^{s+1}h_1U\|.$$

Следовательно, из равенств (1.15)-(1.16) получаем

$$\begin{aligned} & \|h_0 \Lambda^{s+2-j} \lambda^{j/(m+1)}(D)h_1U\| \\ & \leq C_{14}(\|h_1(x)a_j(x, D)h_0p_1(x, D)h_1U\| + \|h_1(x)q_j(x, D)h_0U\| \\ & \quad + \|t_{1,j}(x, D)h_1U\| + \|t_{2,j}(x, D)h_1U\| + \|\Lambda^{s+1}h_1U\|). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Используя неравенства (1.13)-(1.14), простой проверкой убеждаемся в том, что символы

$$\begin{aligned} & a_j(x, \xi) \Lambda^{-s+j}(\xi) \lambda^{-j/(m+1)}(\xi), q_j(x, \xi) \Lambda^{-s-1+j}(\xi) \lambda^{-(j+1)(m+1)}(\xi), \\ & t_{1,j}(x, \xi) \Lambda^{-s-1+j}(\xi) \lambda^{-j/(m+1)}(\xi), t_{2,j}(x, \xi) \Lambda^{-s-1+j}(\xi) \lambda^{-j/(m+1)}(\xi) \end{aligned}$$

принадлежат классу $S_{1/(m+1)}^0(R^n)$.

Поэтому на основании лемм 1, 2, определения функции $p_1(x, \xi)$ получаем из оценки (1.17) неравенства:

$$\begin{aligned} \|h_0 \Lambda^{s+2-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_1 U\| &\leq C_{15} (\|\Lambda^{s-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_0 p(x, D) U\| \\ &\quad + \|\Lambda^{s-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_0 \lambda^{2/(m+1)}(D) h_1 U\| \\ &\quad + \|\Lambda^{s+1-j} \lambda^{(j+1)(m+1)}(D) h_0 U\| + \|\Lambda^{s+1} h_1 U\|), \\ &\quad \|\Lambda^{s+2-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_0 U\| \\ &\leq C_{16} (\|h_0 \Lambda^{s+2-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_1 U\| + \|\Lambda^{s+1} h_1 U\|), \\ &\quad \|\Lambda^{s-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_0 \lambda^{2/(m+1)}(D) h_1 U\| \\ &\leq C_{17} (\|\Lambda^{s-j} \lambda^{(j+2)/(m+1)}(D) h_0 U\| + \|\Lambda^{s+1} h_1 U\|), \end{aligned}$$

из которых следует

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{s+2-j} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_0 U\| &\leq C_{18} (\|\Lambda^s(D) h_0 p(x, D) U\| \\ &\quad + \|\Lambda^{s+2-(j+1)} \lambda^{(j+1)/(m+1)}(D) h_0 U\| + \|\Lambda^{s+1} h_1 U\|). \end{aligned}$$

Повторяя эту оценку для $j = 0, \dots, [s] + 2$, получим

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{s+2} \lambda^{j/(m+1)}(D) h_0 U\| &\leq C_{19} (\|\Lambda^s(D) h_0 p(x, D) U\| \\ &\quad + \|\lambda^{(s+2)/(m+1)}(D) h_0 U\| + \|\Lambda^{s+1} h_1 U\|). \end{aligned}$$

Из этой оценки в силу (1.8) следует окончание доказательства теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. // - М.: Наука, 1984. - 360 с.;
- Радкевич Е.В. Гипоэллиптические операторы с кратными характеристиками // Мат. сб. - 1969. - Т.79. - С.193-216.;
- Смолкин Г.А. Априорные оценки, связанные с дифференциальными операторами типа Купцова - Хермандера. Дифференциальные уравнения. 2004. Т.40. N 2. С. 242-250.;
- Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения // Псевдодифференциальные операторы. - М.: Мир, 1967. - С.297-367.;
- Хермандер Л. Гипоэллиптические дифференциальные операторы второго порядка // Периодический сб. пер. иностранных ст.-1968. - Т.12. - №2.: Математика. - С.88 - 109.;

A priori estimates for degenerate elliptic operators in generalized Sobolev spaces

© G.A. Smolkin²

Abstract. In this paper we find a priori estimates in Sobolev spaces for second order differential operators with nonnegative characteristic form of a special form. The possible generalizations.

Key Words: Sobolev spaces, a priori estimates, the theory pseudodifferential operators, left perametriks.

²Associate Professor of Differential Equations Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; gsmolkin@mail.ru.

УДК 517.9

Теоретико-графовый метод определения ключевых веществ в сложных химических реакциях

© С.И. Спивак¹, А.С. Исмагилова², И.А. Хамитова³

Аннотация. В настоящей работе решается задача выделения базиса ключевых веществ на основе анализа соответствующих графов химических реакций, выражение концентраций всех веществ через концентрации ключевых. Для анализа используются специальные графы, введенные по аналогии с введенными А.И. Вольпертом графами механизмов сложных химических реакций. Основным результатом настоящей работы является теорема.

Ключевые слова: Механизм сложной химической реакции, обратные задачи, ключевые вещества

При построении кинетических моделей сложных реакций важное значение имеет понятие ключевого вещества [1]. Сложность реакций понимается не только в смысле большого количества веществ, участвующих в реакции. Сложность проистекает из того, что все вещества делятся на две группы — измеряемые и неизмеряемые. К неизмеряемым обычно относятся промежуточные вещества, к измеряемым — исходные вещества и продукты реакции.

Под ключевыми веществами понимают такие, что концентрации всех веществ линейно выражаются через базис ключевых веществ. Основным свойством системы дифференциальных уравнений химической кинетики является факт существования линейных независимых законов сохранения в числе не меньшем, чем число химических элементов, из которых состоят вещества, участвующие в реакции.

Использование информации о ключевых веществах имеет решающее значение при решении обратных задач идентификации механизмов сложных химических реакций. Основная проблема при решении таких задач — недостаточность измерений [2]-[3]. Гипотетические схемы о механизмах реакций включают большое количество веществ и реакций между ними. Математические описания — системы дифференциальных уравнений, число неизвестных которых равно числу участвующих в реакции веществ. В то же время непосредственному измерению доступна только часть из этих веществ. Возникает обратная задача определения параметров системы дифференциальных уравнений (константы скоростей химических реакций), воспроизводящих часть ее решений. Следствием недостаточности информации может стать неединственность решения обратной задачи.

В [4] сформулирован критерий единственности решения обратной задачи химической кинетики. Условием единственности решения становится возможность экспериментального измерения любого базиса ключевых веществ, участников реакции. Использование всех законов сохранения может позволить исключить некоторые концентрации неизмеряемых промежуточных веществ. Для исключения всех концентраций неизмеряемых веществ, приведения кинетической модели к системе дифференциальных уравнений относительно только измеряемых веществ, необходимо измерение хотя бы части промежуточных участников реакции. Отсюда следуют возможности специального планирования измерений с целью однозначного решения обратной задачи.

¹Заведующий кафедрой математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; S.Spivak@bashnet.ru.

²Доцент кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Нефтекамск; ismagilovaas@rambler.ru.

³Стар. преп. кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Нефтекамск; gabd.irina@mail.ru.

Цель настоящей работы — выделение базиса ключевых веществ на основе анализа соответствующих графов химических реакций, выражение концентраций всех веществ через концентрации ключевых.

Для анализа будут использованы специальные графы, введенные по аналогии с введенными А.И. Вольпертом [5] графами механизмов сложных химических реакций. Эти графы использованы нами при решении задачи определения маршрутов сложных реакций [6].

В настоящей работе рассматриваются также двудольные графы. Отличие от графов Вольперта состоит в том, что множества вершин представляют собой множество всех участвующих в реакции веществ и множество атомов, из которых эти вещества состоят.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. Существует преобразование, переводящее исходный граф в граф, часть вершин которого не имеет исходящих дуг. Указанные вершины достижимы из базиса ключевых веществ.

Из приведенной теоремы следует алгоритм нахождения ключевых веществ на основе упрощенного двудольного графа, т.е. двух конечных непересекающихся множеств (вершины-вещества и вершины-атомы) и некоторого множества ориентированных ребер:

1. преобразование двудольного графа. Под преобразованием двудольного графа понимаются: удаление и образование дуг, сложение и умножение веса дуг.
2. выбор ключевых веществ. При анализе графа выбираются независимые вещества из числа вершин, не имеющих смежных в одной и той же доле графа, и смежных с вершинами-атомами с наименьшим количеством исходящих дуг. Остальные будут образовывать базис ключевых веществ.

Алгоритм применен для нахождения ключевых веществ в реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции кислорода и сероводорода. Соответствующие данному механизму стадии химического превращения имеют вид:

1. $O_2 + 2K \rightarrow 2KO$
2. $H_2S + K \rightarrow KH_2S$
3. $O_2 + 2KH_2S \rightarrow 2H_2O + K + KS_2$
4. $H_2S + KO \rightarrow H_2O + KS$
5. $KO + KH_2S \rightarrow H_2O + KS + K$
6. $2KS \rightarrow K + KS_2$
7. $KS_2 \rightarrow S_2 + K$

На рис. 1.3 представлен двудольный граф закона сохранения концентрации веществ.

Через $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9] = [O_2, H_2S, H_2O, S_2, K, KO, KH_2S, KS_2, KS]$ обозначены вещества, участвующие в реакции, через $[c_1, c_2, c_3, c_4] = [O, H, K, S]$ — атомы, из которых состоят вещества. Дугам присвоен вес, равный количеству атомов, входящих в то или иное вещество.

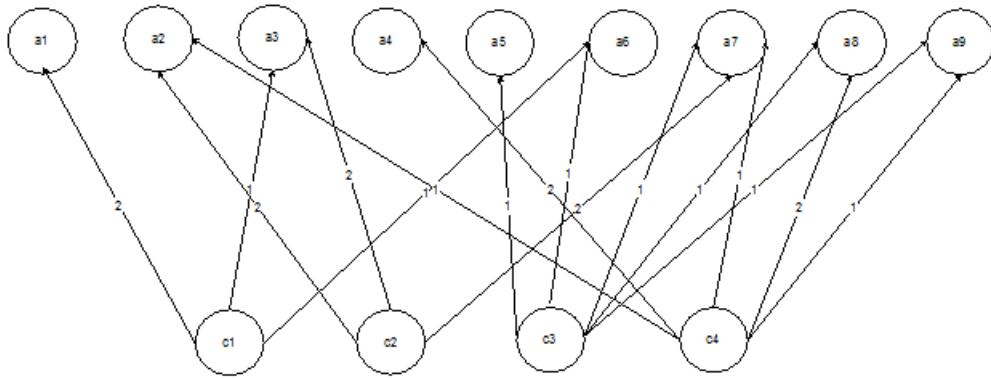


Рисунок 1.3

Двудольный граф закона сохранения концентрации веществ.

