

ISSN 2079 – 6900

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 12, № 4



2010



СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

## Журнал Средневолжского математического общества

Том 12, № 4

Издается с декабря 1998 года  
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),  
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),  
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),  
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),  
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,  
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,  
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,  
В. А. Треногин

САРАНСК

2010

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество» и Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

#### **Журнал Средневолжского математического общества. Том 12, № 4.**

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректоры: Напалкова Ю. В., Ляпина А. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

---

*Адрес редакции:* 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики.

*Тел.:* (834-2) 23-32-05

*E-mail для статей:* journal@svmo.ru

*E-mail для организационных вопросов:* svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

*Web:* <http://www.svmo.ru>

---

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru

## Содержание

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА ..... | 6 |
|-----------------------------|---|

**В.К. Горбунов, А.Г. Ледовских**

|   |    |
|---|----|
| Построение поля потребительских предпочтений по торговой статистике ..... | 10 |
| 1. Введение .....   | 10 |
| 2. Обобщённая модель потребительского спроса .....                        | 11 |
| 3. Задача построения поля предпочтений .....                              | 12 |
| 4. Обобщённая система Африата её решение .....                            | 13 |
| 5. Построение поля предпочтений .....                                     | 15 |

**Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов**

|   |    |
|---|----|
| Разностные аналоги некоторых мультипликативных неравенств<br>О.А. Ладыженской для функциональных пространств $W_2^1(\Omega)$ ,<br>$W_{2,0}^2(\Omega)$ ..... | 21 |
| 1. Введение .....   | 21 |
| 2. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения .....  | 22 |
| 3. Сеточные аналоги некоторых мультипликативных неравенств Ладыженской  | 25 |

**П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова**

|  |    |
|--|----|
| О параметрических решениях дифференциальных уравнений с частными производными; приложения в трансзвуковой газовой динамике. .... | 30 |
| 1. Описание метода построения параметрических решений .....  | 30 |
| 2. Применение метода к уравнениям трансзвуковой газовой динамики .....   | 31 |
| 3. Трансзвуковые течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах<br>Лавая. ....   | 33 |

**В. Г. Малинов**

|   |    |
|---|----|
| О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата ..... | 37 |
| 1. Постановка задачи и предыстория .....  | 37 |
| 2. Метод решения задачи .....   | 38 |
| 3. Вспомогательные утверждения .....  | 39 |
| 4. Обоснование сходимости метода .....  | 41 |
| 5. Численное решение модельной задачи .....   | 43 |

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

**В. В. Абрамов**

|   |    |
|---|----|
| Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром . . . . . | 49 |
| 1. Постановка задачи . . . . .  | 49 |
| 2. Признаки устойчивости . . . . .  | 51 |
| 3. Пример . . . . .   | 52 |

**Е. Л. Авербух, А. А. Куркин**

|  |    |
|--|----|
| Моделирование динамики поверхностных волн оползневого происхождения методом частиц . . . . . | 55 |
| 1. Введение . . . . .  | 55 |
| 2. Гидродинамика сглаженных частиц . . . . .   | 56 |
| 3. Основные уравнения модели . . . . .   | 59 |
| 4. Заключение . . . . .  | 62 |

**А. С. Андреев**

|   |    |
|---|----|
| Метод функций Ляпунова в задачах управления . . . . . | 64 |
| 1. Введение . . . . .                                 | 64 |
| 2. Основные построения . . . . .                      | 65 |
| 3. Теоремы о стабилизации . . . . .                   | 68 |
| 4. Некоторые примеры . . . . .                        | 70 |

**А. В. Балаев, И. Ф. Басыров**

|   |    |
|---|----|
| Разработка неизотермической кинетической модели реакции дегидрирования стирола на железокалиевом катализаторе . . . . . | 74 |
| 1. Введение . . . . .   | 74 |
| 2. Разработка кинетической модели . . . . .   | 74 |
| 3. Выводы . . . . .   | 76 |

**П. А. Вельмисов, А. В. Крупенников**

|   |    |
|---|----|
| Об одной нелинейной начально-краевой задаче в аэрогидромеханике . . . . . | 79 |
| 1. Постановка задачи . . . . .  | 79 |
| 2. Точное решение . . . . .   | 80 |
| 3. Приближенное решение . . . . .   | 82 |

**П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова**

|   |    |
|---|----|
| Математическое моделирование системы «трубопровод - датчик давления» . . . . .          | 85 |
| 1. Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления» . . . . . | 85 |
| 2. Примеры исследования динамики упругого элемента датчика давления . . . . .           | 88 |

**О. В. Видилина**

|  |    |
|--|----|
| Две задачи оптимального быстрогодействия . . . . .   | 94 |
| 1. Задача оптимального быстрогодействия для магнитоэлектрического силового привода . . . . . | 94 |

---

|   |    |
|---|----|
| 2. Оптимальное управление температурным полем . . . . . | 97 |
|---|----|

---

|  |     |
|--|-----|
| <b>Э. Р. Гиззатова, С. И. Спивак, В. З. Мингалеев, Ю. Б. Монаков</b><br>О решении прямой кинетической задачи для процессов<br>сополимеризации на катализаторах Циглера-Натта . . . . . | 104 |
| 1. Введение . . . . .  | 104 |
| 2. Постановка прямой кинетической задачи . . . . .   | 105 |
| 3. Методика решения прямой кинетической задачи . . . . .   | 106 |