Рассмотрим вершины с наименьшим количеством исходящих дуг. Это вершины c_1 и c_2 . Поскольку они имеют одинаковое количество инцидентных дуг, то порядок работы с этими вершинами не важен. Итак, вершина c_1 имеет три смежные вершины. Выберем в качестве независимой вершину a_1 , а оставшиеся – (a_3, a_6) – назовем ключевыми. Удалим ребра (c_1, a_3) и (c_1, a_6) . Образуем новые: (a_1, a_3) и (a_1, a_6) . Присвоим им веса соответствующих удаленных дуг с противоположным знаком. Аналогично проводим анализ смежных с C_2 вершин: a_2 – независимая вершина, a_7 – ключевая. Результатом преобразований является граф, представленный на рис. 1.4.

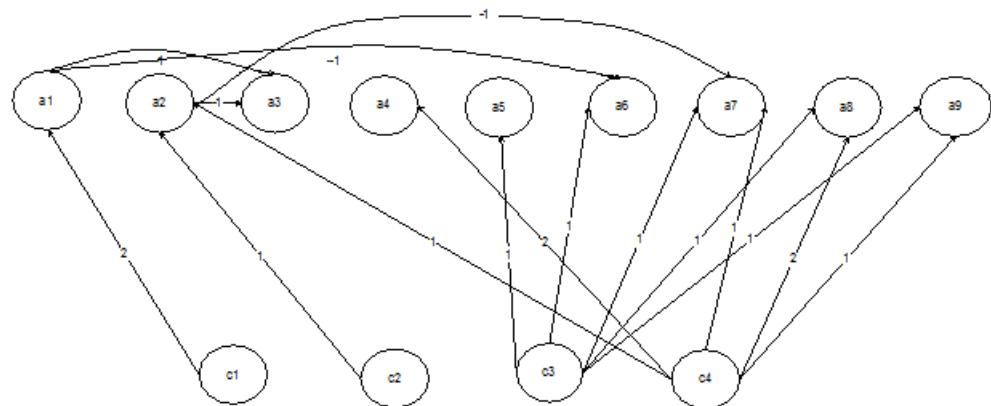


Рисунок 1.4

Определение ключевых веществ a_3, a_6 и a_7 .

Рассмотрим оставшиеся вершины c_3 и c_4 . Произведем с ними аналогичные действия, выбрав в качестве независимых a_a и a_5 . Вершины a_a и a_9 будут ключевыми.

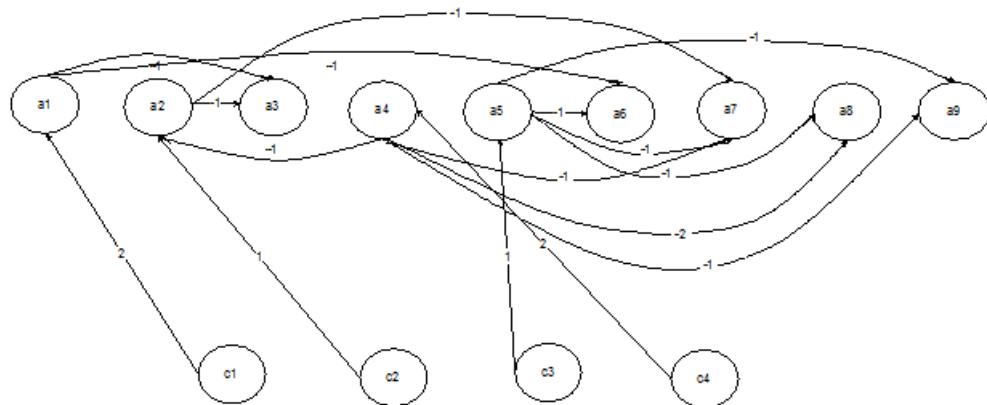


Рисунок 1.5

Определение ключевых веществ a_8, a_9 .

Согласно графу, соответствующему рис. 1.5, вершина a_4 смежна с вершиной a_2 . Это означает, что независимое вещество выражается через независимое, чего быть не должно. Избавимся от дуги (a_4, a_2) . Для этого выявим все маршруты, имеющие начало в a_4 и конец в a_7 . Таковых два. Перемножим вес дуги (a_4, a_2) и (a_2, a_7) . К полученному произведению прибавим вес дуги (a_4, a_7) , непосредственно соединяющей начальную и конечную вершину рассматриваемого маршрута. В итоге получим новый вес дуги (a_4, a_7) , который в данном случае равен нулю. Это означает, что дуга (a_4, a_7) будет отсутствовать в преобразованном графе. Кроме этого, так как a_2 смежна с c_2 , вместо удаленной дуги (a_4, a_2) образуется новая (a_4, c_2) с сохранением веса.

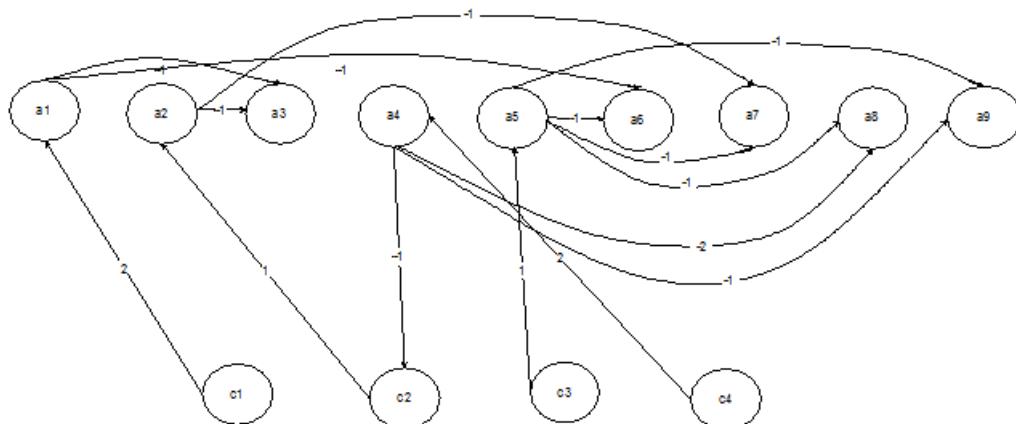


Рисунок 1.6

Граф связи между ключевыми и независимыми веществами.

На рис. 1.6 представлен преобразованный график. Согласно ему, в качестве независимых веществ можно выбрать O_2, H_2S, S_2, K , а в качестве ключевых – $H_2O, KO, KH_2S, KS_2, KS$. Исходя из этого, существует всего пять независимых реакций и четыре уравнения, выражающие независимые вещества через ключевые.

Таким образом, выражение всех веществ через базис ключевых для рассматриваемого примера имеет вид:

$$\begin{aligned}
 2a_1 &= c_1 - a_3 - a_6, \\
 a_2 &= c_2 - a_3 - a_7, \\
 a_5 &= c_3 - a_6 - a_7 - a_8 - a_9, \\
 2a_4 &= c_4 - c_2 - 2a_8 - a_9,
 \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горский В.Г. Планирование кинетических экспериментов. М: Наука, 1984, 241 с.
2. Спивак С.И., Горский В.Г. Неединственность решения задачи восстановления кинетических констант. ДАН, 1981, т.257, №2, с.412-415;
3. Спивак С.И., Исмагилова А.С. Метод анализа информативности кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики. Журнал Средневолжского математического общества, 2010, т.12, №4, с.51-58;
4. Спивак С.И., Горский В.Г. О полноте доступных кинетических измерений при определении констант скоростей сложной химической реакции. Химическая физика, 1982, т.1, №2, с.237-243;
5. Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 394 с.
6. С. И. Спивак, А. С. Исмагилова, И. А. Хамитова // ДАН. 2010. Т. 434. № 4. С. 499–501.

Mathematical model nothisothermal Fluctuations in oxidation reaction carbonmonooxide

© S.I. Spivak⁴, A.S. Ismagilova⁵, I.A. Khamitova⁶

Abstract. In this paper we solve the problem of extracting the basis of key substances, based on analysis of relevant graphs of chemical reactions, the expression of concentrations of substances through the concentration of key. For analysis using special graphs, introduced by analogy with the introduced A. Vol'pert graphs mechanisms of complex chemical reactions. Our main result is Theorem.

Key Words: The mechanism of complex chemical reaction, inverse problems, the key substance.

⁴Managing chair of the mathematical modelling, GOU VPO "the Bashkir state university Ufa; S.Spivak@bashnet.ru.

⁵Docent of chair of the mathematical modelling, Neftekamsk branch GOU VPO "Bashkir The state university Neftekamsk; ismagilovaas@rambler.ru.

⁶The senior teacher of chair of the mathematical modelling, Neftekamsk branch GOU VPO "Bashkir The state university Neftekamsk; gabd.irina@mail.ru.

УДК 519.862.7

Численное моделирование динамики потока научных и научно-педагогических кадров на основе статистических данных по МГУ им. Н.П.Огарева

© П. А. Шаманаев¹, В.А. Атряхин²

Аннотация. В работе описывается процесс численного моделирования динамики потока научных и научно-педагогических кадров. В качестве математической модели используется система одновременных эконометрических уравнений. Для устранения мультиколлинеарности используется метод последовательного присоединения регрессоров. Для отыскания оценок неизвестных параметров системы используется двухшаговый метод наименьших квадратов.

Ключевые слова: система одновременных эконометрических уравнений, двухшаговый метод наименьших квадратов, матрица корреляции, устранение мультиколлинеарности, метод последовательного присоединения регрессоров.

1. Введение

Воспроизводство научных и научно-педагогических кадров по приоритетным отраслям развития науки, техники и технологий является одной из актуальных задач системы высшего профессионального образования. В связи с этим появляется необходимость в разработке и апробации моделей и методик среднесрочного и долгосрочного прогнозирования потока кадров высшей квалификации для воспроизводства научно-педагогического потенциала высшей школы в субъектах Российской Федерации, и, в частности, в Приволжском федеральном округе.

В работе для исследования задачи прогнозирования динамики потока научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации применяется математическая модель в виде одновременных эконометрических уравнений [1].

2. Постановка задачи

Обозначим через $x_j(k)$ - число выпускников высшего профессионального образования в k -ом году по j -ой укрупненной группе специальностей высшего профессионального образования, $j = \overline{1, m}$. Обозначим через $y_i(k)$ - число поступивших в аспирантуру в k -ом году по i -ой укрупненной группе специальностей высшей научной классификации, $i = \overline{1, n}$. В качестве математической модели, прогнозирующей поток научных и научно-педагогических кадров, возьмем систему эконометрических одновременных уравнений вида [2]:

$$y(k) = By(k) + Ax(k) + \varepsilon, \quad (2.1)$$

где $y(k) = column(y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k))$, $x(k) \equiv column(x_0(k), x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k))$, $x_0(k) = 1$, $k = 1, 2, \dots$; $B \equiv [b_{ij}]$ - постоянная $(n \times n)$ - матрица с нулевыми диагональными

¹Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

²Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; atrvol@rambler.ru.

элементами; $A \equiv [a_{ij}]$ - постоянная ($n \times (m+1)$) - матрица; $\varepsilon = column(\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(n))$ - вектор случайных возмущений. Предположим, что ε имеет многомерное нормальное распределение с математическим ожиданием равным нулю и матрицей ковариации $\Omega = \sigma^2 E_n$, E_n - единичная матрица размерности n .

Ставится задача нахождения статистических оценок неизвестных элементов матриц A и B . Так как система уравнений (2.1) представляет собой сверхидентифицированную систему эконометрических взаимосвязанных уравнений, то для нахождения оценок неизвестных параметров применяется двухшаговый метод наименьших квадратов [3], [4].

Входными данными для проведения вычислений является следующая статистическая информация:

1. Статистическая информация по количеству выпускников поступивших в аспирантуру в разрезе укрупненных групп специальностей высшей научной классификации [5].
2. Статистическая информация по количеству выпускников в разрезе укрупненных групп специальностей высшего профессионального образования [6].
3. Таблица соответствия укрупнённых групп специальностей высшего профессионального образования укрупнённым группам специальностей высшей научной классификации. Она состоит из 28 столбцов (по числу укрупнённых групп специальностей высшего профессионального образования) и 18 строк (по числу укрупнённых групп специальностей высшей научной классификации). На пересечении каждого столбца и каждой строки либо «0», либо «1». Данные значения проставляются на основании анализа статистической информации за годы, предшествующие прогнозируемому периоду. Если в течение этих лет были студенты, окончившие высшее учебное заведение по специальности, относящейся к i -ой укрупнённой группе специальностей высшего профессионального образования, и поступившие в аспирантуру по специальности, относящейся j -ой укрупнённой группе специальностей высшей научной классификации, то на пересечении i -того столбца и j -ой строки будет стоять «1». В противном случае - «0».
4. Таблица соответствия укрупнённых групп специальностей высшей научной классификации укрупнённым группам специальностей высшей научной классификации. Она состоит из 18 строк и 18 столбцов (по числу укрупнённых групп специальностей высшей научной классификации). На пересечении каждого столбца и каждой строки либо «1», либо «0». Данные значения проставляются на основании экспертных оценок и анализа статистических данных за годы, предшествующие прогнозируемому периоду. Если студенты какой-либо специальности высшего профессионального образования за эти годы поступали в аспирантуру на специальности, относящиеся к i -ой и к j -ой укрупнённой группе специальностей высшей научной классификации, то на пересечении i -того столбца и j -ой строки будет стоять «1».

3. Апробация математической модели на основании статистических данных по МГУ им. Н. П. Огарёва

Согласно статистическим данным, представленным учебно-методическим управлением МГУ им. Н. П. Огарёва, на сегодняшний день обучение в ВУЗе ведется по 18 укрупненным группам специальностей высшего профессионального образования и по 17 укрупнен-

ным группам специальностей высшей научной классификации. Как следствие, выбранная математическая модель (2.1) характеризуется большим числом экзогенных переменных. Следствием этого стало появление мультиколлинеарности. Для устранения мультиколлинеарности использовался метод последовательного присоединения регрессоров [3].

Проиллюстрируем использование метода последовательного присоединения регрессоров на примере второго этапа построения прогноза двухшаговым методом наименьших квадратов по первой укрупненной группе специальностей высшей научной классификации «01.00.00 Физико-математические науки».

На основании матриц соответствия выделяем экзогенные переменные, от которых зависит исследуемый фактор. Статистическая информация, необходимая для расчетов, представлена на рисунке 3.1.

	Физико-математические науки	Химические науки	Биологические науки	Технические науки	Экономические науки	Педагогические науки	Науки о Земле	Физико-математические науки	Электронная техника радиотехника и связь	Информатика и вычислительная техника
Годы	y1	y2	y3	y4	y7	y11	y18	x1	x21	x23
2005	8	1	3	34	9	2	3	148	227	34
2006	7	1	3	30	16	1	3	181	272	41
2007	7	1	3	22	10	3	4	180	195	34
2008	13	1	5	22	23	1	3	164	212	57
2009	21	5	8	26	23	0	7	127	162	47

Рисунок 3.1

Численность выпускников в разрезе УГС ВПО (x_1, x_{21}, x_{23}) и аспирантов в разрезе УГС ВНК ($y_1, y_2, y_3, y_4, y_7, y_{11}, y_{18}$)

Первый регрессор выбирается на основе корреляционной матрицы. Корреляционная матрица представлена на рисунке 3.2.

	y1	y2	y3	y4	y7	y11	y18	x1	x21	x23
y	1,00									
y2	0,32	1,00								
y3	0,91	0,44	1,00							
y4	0,32	1,00	0,45	1,00						
y7	0,79	0,16	0,85	0,16	1,00					
y11	0,31	0,77	0,49	0,79	0,00	1,00				
y18	0,66	0,22	0,76	0,24	0,39	0,68	1,00			
x1	0,86	0,52	0,79	0,53	0,42	0,69	0,82	1,00		
x21	0,77	0,69	0,67	0,68	0,63	0,30	0,19	0,64	1,00	
x23	0,62	0,44	0,57	0,44	0,80	0,38	0,35	0,21	0,19	1,00

Рисунок 3.2
Корреляционная матрица

Наибольшую корреляцию эндогенная переменная y_1 имеет с переменной y_3 . Следовательно в модель необходимо включить регрессор y_3 . Для выбора второго регрессора рассмотрим следующий набор моделей:

$$y_1 = a_{10} + b_{13}y_3 + c_{1i}z_i + \nu, \quad (3.1)$$

где $i \in \{1, 2, 4, 7, 11, 18, 21, 23\}$. Если $i \in \{2, 4, 7, 11, 18\}$, то $c_{1i} = b_{1i}$ и $z_i = y_i$. Если $i \in \{1, 21, 23\}$, то $c_{1i} = a_{1i}$ и $z_i = x_i$.

Для каждой из моделей вида (3.1) рассчитывается коэффициент детерминации R^2 . Результаты вычислений приведены на рисунке 3.3.

	y_3, y_2	y_3, y_4	y_3, y_7	y_3, y_{11}	y_3, y_{18}	y_3, x_1	y_3, x_{21}	y_3, x_{23}
R^2	0,9785	0,9783	0,9794	0,9820	0,9807	0,9824	0,9885	0,9799

Рисунок 3.3

Коэффициенты детерминации для соответствующих моделей вида (3.1)

Наибольший коэффициент детерминации получился в модели:

$$y_1 = a_{10} + b_{13}y_3 + a_{1,21}x_{21} + \nu, \quad (3.2)$$

Для выбора третьего регрессора рассмотрим следующий набор моделей:

$$y_1 = a_{10} + b_{13}y_3 + a_{1,21}x_{21} + c_{1i}z_i + \nu, \quad (3.3)$$

где $i \in \{1, 2, 4, 7, 11, 18, 23\}$. Если $i \in \{2, 4, 7, 11, 18\}$, то $c_{1i} = b_{1i}$ и $z_i = y_i$. Если $i \in \{1, 23\}$, то $c_{1i} = a_{1i}$ и $z_i = x_i$.

Для каждой из моделей вида (3.3) рассчитывается коэффициент детерминации R^2 . Результаты вычислений приведены на рисунке 3.4.

	y_3, x_{21}, y_2	y_3, x_{21}, y_4	y_3, x_{21}, y_7	y_3, x_{21}, y_{11}	y_3, x_{21}, y_{18}	y_3, x_{21}, x_1	y_3, x_{21}, x_{23}
R^2	0,9965	0,9885	0,9888	0,9917	0,9891	0,9900	0,9940

Рисунок 3.4

Коэффициенты детерминации для соответствующих моделей вида (3.3)

Наибольший коэффициент детерминации получился в модели:

$$y_1 = a_{10} + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{1,21}x_{21} + \nu, \quad (3.4)$$

Берем её за основу и продолжаем присоединение регрессоров. Для выбора четвертого регрессора рассмотрим следующий набор моделей:

$$y_1 = a_{10} + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{1,21}x_{21} + c_{1i}z_i + \nu, \quad (3.5)$$

где $i \in \{1, 4, 7, 11, 18, 23\}$. Если $i \in \{4, 7, 11, 18\}$, то $c_{1i} = b_{1i}$ и $z_i = y_i$. Если $i \in \{1, 23\}$, то $c_{1i} = a_{1i}$ и $z_i = x_i$.

Для каждой из моделей вида (3.5) рассчитывается коэффициент детерминации R^2 . Результаты вычислений приведены на рисунке 3.5.

	y_2, y_3, x_{21}, y_4	y_2, y_3, x_{21}, y_7	y_2, y_3, x_{21}, y_{11}	y_2, y_3, x_{21}, y_{18}	y_2, y_3, x_{21}, x_1	y_2, y_3, x_{21}, x_{23}
R^2	0,9964	0,9993	0,9929	0,9990	0,9999	0,9986

Рисунок 3.5

Коэффициенты детерминации для соответствующих моделей вида (3.5)

Наибольший коэффициент детерминации получился в модели:

$$y_1 = a_{10} + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{1,21}x_{21} + \nu, \quad (3.6)$$

Присоединение регрессоров продолжается до тех пор, пока наибольший коэффициент детерминации на очередном шаге не окажется меньше, чем коэффициент детерминации у выбранной на предыдущем шаге модели, или пока количество регрессоров не достигнет количества лет, за которые доступна статистическая информация.

Для построения прогноза по первой укрупненной группе специальностей высшей научной классификации «01.00.00 Физико-математические науки» итоговый набор регрессоров представлен на рисунке 3.6.

	Химические науки	Биологические науки	Физико-математические науки	Электронная техника и радиотехника и связь
Годы	Y2	Y3	X1	X21
2005	1,800	3,047	148	227
2006	1,000	3,387	181	272
2007	2,600	2,775	180	195
2008	0,200	4,742	164	212
2009	3,400	8,049	127	162

Рисунок 3.6

Итоговый набор регрессоров

После применения второго шага ДМНК к уравнению (3.6) получены следующие оценки неизвестных параметров, входящих в это уравнение:

$$\hat{b}_{12} = -0,67, \quad \hat{b}_{13} = 2,29, \quad \hat{a}_{10} = 13,42, \quad \hat{a}_{11} = -0,03, \quad \hat{a}_{1,21} = -0,03. \quad (3.7)$$

Эти оценки берутся в качестве значений соответствующих элементов первых строк матриц B и A . Остальные элементы первых строк матриц B и A полагаем равными нулю.

Согласно предложенной модели прогнозируемое значение на 2010 год $y_1 = 27$. Динамика численности поступающих в аспирантуру по укрупненной группе специальностей высшей научной классификации «01.00.00 Физико-математические науки» с 2005 по 2010 год приведена на рисунке 3.7.

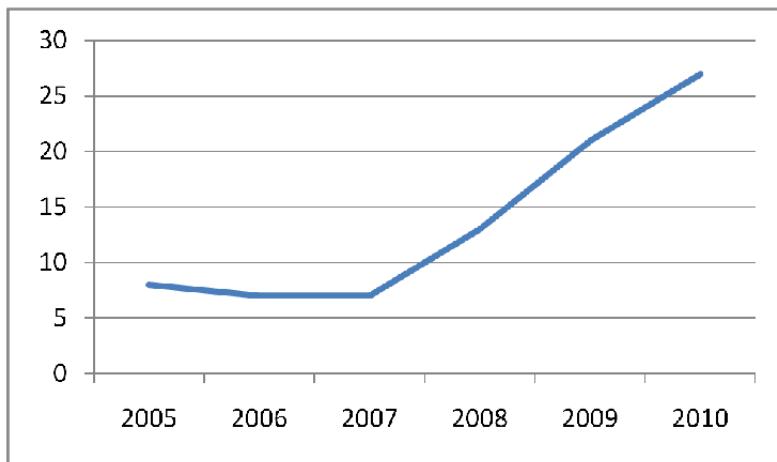


Рисунок 3.7

Динамика численности поступающих в аспирантуру по УГС ВНК «01.00.00 Физико-математические науки»

Для каждого уравнения системы (2.1) оценки неизвестных параметров находятся аналогичным образом.