---

|   |     |
|---|-----|
| <b>И.Е. Дергунов, И.В. Лутошкин</b><br>Метод параметризации для оптимизации систем,<br>представляемых интегро-дифференциальными уравнениями . . . . . | 110 |
| 1. Введение . . . . .   | 110 |
| 2. Постановка задачи . . . . .  | 111 |
| 3. Параметризация задачи . . . . .  | 111 |
| 4. Дифференцирование функционала по параметрам . . . . .  | 112 |
| 5. Пример . . . . .   | 115 |

---

|   |     |
|---|-----|
| <b>А. Н. Джафаров</b><br>О методе «неполных наказаний» в неантагонистических<br>позиционных дифференциальных играх двух лиц . . . . . | 120 |
| 1. Введение . . . . .   | 120 |
| 2. Постановка задачи . . . . .  | 121 |
| 3. Результаты . . . . .   | 123 |

---

|   |     |
|---|-----|
| <b>Р. В. Жалнин</b><br>Решение модельной задачи для уравнения диффузионного типа<br>многосеточным методом на нерегулярной сетке . . . . . | 126 |
|---|-----|

---

|  |     |
|--|-----|
| <b>Л. Ю. Катаева, Д. А. Масленников, М. В. Прокофьева</b><br>Анализ эффективности итерационно-интерполяционного метода . . . . . | 130 |
| 1. Введение . . . . .  | 130 |
| 2. Схемы итерационно-интерполяционного метода и их свойства . . . . .  | 130 |
| 3. Анализ эффективности . . . . .  | 131 |

---

|   |     |
|---|-----|
| <b>В. Н. Кризский, Н. В. Трегубов, Р. Р. Яматов</b><br>О способе вычисления потенциальных физических полей в<br>кусочно-анизотропных средах . . . . . | 134 |
| 1. Введение . . . . .   | 134 |
| 2. Стационарное поле в кусочно-анизотропной среде . . . . .   | 136 |
| 3. Нестационарное поле в кусочно-анизотропной среде . . . . .   | 141 |
| 4. Выводы . . . . .   | 144 |

---

|  |     |
|--|-----|
| <b>Ю. Б. Малыханов, И. Н. Ерёмкин</b><br>Методы высокоточной оптимизации базисных функций в<br>расчётах аналитических ХФ-орбиталей атомов с открытыми<br>оболочками одинаковой симметрии . . . . . | 146 |
|--|-----|

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 1. | Введение . . . . .   | 146 |
| 2. | Уравнения самосогласованного поля Хартри—Фока для атомов с открытыми оболочками одинаковой симметрии . . . . . | 147 |
| 3. | Результаты и обсуждение . . . . .  | 148 |
| 4. | Заключение . . . . .   | 149 |

---

**Т. Ф. Мамедова, А. А. Ляпина**

|  |   |     |
|--|---|-----|
|  | Об исследовании динамических моделей социально-экономических систем на устойчивость по части переменных . . . | 152 |
|--|---|-----|

---

**Э. В. Мусафиров**

|  |   |     |
|--|---|-----|
|  | Условия простоты систем линейных дифференциальных уравнений | 158 |
|--|---|-----|

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 1. | Введение . . . . .                                   | 158 |
| 2. | Условия простоты линейных систем . . . . .           | 159 |
| 3. | Связь с системой с удвоенной правой частью . . . . . | 164 |

---

**Ю. В. Напалкова, Т. Ф. Мамедова**

|  |  |     |
|--|--|-----|
|  | Математическая модель управления трудовыми ресурсами предприятия . . . . . | 167 |
|--|--|-----|

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 1. | Постановка задачи . . . . .                | 167 |
| 2. | Создание базы данных . . . . .             | 167 |
| 3. | Построение управляемого прогноза . . . . . | 168 |

---

**Н. И. Овсянникова**

|  |  |     |
|--|--|-----|
|  | Использование унифицированного разложения Тейлора-Ито для системы стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику эпидемии . . . . . | 171 |
|--|--|-----|

|    |                                     |     |
|----|-------------------------------------|-----|
| 1. | Введение . . . . .                  | 171 |
| 2. | Постановка задачи . . . . .         | 172 |
| 3. | Анализ численного решения . . . . . | 174 |

---

**Д. Г. Рахимов**

|  |  |     |
|--|--|-----|
|  | О вычислении кратных фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций методом ложных возмущений | 180 |
|--|--|-----|

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 1. | Введение . . . . .                                   | 180 |
| 2. | Постановка задачи . . . . .                          | 180 |
| 3. | Сведение к одномерному случаю . . . . .              | 181 |
| 4. | Случай кратного собственного значения с ОЖН. . . . . | 184 |

---

**Г. Ф. Сафина**

|  |  |     |
|--|--|-----|
|  | О задаче сохранения частот осесимметричных колебаний трубы . | 187 |
|--|--|-----|

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 1. | Введение . . . . .   | 187 |
| 2. | Прямая задача по осесимметричным колебаниям оболочки . . . . .                         | 187 |
| 3. | Влияние упругих закреплений оболочки на частоты ее осесимметричных колебаний . . . . . | 188 |
| 4. | Задача сохранения заданных частот колебаний . . . . .                                  | 190 |
| 5. | Заключение . . . . .   | 196 |

---

**С.И. Спивак, А.В. Балаев, И.А. Нуриахметов**

Математическая модель неизотермических автоколебаний в реакции окисления окиси этилена . . . . . 199

1. Постановка задачи . . . . . 199
2. Ход решения . . . . . 200
3. Пример расчета температуры . . . . . 201

---

**С. И. Спивак, А. С. Исмагилова**

Метод анализа информативности кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики . . . . . 203