4. Проверка адекватности предложенной модели

Приведем анализ результатов для укрупненной группы специальностей высшей научной классификации «01.00.00 Физико-математические науки».

Проверка адекватности построенной регрессионной модели сводится к проверке гипотезы о значимости множественного коэффициента детерминации с помощью F-критерия Фишера. Коэффициент детерминации для регрессионной модели (3.6) примет максимальное значение равное 0,9999. Расчеты показывают, что при уровне значимости $\alpha = 0,05$ уравнение множественной регрессии (3.6) значимо.

Гипотеза о значимости частных коэффициентов корреляции проверялась с помощью t-критерия Стьюдента. Расчеты показывают, что с вероятностью 0,95 основную гипотезу о незначимости частного коэффициента корреляции можно отклонить.

Остатки регрессионной модели для укрупненной группы специальностей высшей научной классификации «01.00.00 Физико-математические науки» приведены на рисунке 4.1.

e1	e2	e3	e4	e5
-0,000000794	0,000000819	0,000000066	-0,000000378	0,000000153

Рисунок 4.1
Остатки регрессионной модели

Согласно критерию Дарбина-Уотсона автокорреляция остатков регрессионной модели отсутствует.

На основании корреляционной матрицы, построенной по исходным статистическим данным и остаткам регрессионной модели, можно сделать вывод о том, что корреляция между факторами и остатками e_i отсутствует.

Работа выполнена при поддержке аналитической ведущей целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2010-2011 года)»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haavelmo T. The statistical implications of a system of simultaneous equations // *Econometrica* 1943a. Vol. 11. N 1, pp. 1-12.
2. Шаманаев П.А., Атряхин В.А. Построение математической модели прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров - Саранск: Журнал Средневолжского математического общества, Том 12, №4, с. 234-238.
3. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 1998. - 1022 с.
4. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. - М.: Дело, 2004. - 576 с.
5. Общероссийский классификатор специальностей по образованию ОК 009-2003. Постановление Госстандарта России от 30.09.2003. № 276-ст. № ОК 009-2003.
6. Номенклатура специальностей научных работников [Электронный ресурс]// Приложение к Приказу Минобрнауки РФ от 25.02.2009 № 59 «Об утверждении номенклатуры специальностей научных работников» (в ред. Приказа Минобрнауки РФ от 11.08.2009 № 294). Режим доступа: - http://vak.ed.gov.ru/common/img/uploaded/files/vak/norm_doc/2010/Prilozhenie_k_prikazu_N59_ot_25.02.2009.doc

Numerical simulation of flow dynamics scientific and teaching staff on the basis of statistical Data on Mordovian State University after N. P. Ogarev

© P.A. Shamanaev³, V.A. Atryahin⁴

Abstract. The paper describes the process of numerical simulation of flow dynamics of scientific and pedagogical staff. As a mathematical model uses a system of simultaneous econometric equations. To eliminate multicollinearity using the method of sequential addition of covariates. To find the estimates of unknown parameters the system uses a two-step method of least squares.

Key Words: system of simultaneous econometric equations, two-stage least squares method, correlation matrix, the elimination of multicollinearity, the method of sequential addition of covariates.

³Chief of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.

⁴Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; atrvol@rambler.ru.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.937

Инвариантные меры одного класса квазиэндоморфизмов пространства Лебега

© В. Г. Шарапов¹

Аннотация. В статье изучается построение инвариантной меры для одного класса квазиэндоморфизмов, задаваемых непрерывными нигде не дифференцируемыми отображениями. Рассматривается случай, когда инвариантная мера сосредотачивается на части пространства первоначальной меры меньше единицы.

Ключевые слова: Инвариантные меры; непрерывные нигде не дифференцируемые функции; квазиэндоморфизмы.

1. Введение

Пусть (M, F, ρ) – пространство Лебега, т.е. пространство, изоморфное отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега. Квазиэндоморфизмом называется измеримое несингулярное (прообраз множества меры 0 имеет меру 0) преобразование пространства M . Измеримое разбиение ξ пространства M есть разбиение на прообразы точек для некоторого измеримого преобразования пространства M , не сохраняющее меру.

2. Постановка задачи

Пусть $M = [0, 1]$, T – действительная функция, определённая на $[0, 1]$ и удовлетворяющая условиям: 1. $T(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} T(x) = 1$. 2. T непрерывна и нигде не дифференцируема. 3. T не сохраняет меру. Построение таких функций, сохраняющих меру, описано в [1]. В данной статье приведён пример построения такого квазиэндоморфизма, который не сохраняет меру, а инвариантная мера сосредоточена на отрезке $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

3. Приведение квазиэндоморфизмов данного класса к инвариантной мере

Построим квазиэндоморфизм, т.е. измеримое отображение, не сохраняющее меру, пространства M . При этом будем использовать технику из [1]. Разобьём заштрихованную часть рис. 1 на квадраты первого порядка и занумеруем их так, чтобы A_i^1 и A_{i+1}^1 для любого i имели общую сторону или вершину. Для $i = \overline{1, 4}$ определим $T^{-1}A_i^1 = \{(x, y) : \frac{i-1}{12} \leq x < \frac{i}{12}, 0 \leq y < 1\}$.

¹доцент, Волгоградский государственный университет, г. Волгоград; vsharapov99@mail.ru

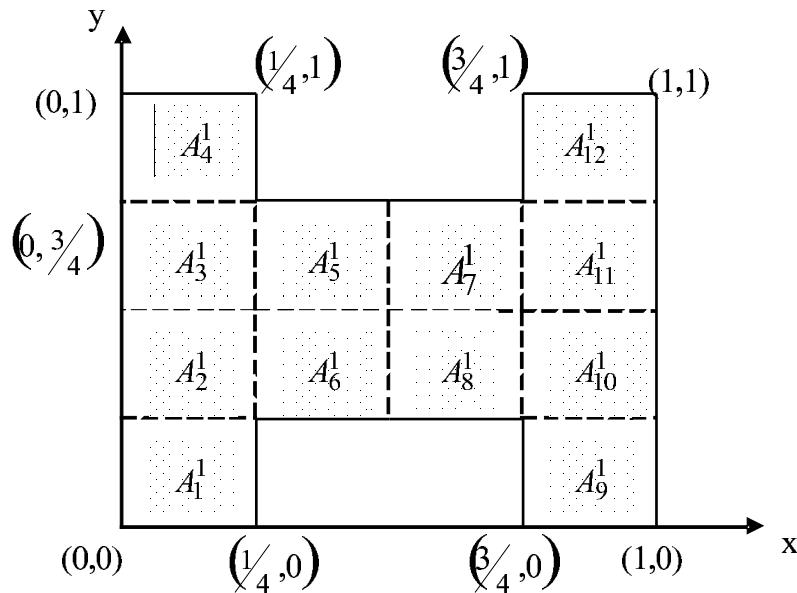


Рис. 1

Для $i = \overline{5, 12}$ положим

$$T^{-1}A_5^1 = \{(x, y) : \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{8}, \frac{1}{4} \leq y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_6^1 = \{(x, y) : \frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_7^1 = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{8}, \frac{1}{4} \leq y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_8^1 = \{\left(x, y\right) : \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \leq y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_9^1 = \{(x, y) : \frac{3}{4} \leq x < \frac{13}{16}, 0 \leq y < 1\},$$

$$T^{-1}A_{10}^1 = \{(x, y) : \frac{13}{16} \leq x < \frac{7}{8}, 0 \leq y < 1\},$$

$$T^{-1}A_{11}^1 = \{(x, y) : \frac{7}{8} \leq x < \frac{15}{16}, 0 \leq y < 1\},$$

$$T^{-1}A_{12}^1 = \{(x, y) : \frac{15}{16} \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}.$$

Каждый квадрат первого порядка разбиваем горизонтальной и вертикальной прямыми на четыре квадрата второго порядка. Перенумеруем квадраты второго порядка так, чтобы выполнялись условия: 1) сначала нумеруем квадраты, входящие в A_1^1 , потом в A_2^1 и т.д., т.е. согласовано с упорядочением квадратов первого порядка; 2) все квадраты A_i^2 второго порядка занумерованы так, что для любого $i = \overline{1, 47}$ квадраты A_i^2 и A_{i+1}^2 имеют или общую сторону или общую вершину. Прообраз каждого квадрата A_i^1 разбивается вертикальными отрезками на четыре равновеликих прямоугольника, каждый из которых является прообразом одного из четырёх квадратов второго порядка, входящих в A_i^1 , перенумерованных так, что из каждого двух прообразов левее тот, который имеет меньший

номер. Далее аналогично по индукции строим квадраты n -го порядка с выполнением условий 1) и 2) для $n = \overline{3, \infty}$. Теперь возьмём любую точку (x, y) , входящую в заштрихованную область рис. 1. Для неё существует последовательность $\{A_{i_n}^n\}$ квадратов, сходящаяся к точке (x, y) . Соответствующая последовательность $\{T^{-1}A_{i_n}^n\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к вертикальному отрезку, являющемуся прообразом точки (x, y) . Для $i = \overline{1, 4}$ определим непрерывное взаимно однозначное сохраняющее меру отображение U квадрата A_i^1 в интервал $[\frac{i-1}{16}, \frac{i}{16})$ для прообразов x отображения T и отображение V в интервал $[\frac{16-i}{16}, \frac{16-(i-1)}{16})$ для образов y отображения T . Аналогично для $i = \overline{9, 12}$ определяется отображение U квадрата A_i^1 так, что $x \in [\frac{i+3}{16}, \frac{i+4}{16})$, $y \in [\frac{i-9}{4}, \frac{i-8}{4})$. Для $i = \overline{5, 8}$ для квадратов A_i^1 полагаем $x \in [\frac{i-3}{8}, \frac{i-2}{8})$, $y \in [\frac{i-3}{8}, \frac{i-2}{8})$. Полагаем, что прообразом точки $y = V(x, y)$ является множество точек $U(T^{-1}(x, y))$. Этим самым определяется отображение точки x отрезка $[0, 1)$ в точку y . Легко видеть, что полученное отображение T непрерывно (вследствие условий 1) и 2) при нумерации квадратов) и нигде не дифференцируемо. Если обозначить $A = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, то $TA = A$, $\rho(A) = \frac{1}{2}$, $\rho(T^{-1}A) = \frac{3}{4}$, т.е. T не сохраняет меру. Для отображения $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ существует отображение мер $T_*\rho(B) = \rho(T_{-1}B)$,

$$T_*\rho(A_1^1 \cup A_4^1) = \rho(T^{-1}(A_1^1 \cup A_4^1)) = \frac{1}{8},$$

$$T_*^2\rho(A_1^1 \cup A_4^1) = \rho(T^{-2}(A_1^1 \cup A_4^1)) = \frac{1}{16},$$

...,

$$T_*^n\rho(A_1^1 \cup A_4^1) = \rho(T^{-n}(A_1^1 \cup A_4^1)) = \frac{1}{4} \frac{1}{2^n},$$

$$T_*\rho(A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1 \cup A_8^1) = \rho(T^{-1}(A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1 \cup A_8^1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$

$$T_*^2\rho(A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1 \cup A_8^1) = \rho(T^{-2}(A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1 \cup A_8^1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

$\dots, T_*^n\rho(A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1 \cup A_8^1) = \rho(T^{-n}(A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1 \cup A_8^1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$. Положим $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_*^k \rho$. Подставляем в эту формулу предыдущие результаты, получаем $\mu([0, \frac{1}{4})) = 0$, $\mu([\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) = 1$, $\mu([\frac{3}{4}, 1)) = 0$. Таким образом, приведение к инвариантной мере сводит отображение T к его сужению $T : [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \rightarrow [\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, где $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ с мерой $\mu[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 1$. Как показано в [1], эндоморфизм T является точным, т.е. $\forall A \in F$ с $\mu(A) > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n A) = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Шарапов В. Г. Эргодические свойства непрерывных нигде не дифференцируемых отображений // Вестник Волгоградского государственного университета, 1996, серия 1, вып. 1, С. 50-54.

Invariant measures of one class of quasiendomorphisms of lebesgue space

© V. G. Sharapov ²

Abstract. In the paper a construction of invariant measure for one class of quasiendomorphisms given by continuous nowhere differentiable maps is studied. It is considered the case when the invariant measure is concentrated on the interval of primary measure smaller one.

Key Words: Invariant measure, continuous nowhere differentiable functions, quasiendomorphisms.

²Associate professor, Volgograd State University, Volgograd; vsharapov99@mail.ru

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 517.9

Разработка комплекса программ для решения задачи оптимизации процесса окислительной регенерации

© М. Р. Еникеев¹, Л. В. Сайфуллина², И. М. Губайдуллин³

Аннотация. В работе описан алгоритм решения задачи оптимизации процесса окислительной регенерации катализаторов на различных уровнях: на зерне катализатора, на неподвижном и движущихся слоях, а также его программная реализация, представляющая собой совокупность модулей для соответствующих уровней с возможностью получения зависимости изменения температуры зерна в виде трехмерной визуализации.

Ключевые слова: окислительная регенерация катализаторов, генетический алгоритм, параллельные вычисления.

1. Введение

На современном этапе развития вычислительной техники химики-экспериментаторы и химики-технологи получили возможность обратиться к таким классам задач, решение которых традиционными методами крайне затруднено, и вывести компьютерное моделирование на уровень одного из важнейших методов решения научно-прикладных задач — технологии параллельных вычислений.

Многие физико-химические задачи, связанные с решением фундаментальных проблем химической технологии предполагают значительный объем вычислений, обеспечивающих в настоящее время, тем не менее, достаточно низкую точность. Именно к таким задачам относятся обратные кинетические задачи изучения механизмов сложных химических реакций, задачи проектирования и оптимизации работы реакционных аппаратов и технологических схем химических или нефтехимических производств. В этих производствах наиболее распространенные процессы - каталитические (протекающие с участием катализаторов). Зачастую причиной ухудшения режимных показателей таких процессов становится отложение кокса на активной поверхности катализатора. Для восстановления активности катализатора используют окислительную регенерацию. От проведения процесса регенерации зависит уровень активности и стабильности регенерационного катализатора, поэтому оптимальное ведение процесса регенерации имеет большое значение для многих процессов нефтепереработки.

Оптимизация процесса регенерации реального аппарата невозможна без определения условий проведения процесса на единичном зерне для оценки возможных местных перегревов, приводящих к снижению механической прочности и каталитической активности катализатора. Поэтому изучение процесса регенерации целесообразно провести последовательно на единичном зерне, слое катализатора и в реальном аппарате.

¹Магистрант 1-го курса факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, г. Уфа; mat-83@mail.ru.

²Магистрант 1-го курса факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, г. Уфа; leniza19@mail.ru.

³Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru.

2. Моделирование процесса регенерации на единичном зерне катализатора

Закономерности регенерации закоксованного зерна катализатора были исследованы с использованием диффузионной математической модели. При построении модели сделаны допущения, обычно принимаемые в литературе: 1) зерно катализатора сферическое, его размер и структура пор не изменяются в ходе процесса; 2) теплофизические параметры, коэффициенты тепломассопереноса и обмена и энергии активации инвариантны относительно изменения температуры; 3) массой газа в порах по сравнению с массой зерна катализатора можно пренебречь. Дополнительное допущение — отложения кокса имеют вид гранул, число которых в ходе регенерации не меняется.

Тогда уравнения материального и теплового балансов с учётом переносов за счёт диффузии, теплопроводности и стефановского потока имеют вид [1]:

$$\varepsilon_K \frac{\partial y_k}{\partial t} = \frac{D^*}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y_k}{\partial r} - r^2 \mu y_k \right) + \frac{\gamma_K S_K}{C_0} \sum_{j=1}^J \nu_{kj} W_j, \quad k = \overline{1, 4} \quad (2.1)$$

$$c_K \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda^*}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma_K S_K \sum_{j=1}^J Q_j W_j \quad (2.2)$$

начальные условия:

$$t = 0 : y_k = 0, k = \overline{1, 4}, \quad T = T_0 \quad (2.3)$$

граничные условия:

$$r = 0 : D^* \frac{\partial y_k}{\partial r} = 0, k = \overline{1, 4}, \quad \lambda^* \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.4)$$

$$r = R_3 : D^* \frac{\partial y_k}{\partial r} = \beta(x_k - y_k), k = \overline{1, 4}, \quad \lambda^* \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T_0 - T) \quad (2.5)$$

Здесь T, T_0 — температура зерна и газа, K ; ε_K, γ_K — пористость зерна катализатора и насыпная плотность катализатора; y_k, x_k — концентрации компонентов порах зерна и окружающей зерно газовой фазе, мольные доли; D^* — эффективный коэффициент диффузии, m^2/c ; μ — стефановский поток, m/c ; λ^* — эффективный коэффициент теплопроводности, $Bm/(m \cdot K)$; c_K — объёмная теплоёмкость катализатора, $\text{Дж}/(m^3 \cdot K)$; α и β — коэффициенты тепло- и массообмена между зерном катализатора и газом, $Bm/(m^2 \cdot K)$ и m/c ; Q_j — тепловые эффекты скоростей стадий, $\text{Дж}/\text{моль}$; r, R_3 — радиальная координата и радиус зерна, m ; t — время, J — количество стадий реакций ($J = 7$).

Систему уравнений (2.1) – (2.5) замыкает условие нормировки по газовой фазе в порах зерна: $\sum_k y_k = 1$. Решение системы уравнений (2.1) – (2.5) проводится методом матричной прогонки. С целью уменьшения времени счета было решено провести сравнение данного алгоритма с его параллельной реализацией.

Суть параллельного алгоритма состоит в разбиении исходного отрезка $(0, N)$ на L интервалов распараллеливания. В узлах разбиения искомые неизвестные выбираются в качестве параметрических α . Относительно α строится вспомогательная система уравнений, после решения которой остальные искомые неизвестные находятся на L интервалах независимо. Данный параллельный алгоритм для неявной схемы абсолютно устойчив и позволяет находить решение с существенно большим временным шагом [2].

Результаты исследования ускорения алгоритма редукции представлены на рисунке 2.1.

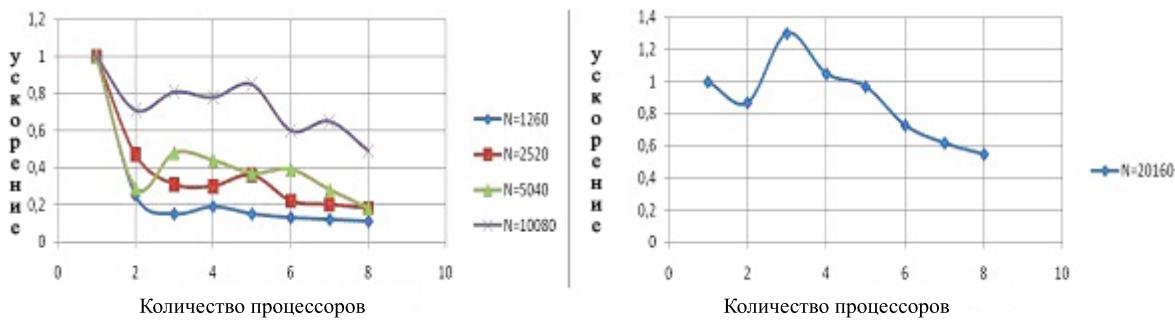


Рисунок 2.1

График зависимости ускорения (S) от числа процессоров (np): а - для малых размеров решаемой системы; б - для больших размеров системы

Из рисунка 2.1(а) следует, что при малом числе уравнений ускорение меньше единицы, т.е. параллельная программа работает медленнее, чем последовательная. Это связано с тем, что время на пересылку данных превышает выигрыш в скорости выполнения арифметических операций; также необходимо учитывать тот факт, что часть процессоров по мере выполнения прямого хода алгоритма простаивают. На больших размерах системы алгоритм имеет несущественное ускорение. Следует учесть, что в связи со спецификой задачи, задание матриц размером свыше $N \times N = 22000 \times 22000$ не представлялось возможным и целесообразным.

Анализ проведенного численного эксперимента показал, что использование данной схемы распараллеливания прогонки — нецелесообразно, в связи с этим, в программном комплексе в качестве основного используется последовательный вариант алгоритма.

3. Моделирование процесса в слое катализатора

Модель процесса на зерне катализатора является составной частью модели слоя катализатора, которая в свою очередь входит как составная часть в полную математическую модель аппарата.

Математическая модель процесса в неподвижном слое катализатора рассматривалась для двух кинетических режимов - изотермического и адиабатического [3].

Математическая модель процесса для адиабатического режима представляется в виде системы трех уравнений:

$$\begin{aligned} N_1 \frac{\partial C}{\partial \tau} + N_2 \frac{\partial C}{\partial l} &= -w \\ -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \frac{-\beta w}{\gamma_K} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$N_3 \frac{\partial T}{\partial \tau} + N_4 \frac{\partial T}{\partial l} = -q\omega$$

с естественными начальными (3.2) и граничными (3.2) условиями:

$$\tau = 0 : C = 0, \rho_{l \geq 0} = \rho_0, T_{l \geq 0} = T_0 \tag{3.2}$$

$$l = 0 : C_{\tau > 0} = C_0, T_{\tau \geq 0} = T_0, \tag{3.3}$$

где $N_1 = \gamma_g \varepsilon; N_2 = V_0/S; N_3 = [\gamma_g \varepsilon c_g + \gamma_K(1 - \varepsilon)c_K]; N_4 = V_0 c_g/S$.

В математическом описании приняты следующие обозначения: V_0 — массовый поток кислородсодержащего газа с плотностью γ_g и теплоемкостью c_g , C — текущая концентрация кислорода в нем, ρ — содержание кокса на катализаторе, γ_K — насыпная плотность катализатора, c_K — его теплоемкость, ε — доля свободного объема в слое, S — сечение трубы, T — температура процесса, w — скорость реакции, измеренную по кислороду и отнесенную к единице реакционного объема, β — соотношение скоростей реакции по кислороду и коксу, q — тепловой эффект реакции.