1. Введение . . . . . 203
2. Графическая интерпретация маршрутов химических реакций . . . . . 203
3. Пример . . . . . 205

---

**М.И. Тимошин**

Использование динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка . . . . . 211

1. Введение . . . . . 211
2. Пример нахождения динамических симметрий ОДУ второго порядка . . . . . 213
3. Пример использования динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка . . . . . 215
4. Решения типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности . . . 217

---

**А. Н. Тында, А. Е. Романов**

Численное решение плоских контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований . . . . . 221

1. Математическая модель . . . . . 221
2. Описание алгоритма . . . . . 223

---

**М.Н. Фаттахов, Р.Р. Исмаилов, Э.Д. Шакирьянов, С.М. Усманов**

Моделирование трехмерной свободно-радикальной полимеризации методом Монте-Карло . . . . . 227

1. Введение . . . . . 227
2. Объект исследования . . . . . 227
3. Описание математической модели . . . . . 228
4. Результаты численного эксперимента . . . . . 230
5. Заключение . . . . . 231

---

**П.А. Шаманаев, В.А. Атряхин**

Построение математической модели прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров . . . . . 234

1. Введение . . . . . 234
  2. Описание модели прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров . . . . . 234
-

**Р. Р. Шангареев**

- Кинетическое описание и моделирование процессов с учетом дезактивации катализатора . . . . . 239
1. Введение . . . . . 239
  2. Постановка задачи . . . . . 240

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

**В. В. Дикусар, Н. В. Зубов, С. В. Зубов**

- Определение вещественного радиуса устойчивости . . . . . 246

**С.А. Дутов, О.А. Зубова, А.И. Иванов**

- Модифицированный метод построения минимального многочлена 250

**Н.В. Зубов, В.В. Дикусар, С.А. Дутов**

- Задача определения минимального числа управляющих воздействий . . . . . 255

**В. И. Зубов, О. А. Зубова, А. И. Иванов**

- Построение определенного решающего правила . . . . . 260

## ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

**С. Н. Лизин, С. А. Федосин**

- Управление данными в корпоративных информационных системах 263
1. Проблема отслеживания изменений . . . . . 263
  2. Транзакционные и нетранзакционные . . . . . 265
  3. Темпоральность в реляционной СУБД . . . . . 266
  4. Заключение . . . . . 268

- Памяти Николая Владимировича Зубова . . . . . 275

- Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО» . . . . . 273

- Алфавитный указатель . . . . . 275

## ОТ РЕДАКЦИИ

В настоящем номере журнал продолжает публикацию работ участников IX конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых. Конференция проводилась в Саранске на базе ГОУВПО «МГУ им. Н. П. Огарёва» 1 – 3 июля 2010 года при поддержке РФФИ, грант №10-01-06048-г.

Редакция журнала желает авторам творческих успехов!

УДК 519.862.7

## Построение поля потребительских предпочтений по торговой статистике

© В.К. Горбунов<sup>1</sup>, А.Г. Ледовских<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматривается обратная задача для обобщённой модели потребительского спроса, заключающаяся в построении векторного поля потребительских предпочтений по торговой статистике. Предлагается алгоритм оценки параметров поля методом наименьших квадратов. Узловые значения поля получаются из условий монотонности, порождающих обобщённую систему неравенств Аффриата.

**Ключевые слова:** Рыночный спрос, поле предпочтений, оценка параметров, обобщённая система неравенств Аффриата.

### 1. Введение

Современная теория спроса [1, 16] построена на основе понятия бинарного отношения предпочтения, определенного на множестве бесконечно делимых товаров и обладающего рядом свойств, основные из которых – полнота, транзитивность и непрерывность. Эти свойства в совокупности обеспечивают существование непрерывной порядковой функции полезности, являющейся индикатором данного отношения предпочтения. Вопрос о существовании и построении функции полезности, адекватной конкретному рынку, решается теоремой Аффриата [8]. Согласно этой теореме существование функции полезности, объясняющей статистический спрос в рамках классической модели, эквивалентно положительной разрешимости некоторой системы линейных неравенств (неравенств Аффриата), определяющей значения такой функции на статистических данных. На основе этой теоремы Х. Вэрианом развит «непараметрический метод» анализа потребительского спроса и решения обратной задачи ПС – построение функции полезности по статистическим данным [21]. В рамках этого метода, в частности, появилась возможность строить аналитические (экономические) индексы потребительского спроса: для однородных предпочтений – инвариантные [18], в общем случае – квазиинвариантные [4].

Многие зарубежные исследователи в последние десятилетия предпринимают попытки пересмотра классической теории потребительского спроса (ПС), основанной на использовании порядковой функции полезности, являющейся аналитическим представлением непрерывного, транзитивного и полного бинарного отношения предпочтений [16]. Большинство из них ограничивается теоретико-множественным уровнем обобщения теории, когда снимается предположение о транзитивности и/или полноте предпочтений и при этом обосновывается существование на доступном множестве благ наилучшего набора [15, 20]. Построению аналитических обобщений классической модели на основе отказа от функции полезности или транзитивности предпочтений посвящены работы [10, 19]. Обобщение Аллена [10] основано на представлении предпочтений через «направление предпочтения» (preference direction), определенное в каждой точке пространства товаров  $\mathbb{R}_+^n$ . Это представление фактически

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; vkgorbunov@mail.ru.

<sup>2</sup>Аспирант кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; ledovskikh\_ag@mail.ru.

является векторным полем  $q : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ , однако Аллен и его последователи [13] не использовали теорию векторных полей и не построили содержательную теорию спроса (сравнительную статику), аналогичную классической теории, основанной на модели максимизации полезности. В теории «нетранзитивного потребителя» Шафера [19] полные, но необязательно транзитивные предпочтения представляются непрерывной и кососимметричной вещественной бифункцией  $r(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ . В транзитивном случае существует такая функция полезности  $u(x)$ , что  $r(x, y) = u(x) - u(y)$ . Содержательная теория такого спроса также не известна.

## 2. Обобщённая модель потребительского спроса

В недавних работах В.К. Горбунова [2, 3, 5] построена обобщённая аналитическая модель, основанная на понятии монотонного векторного поля потребительских предпочтений. В общем случае поле предпочтений может быть непотенциальным.

Напомним [7], поле  $q(x)$  в  $\mathbb{R}^n$  называется *потенциальным*, если существует такая скалярная дифференцируемая функция  $u(x)$ , называемая потенциалом поля, что  $q_i(x) = du(x)/dx_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и это поле называется *монотонно невозрастающим*, если для любых точек  $x$  и  $y$  выполняется неравенство

$$\langle q(x) - q(y), x - y \rangle \leq 0. \quad (2.1)$$

Если это неравенство при  $x \neq y$  строгое, то поле называется монотонно убывающим. Потенциал монотонно невозрастающего поля  $q(x)$  является вогнутой функцией.

**О п р е д е л е н и е 2.1.** [5]. *Векторным полем потребительских предпочтений называется монотонно невозрастающее непрерывное отображение  $q : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ , компоненты которого  $q_i(x)$  имеют смысл относительных ценностей товаров, а их отношения  $q_i(x)/q_j(x)$  являются предельными нормами замещения товара  $j$  товара  $i$ .*

Неотрицательность компонент  $q_i(x)$  в потенциальном случае означает неубывание потенциала. Компоненты  $q_i(x)$  имеют смысл классических предельных полезностей, и свойство монотонного убывания поля соответствует первому закону Госсена классической теории — закону убывания предельной полезности. В случае потенциальности новая модель совпадает с классической<sup>3</sup>. Потенциал  $u(x)$  можно считать порядковой функцией полезности.

Новая модель, как и классическая, позволяет вычислять и анализировать регулярные функции спроса. Она может считаться развитием модели Аллена на основе использования метода сравнительной статики (анализ Слуцкого) и теории векторных полей. Новая модель описывает рациональный выбор ансамбля потребителей некоторого рынка конечных продуктов, рассматриваемого как априорный объект моделирования. При этом поле  $q(x)$  представляет систему предпочтений ансамбля потребителей. Такой подход, предложенный в [6], позволяет избежать известные парадоксы агрегирования покупателей Гормана, Зонншейна, Дебре и Мантеля [16].

Рациональный выбор ансамбля потребителей, имеющих поле предпочтений  $q(x)$  и расходующих на данном рынке в ценовой ситуации  $p$  суммарное количество денег  $e$ , т.е. рыночный спрос  $x(p, e)$ , определяется вместе с множителем  $\lambda$  системой нелинейных

<sup>3</sup>Понятие поля предпочтений использовалось ранее, в частности, П. Самуэльсоном и У. Горманом, но лишь в рамках классической теории, т.е. в потенциальном случае.

уравнений

$$\begin{cases} q_i(x) - \lambda p_i = 0, & i = \overline{1, n}, \\ \langle p, x \rangle - e = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

В случае потенциальности поля система (2.2) совпадает с характеристической системой классической модели ПС. В [5] доказано, что в случае дифференцируемости и строгого убывания поля  $q(x)$  система (2.2) определяет регулярный (однозначный и непрерывно дифференцируемый) спрос  $x(p, e)$ , матрица Слуцкого которого обладает всеми свойствами классической теории (отрицательная полуопределённость, структура нуль-пространства), кроме симметричности. В соответствии с условиями интегрируемости Гурвица-Узавы [12] при этом в общем случае функция полезности, рационализирующая этот спрос, не существует, а в соответствии с результатами [14], спрос модели (2.2) удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения.

### 3. Задача построения поля предпочтений

Для практического использования математической модели, представляющей в общем виде некоторый класс реальных объектов, требуется её идентификация, то есть определение её параметров (числовых или функциональных) так, чтобы расчётные значения переменных, представляющих выделенные характеристики моделируемого объекта, достаточно точно совпадали с их наблюдаемыми значениями. Задачи идентификации моделей также называются обратными задачами.

Любая нетривиальная модель создаётся на основе идеализации реальных объектов, или же абстрагирования от факторов, которые исследователь считает несущественными или недоступными для количественного анализа. Кроме того, наблюдения, как правило, содержат неточности. Из этого следует, что расчётные и реальные значения выделенных характеристик не должны совпадать точно. Наиболее общим методом решения обратных задач является метод наименьших квадратов (МНК). Мы будем использовать этот метод для решения обратной задачи для модели (2.2). Эта задача заключается в построении поля предпочтений  $q(x)$  по торговой статистике

$$\{p^t, x^t : t = \overline{0, T}\}, \quad (3.1)$$

где  $p^t$  – цены и  $x^t$  – количества потребления продуктов за отчётный период  $t$ . Эти данные определяют также потребительские расходы  $e_t = \langle p^t, x^t \rangle$ .