Для изотермического реактора $\partial T/\partial l = 0$, и если рассматривать режим с постоянной в ходе всей регенерации температурой $\partial T/\partial \tau = 0$, то последнее уравнение в (3.1) переходит в независимое условие постоянства температуры, а процесс описывается двумя первыми уравнениями:

$$\begin{aligned} N_1 \frac{\partial C}{\partial \tau} + N_2 \frac{\partial C}{\partial l} &= -kC \frac{\rho}{\rho_0} \\ -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \frac{-\beta}{\gamma_K} kC \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

с начальными (3.5) и граничными (3.6) условиями

$$\tau = 0 : C = 0, \rho = \rho_0 \quad (3.5)$$

$$l = 0 : C = C_0 \quad (3.6)$$

Математическая модель процесса окисления кокса в реакторах с движущимся слоем контактного материала представлена уравнениями материальных балансов по кислороду и по коксу и уравнением теплового баланса:

$$\begin{aligned} C &= C_0 - \frac{\gamma_K(1 - \varepsilon)S}{f} w; \\ -\frac{d\rho}{dl} &= \frac{\beta\gamma_K(1 - \varepsilon)S}{G_K} w; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$G_K c_K \frac{dT}{dl} + (fc_V + \lambda_1 S_n + \lambda_e S_e)T - (fc_V T_V + \lambda_1 S_n T_n + \lambda_e S_e T_e) = -q\gamma_K(1 - \varepsilon)Sw$$

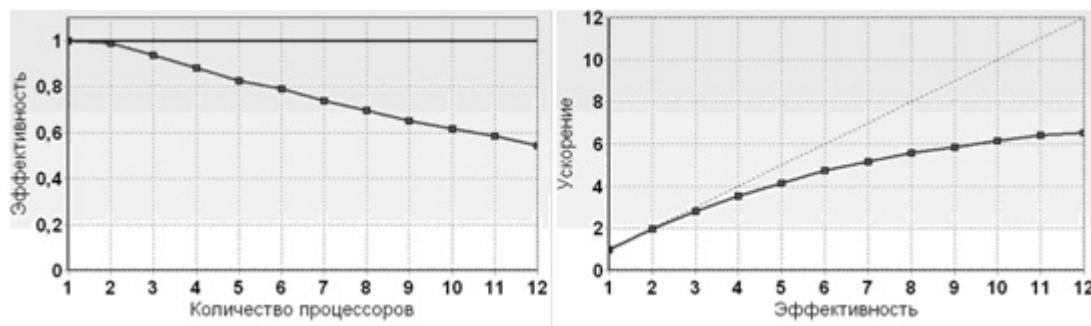
$$l = 0 : \rho = \rho_0, T = T_0 \quad (3.8)$$

Для поиска оптимальных режимов процессов регенерации в неподвижном и движущемся слое катализатора используются соответствующие математические модели, изложенные выше. Управляющим воздействием в процессе выжига кокса является температура T_0 (температура кислородсодержащего газа на выходе в реактор), на которую в процессе поиска решения накладываются ограничения: $T_{0min} < T_0 < T_{0max}$. T_{0min} определяется из условия достаточно высокой интенсивности процесса выжига кокса в начальный период, T_{0max} определяется, как правило, термостойкостью катализатора. Кроме того управляющим воздействием является скорость подачи воздуха — N_2 . Для процесса регенерации, проходящей в движущемся слое контактного материала, дополнительными управляющими воздействиями являются параметры кислородсодержащего газа, поступающего в первую и вторую зоны регенераторы — u_1, \dots, u_n .

Задача оптимизации: при известных входных условиях найти такое управление $U = (T_0, N_2, u_1, \dots, u_n)$, чтобы за минимальное время работы t_k выполнялись ограничения, наложенные на систему.

Для поиска оптимальных режимов работы использовался параллельный генетический алгоритм (ПГА) [4].

Поиск оптимальных режимов работы довольно трудоёмкая задача, требующая значительного времени счета. Эффективное решение данной проблемы - использование параллельных вычислений. Распараллеливание вычислительного процесса для рассматриваемой задачи осуществляется посредством передачи сообщений (стандарт MPI). В качестве реализации параллельного генетического алгоритма был выбран глобальный однопопуляционный ПГА (схема "мастер - подчиненные"), имеющий одну пространственно-распределенную популяцию. Вычислительный эксперимент проводился на компьютере, оснащенном четырёхядерным процессором AMD Phenom X4. Оценка эффективности распараллеливания алгоритма (используя гипотезу Минковского) представлена на рисунке 3.1.



Р и с у н о к 3.1

Зависимость ускорения и эффективности, в зависимости от числа процессоров

Из графиков, изображенных на рисунке 3.1, следует, что параллельная программа работает значительно быстрее, чем последовательная. Но при использовании более 8 процессоров наблюдается снижении эффективности менее 0.7. Это связано с тем, что затраты времени на пересылку данных начинают возрастать по сравнению с выигрышем в скорости выполнения арифметических операций. Для преодоления данной проблемы, предлагается в будущем использовать островную модель ПГА, то есть использование небольшого числа относительно больших подпопуляций и миграция особей между ними.

4. Описание программного комплекса

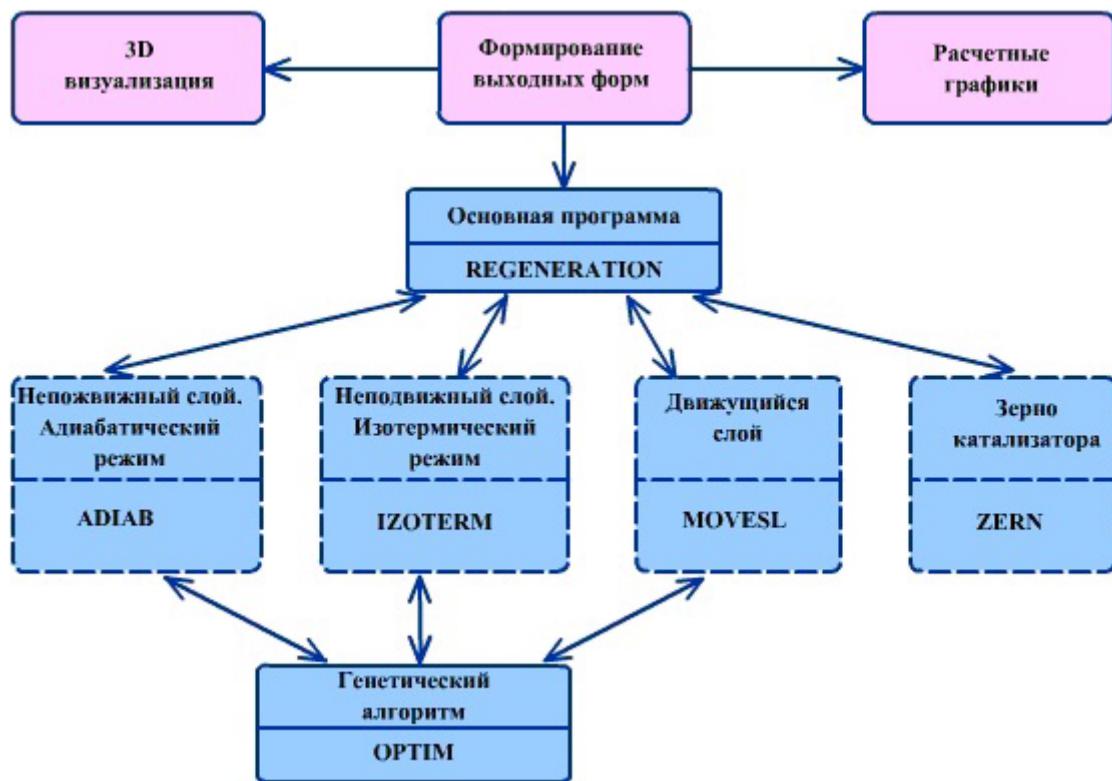


Рисунок 4.1

Структура программного комплекса REGENERATION

На основе вышеизложенных алгоритмов был создан программный комплекс REGENERATION (рисунок 4.1), реализующий расчет процесса окислительной регенерации и поиск оптимальных режимов проведения процесса в среде Borland Develop Studio с использованием библиотеки OpenGL.

Основной модуль REGENERATION предоставляет интерфейс программы и служит связующим звеном с другими модулями. Модуль Zern служит для расчета процесса регенерации для единичного зерна катализатора, модули Izoterm, Adiab - для неподвижного слоя при изотермическом и адиабатическом режиме соответственно, а MoveSl - предназначен для анализа процесса регенерации в движущемся слое контактного материала. Модули Graph и 3DGraph служат для визуализации полученных результатов. Optim реализует генетический алгоритм для заданного процесса, по окончании расчета для этого модуля создается файл с результатами.

Решение задачи на единичном зерне катализатора (модуль Zern) зависит от шести параметров: радиуса зерна, времени контакта, содержания кокса, входной температуры кислорода, концентрации кислорода и количества точек разбиения для разностной схемы. В диалоговом окне предоставлена возможность изменения входных данных вручную или из текстового файла. В качестве результатов расчета выводятся графики зависимости кислорода, углерода, угларного и углекислого газа и температуры зерна (с возможностью выбора необходимого компонента) от радиуса зерна. Также была реализована возможность получить зависимость изменения температуры зерна в виде трехмерной визуализации (рисунок 4.2).