Для выяснения вопроса адекватности обобщённой модели ПС (2.2) реальному поведению конкретных потребителей, представленному статистикой (3.1), требуется выяснить, существует ли поле предпочтений  $q(x)$  такое, что порождаемые им функции спроса  $x(p, e)$  соответствуют этой статистике, т.е.

$$x(p^t, e_t) \approx x^t, \quad t = \overline{0, T}. \quad (3.2)$$

Такое поле будем называть *рационализирующим*, а задачу его построения назовём *обратной задачей обобщённой теории потребительского спроса*. Соотношения (3.2) можно понимать как неявную нелинейную регрессионную модель.

Для прямого применения МНК к регрессии (3.2) следует выбрать некоторый параметрический класс невозрастающих полей  $q(x, w)$ , для которого относительно несложно вычислять расчётный спрос  $x(p, e; w)$ , и параметры поля  $w$  определять из условия минимизации квадратичной невязки регрессионных уравнений (3.2)

$$\varphi(w) = \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^n (x_i(p^t, e_t; w) - x_i^t)^2. \quad (3.3)$$

При этом следует выполнять ограничения параметров  $w$ , обеспечивающие положительность и монотонность (2.1) искомого поля.

Недостатком данного подхода является трудность выбора подходящего класса параметризации искомого поля  $q(x, w)$ , а также алгоритмическая сложность вычисления расчётного спроса  $x(p, e; w)$ . В нетривиальных случаях функционал (3.3) будет сильно нелинейным и определённым алгоритмически. При этом его минимизация при условиях (2.1) будет сложной задачей нелинейного программирования.

#### 4. Обобщённая система Африата её решение

Задача построения поля  $q(x, w)$  в параметрическом классе упрощается на основе модификации подхода С. Африата, лежащего в основе непараметрического анализа спроса в рамках классической модели ПС [1, 9, 21]. Напомним этот метод.

На первом этапе строится система линейных неравенств, определяющая искомую функцию полезности  $u(x)$  и множитель Лагранжа  $\lambda(p, e)$  классической модели ПС на статистических данных (3.1):

$$u_t = u(x^t), \quad \lambda_t = \lambda(p^t, e_t). \tag{4.1}$$

Эти значения называются "числами Африата". Коэффициенты системы неравенств, называемые *кросс-коэффициентами*, определяются данными (3.1):

$$e_{ts} = \langle p^t, x^s \rangle, \quad a_{ts} = e_{ts} - e_t, \quad s, t = \overline{0, T}. \tag{4.2}$$

Согласно теореме Африата [1, 9, 21] существование непрерывной, монотонной и вогнутой функции полезности, рационализирующей эти данные, эквивалентно положительной разрешимости системы линейных неравенств

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \leq 0, \quad t = \overline{0, T}, \quad s \neq t. \tag{4.3}$$

Для обеспечения положительности решения данной системы  $\{u_t, \lambda_t\}$  накладываются условия на две её компоненты решения:  $\lambda_0 = 1, u_0 = e_0$ .

Числа Африата могут использоваться для построения дифференцируемых функций полезности в качестве интерполяционных условий

$$u(x^t) = u_t, \quad \frac{\partial u(x^t)}{\partial x_i} = \lambda_t p_i^t, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{0, T}. \tag{4.4}$$

В [1] описан интерполяционный метод нормальных сплайнов на основе условий (4.4), а также методы барицентрической и ортобарицентрической интерполяции, которые можно отнести к непараметрическим методам. Однако условия (4.4) можно также использовать и для параметрической аппроксимации методом наименьших квадратов. Этот метод имеет свои преимущества, так как в этом случае можно использовать параметрические классы дифференцируемых функций полезности с известными формальными и содержательными свойствами (монотонность, вогнутость, свойства факторных эластичностей и эластичностей замещения). Эти достоинства параметрического МНК мы сохраняем на основе следующей модификации первого этапа непараметрического анализа Африата-Вэриана для построения поля предпочтений по статистике (3.1).

Искомое поле некоторого параметрического класса  $q(x; w)$  должно быть монотонно невозрастающим, т.е. удовлетворять вариационному неравенству (2.1). Подставив в него статистические значения  $x = x^t$  и  $y = x^s$ , получим систему неравенств

$$\langle q(x^t; w) - q(x^s; w), x^t - x^s \rangle \leq 0, \quad s, t = \overline{0, T}. \tag{4.5}$$

В силу предполагаемой рациональности потребительского выбора значения поля в точках спроса должны быть коллинеарными соответствующим ценам, т.е.

$$q^t \equiv q(x^t; w) = \lambda_t p^t, \quad t = \overline{0, T}, \quad (4.6)$$

где  $\lambda_t$  – некоторые положительные числа, являющиеся аналогом множителей Лагранжа классической модели ПС. Очевидно,  $\lambda_t = \lambda(p^t, e_t)$  – множитель системы (2.2).

Подставляя соответствующие значения поля в неравенства (4.5) и используя кросс-коэффициенты (4.2), получим систему линейных неравенств относительно множителей  $\lambda_t$ :

$$\lambda_t a_{ts} + \lambda_s a_{st} \geq 0, \quad s, t = \overline{0, T}, \quad s \neq t. \quad (4.7)$$

Здесь исключены тривиальные равенства  $0 \geq 0$  при  $s = t$ .

Итак, система (4.7) определяет множители  $\lambda_t$ , которые в свою очередь, определяют значения искомого поля в точках статистического спроса (4.6). Условия (4.6) аналогично (4.4) могут использоваться в качестве интерполяционных условий для построения искомого поля предпочтений  $q(x; w)$ , являющегося, как и функция полезности в потенциальном случае, аналитическим представлением потребительских предпочтений данного ансамбля потребителей.

Легко видеть, что система (4.7) является следствием системы Африата (4.3). Это значит, что любое решение системы (4.3) также является решением системы (4.7). Соответственно, будем называть (4.7) *обобщённой системой неравенств Африата*. Обобщённая система (4.7), как и система (4.3), алгебраически однородна. Новая система имеет одну степень свободы, соответствующую инвариантности монотонного поля  $q(x; w)$  относительно умножения на положительную константу. Соответственно, здесь естественно наложить условие на искомую последовательность множителей, связанных системой (4.7), как и в классическом случае,

$$\lambda_0 = 1. \quad (4.8)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а 4.1.** *Если торговая статистика (3.1) является реализацией потребительского спроса  $x(p, e)$ , порождаемого непрерывно дифференцируемым в  $\mathbb{R}_+^n$  полем потребительских предпочтений  $q(x)$  в соответствии с моделью (2.2), то значения  $q^t$  этого поля в точках спроса  $x^t$  представляются в виде  $q^t \equiv q(x^t) = \lambda_t p^t$ ,  $t = \overline{0, T}$ , где значения множителей  $\lambda_t$  составляют положительное решение обобщённой системы неравенств Африата (4.7), коэффициенты которой вычисляются согласно (4.2).*

Эта теорема представляет необходимые условия, которым должно удовлетворять поле, рационализирующее статистику спроса (3.1) в смысле (3.2). Мы пока не имеем доказательства того, что положительная разрешимость системы (4.7) обеспечивает существование поля предпочтений, рационализирующего статистику (3.1). Однако для математического моделирования нетривиальных явлений типична ситуация, когда вычислительные задачи формулируются на основе необходимых условий, которым должен удовлетворять искомый объект, в нашем случае – поле предпочтений.

Для построения поля предпочтений в некотором параметрическом классе  $q(x; w)$  можно найти некоторое положительное решение системы (4.7) с условием (4.8) и по интерполяционным условиям (4.6) методом НК построить оценки параметров поля  $w$ .

Система неравенств (4.7) в совместном случае имеет многогранное выпуклое множество решений. В общем случае оно может быть неограниченным. На основе опыта решения обратной задачи для классической модели ПС [4] поставим задачу поиска

набора множителей  $\lambda_t$ , наиболее близкого набору  $\lambda_t^F$ , определяемому статистическими индексами цен Фишера для ситуаций потребления  $(p^0, x^0)$  и  $(p^t, x^t)$ :

$$F_{0t}^p = \sqrt{\frac{e_{t0}e_t}{e_0e_{0t}}}.$$

Подставив эти индексы в левые части формул для инвариантных индексов цен

$$P_{st} = \frac{\lambda_s}{\lambda_t},$$

получим «пробные» множители

$$\lambda_t^F = \frac{1}{F_{0t}^p}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (4.9)$$

Критерием качества решения системы (4.7), (4.8) будем считать квадратичный функционал

$$\varphi(\lambda) = \sum_{t=1}^T (\lambda_t - \lambda_t^F)^2. \quad (4.10)$$

Таким образом, поставлена задача квадратичного программирования, заключающаяся в минимизации функционала (4.10) при условиях (4.7), (4.8). Такая задача называется *задачей о нормальном решении* системы неравенств (4.7).

## 5. Построение поля предпочтений

Решив задачу о нормальном решении системы (4.7) с условием (4.8) и пробным набором множителей (4.9), мы получим интерполяционные условия для построения поля предпочтений – правые части уравнений (4.6). Ввиду неизбежных погрешностей моделирования и исходных данных, систему (4.6) следует решать методом НК, т.е. минимизацией функционала квадратичной невязки

$$\psi(w) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n [\lambda_t p_i^t - q_i(x^t, w)]^2. \quad (5.11)$$

На параметры  $w$  в общем случае следует накладывать ограничения, обеспечивающие положительность и монотонность поля (2.1).

В прикладной теории потребительского спроса, ориентированной на классическую модель ПС, имеется значительный опыт построения функций полезности и/или функций спроса [17, 11]. При этом были выявлены достаточно простые, но и достаточно гибкие системы функций: функция Джири-Стоуна, порождающая «линейные системы спроса», «транслоговая» функция и другие. Ориентируясь на этот опыт, мы начинаем исследование классов полей предпочтений, подобным этим системам и совпадающим с ними в частном потенциальном случае. На данном этапе мы исследовали два класса полей.

### 1. Линейное поле

$$q_i(x) = q_{i0} + \sum_{j=1}^n q_{ij}x_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.12)$$

Здесь  $q_{i0} \geq 0$  и матрица

$$Q \equiv q_{ij} = \frac{\partial q(x)}{\partial x}$$

должна быть отрицательно полуопределена, чтобы обеспечить монотонное неубывание поля (2.1). Ввиду несимметричности  $Q$  это означает, что отрицательно полуопределена должна быть симметричная матрица  $Q + Q^T$ . Для симметричных матриц известен детерминантный критерий Сильвестра отрицательной определённости.

## 2. Обобщённо-гиперболическое поле

$$q_i(x) = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.13)$$

Здесь  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $\sum \alpha_i \equiv \mu \leq 1$ ,  $\beta_{ii} = 1$ ,  $|\beta_{ij}| \ll 1$ . Это поле в случае  $\beta_{ij} = 0, i \neq j$  совпадает с градиентным полем функции Кобба-Дугласа, которое при  $\mu < 1$  будет монотонно убывающим. Следовательно, это свойство сохранится и для непотенциального поля (5.13) при достаточно малых  $\beta_{ij}, i \neq j$ .