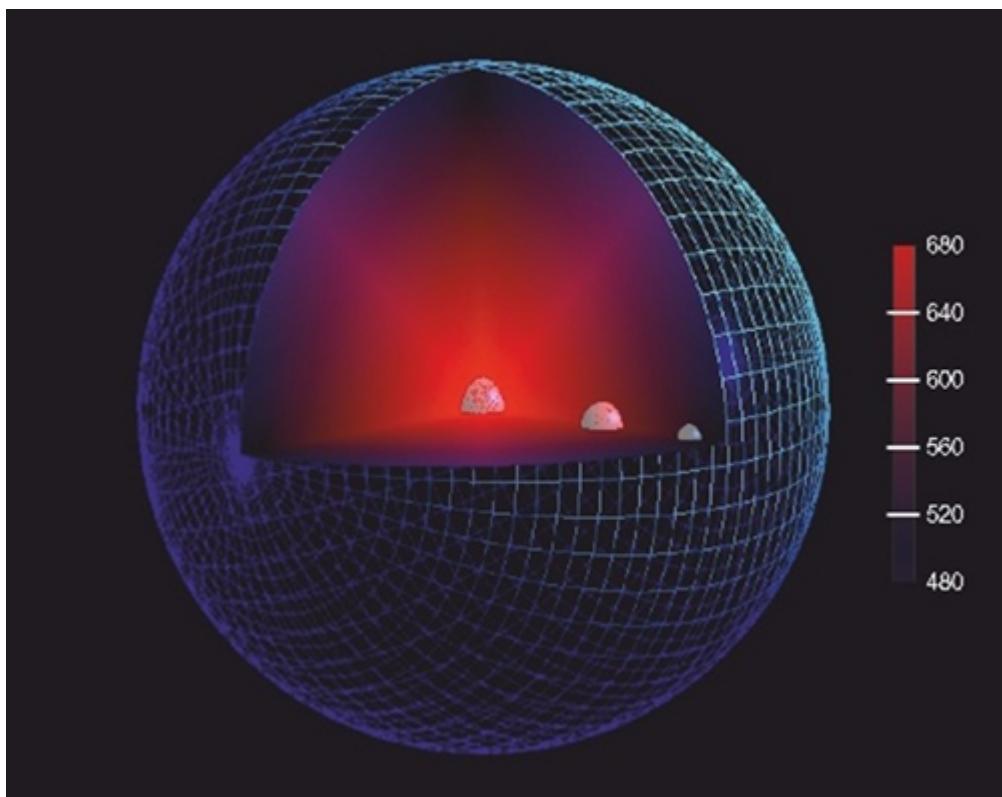


Рисунок 4.2

Трехмерная визуализация изменения температуры в зерне катализатора

5. Заключение

Таким образом, реализован программный комплекс Regeneration для расчета процессов окислительной регенерации катализаторов, использующий преимущества параллельных архитектур для проведения химико-технологических расчетов, что позволило сократить время, требующееся для оптимизации параметров проведения процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаев А.В., Дробышевич В.И., Губайдуллин И.М., Масагутов Р.М. Исследование волновых процессов в регенераторах с неподвижным слоем катализатора // В сб.: "Распространение тепловых волн в гетерогенных средах". Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. – 1988. – С.233-246.
2. Еникеев М.Р. Распараллеливание алгоритма матричной прогонки при моделировании процессов выжига кокса // Студент и наука: Материалы студенческих научных конференций./ гл.ред. Р.Ф. Талипов. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2010.– С. 3.
3. Жоров Ю.М. Моделирование физико-химических процессов нефтепереработки и нефтехимии. - М.: Химия, 1978. – 376 с., ил.
4. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы: Учебное пособие. – 2-е изд.. – М: Физматлит, 2006. – С. 320.

Developing of software for solution of optimization problem of oxygen regeneration process.

© M. R. Enikeev⁴, L. V. Sayfullina⁵, I. M. Gubaydullin⁶

Abstract. In the work solution algorithm of optimization problem of oxygen regeneration process is described on different levels: on the catalyst grain, on the fixed-bed and moving bed of catalyst, its software implementation, representing the union of modules for appropriate levels with opportunity of getting the dependence of grain temperature variation in the term of 3D-visualization.

Key Words: oxygen regeneration of catalysts, genetic algorithm, parallel computing.

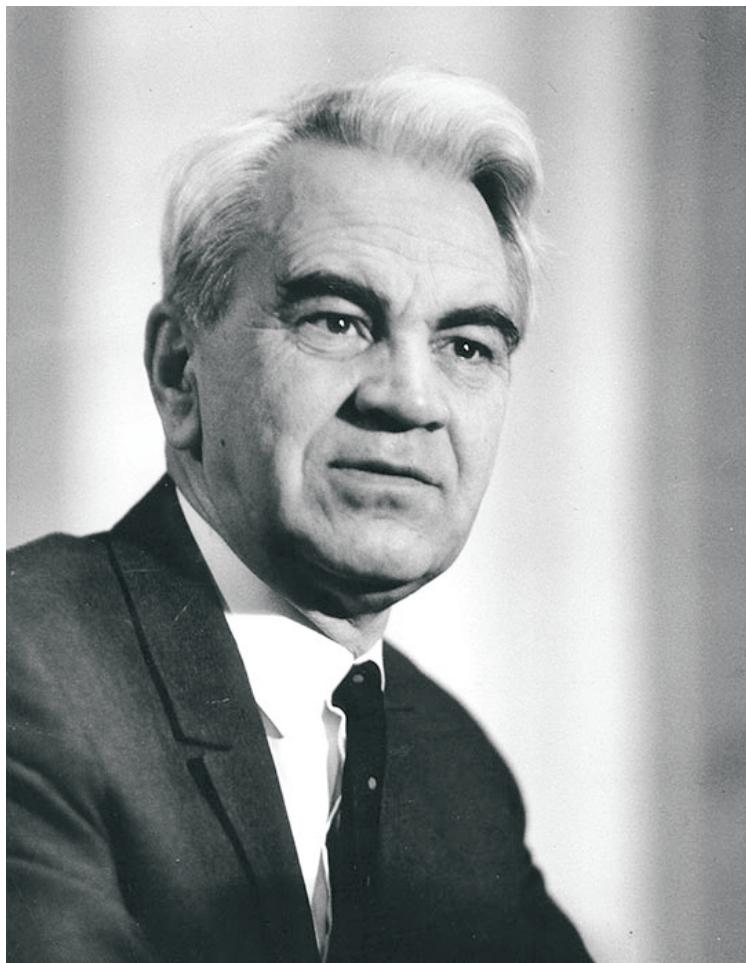
⁴The first year Master's degree student of Department of Mathematics and informational technologies, Bashkir state university, Ufa; mat-83@mail.ru.

⁵The first year Master's degree student of Department of Mathematics and informational technologies, Bashkir state university, Ufa; leniza19@mail.ru.

⁶Senior associate. mathematical chemistry lab, Institute of petrochemistry and catalysis of RAS, Ufa; irekmars@mail.ru.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 100 - ЛЕТИЮ МСТИСЛАВА ВСЕВОЛОДОВИЧА КЕЛДЫША



Мстислав Всеволодович Келдыш родился 10 февраля 1911 года в г. Риге. Родители Мстислава Всеволодовича происходили из дворянских семей. Отец Всеволод Михайлович Келдыш был крупным инженером-строителем, академиком и вице-президентом Академии строительства и архитектуры. В 1915 году семья Келдышей переехала в Москву. Мстислав окончил школу со строительным уклоном. Но так как ему исполнилось только 16 лет, его не приняли в инженерно-строительный институт. И в 1927 году он поступает в Московский университет на математическое отделение.

После окончания университета М. В. Келдыш с 1931 по 1946 годы работал в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ) сначала инженером, а с 1941 года - начальником отдела динамической прочности. С 1934 года Мстислав Всеволодович совмещает работу в ЦАГИ и Математическом институте им. В. А. Стеклова (МИАН). В 1934 году М. В. Келдыш поступает в аспирантуру МИАН. В 1935 году ему без защиты диссертации присуждают степень кандидата физико-математических наук; в 1936 - без защиты получает степень кандидата технических наук и звание профессора по специальности «аэродинамика». В январе 1938 года М. В. Келдыш защищает докторскую диссертацию

на тему «О представлении рядами полиномов функций комплексного переменного и гармонических функций».

С 1939 года имя М. В. Келдыша и его работы засекречены в связи с выполнением работ особой государственной важности. В апреле 1942 г. М.В. Келдышу (совместно с Е.П. Гроссманом) присуждена Сталинская премия II степени за научные работы по предупреждению разрушений самолетов: «Расчет самолета на флаттер» (1940 г.), «Колебания крыла с упруго прикрепленным мотором» и «Изгибо-элеронный флаттер» (1941 г.).

В июне 1943 г. за выдающиеся заслуги в области научно-исследовательских работ в авиации М.В. Келдыш награжден орденом Трудового Красного Знамени. 30 сентября 1943 г. его избирают членом-корреспондентом АН СССР по Отделению физико-математических наук. С 1942 г. по 1953 г. он профессор МГУ. На физико-техническом факультете МГУ Мстислав Всеволодович заведовал кафедрой термодинамики и вел курс математической физики, а на механико-математическом - читал лекции и руководил научно-исследовательским семинаром по теории функций комплексного переменного.

В апреле 1944 г. в МИАН создали отдел механики, которым с июня 1944 г. по июнь 1953 г. заведовал М.В. Келдыш. При отделе начал работать научный семинар, объединивший специалистов по аэродинамике. С этого времени он занимается проблемами ракетодинамики и прикладной небесной механики.

Война проходила для Мстислава Всеволодовича в работе на авиационных заводах, где он как руководитель отдела ЦАГИ курировал противофлаттерные конструкции. Появление следующей проблемы в самолетостроении тех лет обязано переходу на трехпорную схему шасси с передним колесом. Однако, он оказался не безболезненным: при достижении некоторой скорости у передней стойки шасси начинались самовозбуждающиеся колебания, которые приводили к ее поломке. Это явление получило название «шимми». Используя опыт, накопленный в исследованиях по флаттеру, и высокий научный потенциал математика и механика, М.В.Келдыш в своей работе «Шимми переднего колеса трехколесного шасси» (1945 г.) полностью решает проблему теоретически и, как всегда, формулирует практические инженерные рекомендации, избавляющие конструкцию от этого опасного явления. Работа была удостоена второй Сталинской премии в 1946 г. И до сих пор математики неизменно сопровождают эпитетом «красивая» любое упоминание о ней.

30 ноября 1946 г. М.В. Келдыш избран действительным членом Академии наук по Отделению технических наук. На следующий же день его назначают начальником, а в августе 1950 г. - научным руководителем НИИ-1 (ныне Исследовательский центр им. М.В. Келдыша), занимающегося проблемами прикладных задач ракетостроения. С этого времени деятельность Мстислава Всеволодовича связана с ракетной техникой, атомной энергетикой, освоением космоса и вычислительной математикой. Потребовались новые методы научных исследований, прежде всего эффективный математический расчет. Их рождение и использование коренным образом изменили общенаучное значение вычислительной математики.

С приходом в НИИ-1 в поле его творческой деятельности попадают проблемы, связанные с созданием реактивных двигательных установок большой мощности для оснащения крылатых ракет со всем шлейфом научно-технических вопросов по сверхзвуковой газодинамике, тепломассообмену, теплозащите и др.

В 1953 г. был создан Институт прикладной математики АН СССР (ИПМ) во главе с М. В. Келдышем, который оставался его бессменным директором до 24 июня 1978 г. С деятельностью института связано развитие вычислительной математики в нашей стране. Здесь работал цвет научной мысли.

Одной из задач, стоявших перед вновь организованным институтом являлось обеспечение расчетных работ по заданиям КБ-11 (в настоящее время Российской федераль-

ный ядерный центр - Всеороссийский научно - исследовательский институт экспериментальной физики). Первые расчеты были выполнены большими группами девушек-вычислительниц на клавишных машинах фирмы «Мерседес», затем в институте заработала первая отечественная ЭВМ «Стрела». По результатам расчетов выбирались эффективные схемы конструкций и корректировались первоначальные оценки. Эти работы были выполнены в возглавляемом М.В.Келдышем институте группой исследователей, среди которых можно назвать имена А. Н. Тихонова, К. А. Семеняева, А. А Самарского, В. Я Гольдина, Б. Л. Рождественского, Н. Н. Яненко. Именно эти работы заложили фундамент отечественной вычислительной математики.