Для демонстрации описанного метода построения поля по статистике (3.1) мы использовали два примера неинтегрируемого (в нашей терминологии – непотенциального) спроса, приведенных в упомянутых выше работах Katzner (1971) [13] и Shafer (1974) [19].

### 1. Спрос Катцнера (спрос K):

$$\begin{aligned} x_1(p, e) &= \frac{1}{13} \frac{-4p_1 - p_2 + 18p_3}{p_3}, \\ x_2(p, e) &= \frac{1}{13} \frac{-3p_1 - 4p_2 + 20p_3}{p_3}, \\ x_3(p, e) &= \frac{1}{13} \frac{4p_1^2 + 4p_2^2 + 4p_1p_2 - 18p_1p_3 - 20p_2p_3 + 13ep_3}{p_3}. \end{aligned}$$

### 2. Спрос Шафера (спрос Sh):

$$\begin{aligned} x_1(p, e) &= \frac{e}{2p_1(1 + \sqrt{p_2/p_1})}, \\ x_2(p, e) &= \frac{e}{2p_2(1 + \sqrt{p_2/p_1})}, \\ x_3(p, e) &= \frac{e}{p_3(1 + \sqrt{p_1/p_2})}. \end{aligned}$$

Задав условную динамику цен и расходов для  $T = 34$ , вычислим по приведенным формулам количества покупок. Полученные результаты моделирования статистики (3.1) приведены в таблице 1.

Результаты минимизации функционала (5.11) следующие. Обозначим полученный вектор параметров для обоих примеров  $\hat{w}$ . Для линейного поля (5.12) и спроса  $K$  получены следующие компоненты этого вектора:

$$\hat{q}_{01} = 11, 16, \quad \hat{q}_{02} = 10, 51, \quad \hat{q}_{03} = 3, 26,$$

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $e$    | К     |       |       | Sh    |       |       |
|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       |       |       |        | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| 2,00  | 6,00  | 3,00  | 100,00 | 1,03  | 0,77  | 31,11 | 9,15  | 3,05  | 21,13 |
| 2,04  | 5,76  | 3,03  | 101,00 | 1,03  | 0,80  | 31,12 | 9,24  | 3,27  | 20,90 |
| 2,08  | 5,53  | 3,06  | 102,01 | 1,04  | 0,83  | 31,14 | 9,32  | 3,51  | 20,66 |
| 2,12  | 5,31  | 3,09  | 103,03 | 1,04  | 0,85  | 31,16 | 9,40  | 3,76  | 20,42 |
| 2,16  | 5,10  | 3,12  | 104,06 | 1,05  | 0,88  | 31,18 | 9,48  | 4,03  | 20,18 |
| 2,21  | 4,89  | 3,15  | 105,10 | 1,05  | 0,90  | 31,20 | 9,56  | 4,32  | 19,94 |
| 2,25  | 4,70  | 3,18  | 106,15 | 1,05  | 0,92  | 31,23 | 9,64  | 4,62  | 19,69 |
| 2,30  | 4,51  | 3,22  | 107,21 | 1,06  | 0,94  | 31,26 | 9,72  | 4,95  | 19,45 |
| 2,34  | 4,33  | 3,25  | 108,29 | 1,06  | 0,96  | 31,29 | 9,79  | 5,30  | 19,20 |
| 2,39  | 4,16  | 3,28  | 109,37 | 1,06  | 0,98  | 31,32 | 9,87  | 5,68  | 18,96 |
| 2,44  | 3,99  | 3,31  | 110,46 | 1,07  | 1,00  | 31,35 | 9,94  | 6,08  | 18,71 |
| 2,49  | 3,83  | 3,35  | 111,57 | 1,07  | 1,01  | 31,38 | 10,01 | 6,50  | 18,46 |
| 2,54  | 3,68  | 3,38  | 112,68 | 1,07  | 1,03  | 31,41 | 10,08 | 6,95  | 18,21 |
| 2,59  | 3,53  | 3,41  | 113,81 | 1,07  | 1,05  | 31,44 | 10,15 | 7,44  | 17,96 |
| 2,64  | 3,39  | 3,45  | 114,95 | 1,07  | 1,06  | 31,47 | 10,21 | 7,95  | 17,71 |
| 2,69  | 3,25  | 3,48  | 116,10 | 1,07  | 1,07  | 31,50 | 10,27 | 8,50  | 17,45 |
| 2,75  | 3,12  | 3,52  | 117,26 | 1,08  | 1,09  | 31,53 | 9,15  | 3,05  | 21,13 |
| 2,80  | 3,00  | 3,55  | 118,43 | 1,08  | 1,10  | 31,56 | 9,24  | 3,27  | 20,90 |
| 2,86  | 2,88  | 3,59  | 119,61 | 1,08  | 1,11  | 31,59 | 9,32  | 3,51  | 20,66 |
| 2,91  | 2,76  | 3,62  | 120,81 | 1,08  | 1,12  | 31,61 | 9,40  | 3,76  | 20,42 |
| 2,97  | 2,65  | 3,66  | 122,02 | 1,08  | 1,13  | 31,64 | 9,48  | 4,03  | 20,18 |
| 3,03  | 2,55  | 3,70  | 123,24 | 1,08  | 1,14  | 31,67 | 9,56  | 4,32  | 19,94 |
| 3,09  | 2,44  | 3,73  | 124,47 | 1,08  | 1,15  | 31,69 | 9,64  | 4,62  | 19,69 |
| 3,15  | 2,35  | 3,77  | 125,72 | 1,08  | 1,15  | 31,71 | 9,72  | 4,95  | 19,45 |
| 3,22  | 2,25  | 3,81  | 126,97 | 1,08  | 1,16  | 31,73 | 9,79  | 5,30  | 19,20 |
| 3,28  | 2,16  | 3,85  | 128,24 | 1,08  | 1,17  | 31,76 | 9,87  | 5,68  | 18,96 |
| 3,35  | 2,08  | 3,89  | 129,53 | 1,08  | 1,18  | 31,78 | 9,94  | 6,08  | 18,71 |
| 3,41  | 1,99  | 3,92  | 130,82 | 1,08  | 1,18  | 31,80 | 10,01 | 6,50  | 18,46 |
| 3,48  | 1,91  | 3,96  | 132,13 | 1,08  | 1,19  | 31,81 | 10,08 | 6,95  | 18,21 |
| 3,55  | 1,84  | 4,00  | 133,45 | 1,08  | 1,19  | 31,83 | 10,15 | 7,44  | 17,96 |
| 3,62  | 1,76  | 4,04  | 134,78 | 1,08  | 1,20  | 31,85 | 10,21 | 7,95  | 17,71 |
| 3,70  | 1,69  | 4,08  | 136,13 | 1,07  | 1,20  | 31,86 | 10,27 | 8,50  | 17,45 |
| 3,77  | 1,62  | 4,12  | 137,49 | 1,07  | 1,21  | 31,88 | 9,15  | 3,05  | 21,13 |
| 3,84  | 1,56  | 4,17  | 138,87 | 1,07  | 1,21  | 31,89 | 9,24  | 3,27  | 20,90 |
| 3,92  | 1,50  | 4,21  | 140,26 | 1,07  | 1,21  | 31,90 | 9,32  | 3,51  | 20,66 |