В 1954 г. М.В.Келдыш назначается Правительством научным руководителем работ по созданию межконтинентальной крылатой ракеты «Буря», а С.А.Лавочкин - ее главным конструктором. В 1960 г. первая в мире крылатая ракета «Буря» прошла испытания и показала более высокие характеристики, чем разрабатывавшаяся в те же годы американская «Навахо». Работы в НИИ-1 тесно переплетались с математическими разработками под руководством Келдыша в отделе механики и ОПМ МИАН, где в 1949 гг. были развернуты пионерские исследования по ракетодинамике и прикладной небесной механике (механике космического полета), оказавшие существенное влияние на развитие ракетной и космической техники. В 1953 г. здесь были предложены и проанализированы оптимальные схемы составных ракет; баллистический спуск космического аппарата с орбиты и показана возможность его использования для возвращения космонавтов; возможная стабилизация аппарата посредством использования поля земного тяготения и многие другие идеи.

В 1954 г. М.В.Келдышем, С.П.Королевым и М.К.Тихонравовым было представлено письмо в Правительство с предложением о создании искусственного спутника Земли (ИСЗ). 30 января 1956 г. М.В.Келдыш был назначен председателем специальной комиссии Академии наук по ИСЗ.

После запуска в 1957 г. первого ИСЗ начинается новый этап в освоении космического пространства. В ОПМ МИАН под руководством Келдыша разворачиваются работы по слежению за ИСЗ и прогнозированию его траектории, по баллистическому проектированию межпланетных полетов космических аппаратов (КА) с минимальными затратами энергии и др. Примерами блестящих решений служат: найденная схема разгона КА с использованием выхода на промежуточную орбиту искусственного спутника, использование гравитационного поля планеты для целенаправленного изменения траектории движения. Эти решения оказались принципиальными для проектирования всех последующих перелетов. Нет необходимости приводить весь перечень успехов в освоении ближнего и дальнего космоса, pilotируемой космонавтике. Эти мировые достижения нашей страны общеизвестны. Велик в них вклад М.В.Келдыша и как теоретика космонавтики и как научного координатора общегосударственных программ.

28 января 1960 г. решением Правительства для координации работ был образован Межведомственный научно-технический совет по космическим исследованиям при Академии наук СССР, и М.В.Келдыш назначен его председателем. Заслугой Мстислава Всеволодовича на этом посту было проведение сбалансированной программы исследований, обеспечившей органичное сочетание всех аспектов освоения космического пространства. Подтверждением тому явились мировое признание успехов нашей страны, уважение и авторитет М.В.Келдыша, избранного в мае 1961 г. президентом Академии наук. Он руководил Академией 14 лет...

Возглавляя Академию, Мстислав Всеволодович всемерно поддерживал новые направления науки (квантовая электроника и молекулярная биология), способствовал международному сотрудничеству ученых, считая, что наука должна служить всему человечеству.

Благодаря своему таланту он быстро ориентировался в различных областях современной науки, замечал ростки нового, продвигал исследования по наиболее актуальным и перспективным направлениям. В условиях ограниченности средств М.В. Келдыш призывал ученых предельно обоснованно определять, «что поддержать, а что менее поддержать».

Мстислава Всеволодовича знали во всем мире, отождествляя успехи советской науки с его личностью. В этот период космонавтика стала предметом пристального внимания Мстислава Всеволодовича, недаром его считали Теоретиком космонавтики. Под его руководством развивались новые направления в исследовании космоса, созданы Институт космических исследований и Институт медико-биологических проблем.

Академик М.В. Келдыш занимался самыми актуальными государственными задачами. С ним работали талантливые, увлеченные люди, единомышленники и оппоненты. Он же всегда был их признанным лидером, компетентным и беспристрастным арбитром.

Говорить о работах М.В. Келдыша по флаттеру и шимми проще, чем о его работах по математике, выполненных в те же годы. Значимость этих работ для развития математики ничуть не меньшая, чем названных выше для авиации, тем более, что последние едва ли могли быть выполнены без фундаментальных исследований в соответствующих разделах математики. По-видимому, фундаментальные продвижения в математической науке, вытекавшие из работ М.В. Келдыша по теории приближений, функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, были обусловлены его умением, сохранив существование проблемы, сформулировать решаемую задачу в наиболее простом виде. Владея в совершенстве знаниями разных разделов математики, он умел находить и строить неожиданные аналогии и тем самым эффективно использовать как имеющийся математический аппарат, так и создавать новый. Следует особенно подчеркнуть, что, казалось бы, абстрактные работы Мстислава Всеволодовича, например, по глубоко разработанной им теории несамосопряженных операторов, исходят из конкретных прикладных задач, в том числе по колебаниям конструкций с диссинацией энергии.

Математические работы М.В. Келдыша посвящены теории функций действительного и комплексного переменного, уравнениям в частных производных, функциональному анализу. Большой круг проблем решен в его трудах по теории потенциала и краевых задач для эллиптических уравнений. Сюда в первую очередь относятся исследования по разрешимости, единственности и устойчивости задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

В приложениях теории гармонических функций зачастую нужно знать, будет ли устойчиво решение задачи Дирихле не только при изменении граничных значений, но и при вариации границы области. М.В. Келдыш дал законченную теорию этого вопроса, показав, что задача Дирихле устойчива внутри области тогда и только тогда, когда множество точек границы, в которых нет устойчивости, имеет гармоническую меру нуль, а устойчивость в замкнутой области имеет место тогда и только тогда, когда каждая точка границы является точкой устойчивости. Он вывел также критерий устойчивости точки границы и тонкий критерий устойчивости для областей, ограниченных конечным числом жордановых поверхностей. В итоге этих исследований классическая теория, относящаяся к проблеме Дирихле, приобрела нынешнюю полноту и стройность.

Важное значение имеют труды М.В. Келдыша по вырождающимся на границе дифференциальным уравнениям. Рассматривая краевую задачу для эллиптического уравнения, вырождающегося на части границы, он установил, что в зависимости от характера вырождения по-разному следует задавать краевые условия, и указал корректные постановки задач. Его идеи и выводы стали исходными для последующих работ в этой области, выполненных у нас и за рубежом.

Большой цикл исследований выполнен М.В. Келдышем по теории приближения функ-

ций полиномами в комплексной области, гармоническими полиномами, целыми функциями. Здесь изучается широкий круг задач, решение которых часто выходит за пределы интересов теории приближений и представляет по существу новые тонкие теоремы о поведении аналитических функций и их свойствах.

Результаты работ по приближению функции комплексного переменного рядами полиномов являются основополагающими в данной области математики. В них разработана теория полноты систем ортогональных полиномов по контуру и по площади области. М. В. Келдыш решил основные вопросы о полноте систем полиномов, ортогональных по площади области, в частности, установил замечательную теорему о возможности введения веса, обеспечивающего полноту в любой односвязной области. Ему удалось разрешить до конца весьма трудную задачу о представлении функций равномерно сходящимися рядами полиномов в замкнутых областях. Эти проблемы долгое время привлекали внимание многих советских и иностранных ученых. Из работ М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева выросла советская школа по теории приближений в комплексной области, широко известная своими выдающимися результатами.

М.В. Келдыш впервые доказал полноту системы собственных и присоединенных функций для несамосопряженных операторов в частных производных, решив вопросы, не поддававшиеся в течение долгих лет усилиям ряда выдающихся математиков. Он изучил также асимптотическое поведение собственных значений для общих несамосопряженных линейных операторов. При этом была открыта новая теорема тауберова типа, существенно обобщающая классические теоремы, и разработан новый метод доказательства таких теорем. Идеи и методы, заложенные в исследованиях по теории линейных несамосопряженных операторов, определили ее развитие на многие годы.

С именем М.В. Келдыша связано становление новой науки - вычислительной математики, возникшей из задач новой техники, на базе классической математики и новых вычислительных средств. Созданию этой науки обязаны многие фундаментальные достижения современности.

До конца жизни он оставался патриотом страны, настоящим русским интеллигентом. Когда тяжелая болезнь и операция на сосудах, перенесенная им в 1973 г., не позволили продолжать работу в привычном ритме, он отказался от поста президента АН СССР. В последние три года жизни М.В. Келдыш - член Президиума АН, председатель Комитета по Ленинским и Государственным премиям при Совете Министров СССР и директор ИПМ.

«Уникальным даром Мстислава Всеволодовича, выделявшим его среди многих, было умение вникнуть в существо дела буквально на ходу, пишет М. Р. Шура-Бура. - Бывало, послушав информацию о проблеме, которой ранее не занимался, он задавал самые существенные вопросы, мгновенно схватывал самою суть. Ему «лапшу вешать на уши» было совершенно бесполезно, он это мгновенно понимал. Он умел четко сформулировать задачу и наметить, по какому пути ее нужно попытаться решать. За свою уже долгую жизнь я ни у кого не встречал такого яркого и светлого ума, который мог ухватить самое главное в любом вопросе. Это был человек, все быстро и глубоко понимавший.»

Заслуги академика М.В. Келдыша высоко оценены. Он трижды герой Социалистического Труда (1956, 1961, 1971 г.), лауреат Ленинской (1957 г.) и Государственных (1942, 1946 г.) премий, награжден семьью орденами Ленина, тремя орденами Трудового Красного Знамени, шестью иностранными орденами и многими медалями. Мстислав Всеволодович был избран иностранным членом 16 Академий мира, почетным доктором 6 университетов. Ему установлены памятники в Москве и Риге, памятные доски на зданиях, где он жил (Воробьевское шоссе) и работал (МГУ и ИПМ). Память о М.В. Келдыше увековечена в названиях институтов (ИПМ и ИЦ), научно-исследовательского судна, площади

в Москве, кратера на Луне и малой планеты Солнечной системы. Золотую медаль имени М.В. Келдыша вручает Российская академия наук за выдающиеся научные работы в области прикладной математики и механики, а также теоретических исследований по освоению космического пространства.

Статья составлена по материалам публикаций о М.В.Келдыше.

Редакционная коллегия.

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе ТЕХ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой \input в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду \headerRus. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду \headerEn. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду \headerFirstEn с такими же параметрами, как для команды \headerRus.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды \sect с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами \subsection, \subsubsection и \paragraph.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами \proof и \proofend (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtou{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , Δ_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\Delta}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

- а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

- б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

- в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

- г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`.

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\bibitem`, имеющих один параметр:

`\bibitem{метка для ссылки на источник}`

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcitem` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiK_TE_X 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Алексеенко С. Н.	45	Лубышев Ф.В.	32
Амосова Т. В.	22	Манапова А.Р.	32
Атряхин В. А.	84	Митрякова Т. М.	63
Бояркин Д.И.	51	Нагорных С. Н.	45
Булатов М. В.	22	Повещенко Ю.А.	7
Ванден Берге Г.	22	Починка О.В.	63
Гринес В.З.	29	Сайфуллина Л. В.	95
Губайдуллин И. М.	95	Смолкин Г. А.	71
Еникеев М. Р.	95	Спивак С. И.	79
Исмагилова А. С.	79	Тишкун В.Ф.	7
Казакевич Г.И.	7	Файрузов М.Э.	32
Келдыш М. В.	103	Федченко А. А.	55
Клочкова Л.В.	7	Хамитова И. А.	79
Кузьмичев Н. Д.	55	Шаманаев П. А.	84
Кузнецов Е. Б.	12	Шарапов В. Г.	91
Левченко Ю. А.	29	Шишенкова А. Е.	63

Для заметок