Таблица 1: Моделируемая статистика

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -12,6 & 3,25 & 0,041 \\ 9,96 & -11,67 & -0,18 \\ -0,42 & 0,33 & -0,003 \end{pmatrix}.$$

При этом невязка  $\psi_K(\hat{w}) = 0,00002$ .

Для спроса Шафера и линейного поля  $\psi_{Sh}(\hat{w}) = 2,46$ . Величина относительной погрешности предсказания не превышает величин 0,01% и 11% соответственно. Следовательно, линейное поле лучше описывает предпочтения потребителей, порождающие статистику  $K$ .

Для обобщённо-гиперболического поля (5.13) размеры невязок равны соответственно  $\psi_K(\hat{w}) = 296$  и  $\psi_{Sh}(\hat{w}) = 881$ .

Таким образом, в рамках двух предложенных классов полей для приведенных примеров более адекватным является линейное поле (5.12).

Работа поддержана целевой программой Минобразования РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы), проект 2.1.3/6763 «Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В.К. Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. — М.: Экономика, 2004. — 174 с.
2. Горбунов В.К. Модель потребительского спроса без функции полезности // Труды СВМО. — 2005. — Т. 7. — № 1. — С. 45-51.
3. Горбунов В.К. Обобщённая модель потребительского спроса и выявленное предпочтение // Труды СВМО. — 2007. — Т. 9. — № 2. — С. 37-43.
4. Горбунов В.К., Козлова Л.А. Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2008. — № 3 (19).
5. Горбунов В.К. Модель потребительского спроса, основанная на векторном поле предпочтений // Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика. — № 1. — С. 67-79
6. Горбунов В.К. Особенности агрегирования потребительского спроса // ЖЭТ. — 2009. — № 1. — С. 85-94.
7. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
8. Afriat S.N. The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. — 1967. — V. 8. — No. 1. — P. 67-77.
9. Afriat S.N. Efficiency estimates of production functions // International Economic Review. — 1972. — V. 13. — P. 568-598.
10. Allen R.G.D. The foundation of a mathematical theory of exchange // Economica. — 1932. — V. 12. — P. 197-226.
11. Deaton A., Muellbauer J. An Almost Ideal Demand System // The American Economic Review. — 1980. — V. 70. — №. 3. — P. 312-326.

12. Hurwicz L., Uzawa H. On the integrability of demand functions / In: Chipman J.S. et al. (Eds). Preference, Utility and Demand. – New York: Harcourt Brace, 1971. – Ch. 6.
13. Katzner D.W. Demand and exchange analysis in the absence of integrability conditions / In: Chipman J.S. et al. (Eds). Preference, Utility and Demand. – New York: Harcourt Brace, 1971. – Ch. 10. – P. 254-270.
14. Kihlstrom R., Mas-Colell A., Sonnenschein H. The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference // *Econometrica*. – 1976. – V. 44. – №5. – P. 971-978.
15. Mariotti M. What kind of preference maximization does the weak axiom of revealed preference characterize? // *Economic Theory*. – 2008. – V. 35. – P. 403-406.
16. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory*. – New York: Oxford University Press, 1995. – 1008 p.
17. Pollak, R.A., Wales, T.J. Estimation of the Linear Expenditure System // *Econometrica*. – 1969. – V. 37. – №4. – P. 611-628.
18. Samuelson P.A. and Swamy S. Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis // *The American Economic Review*. – 1974. – V. 64. – No. 4. – P. 566-593.
19. Shafer W.J. The nontransitive consumer // *Econometrica*. – 1974. – V. 42. – P. 913-919.
20. Quah J. K-H. Weak axiomatic demand theory // *Economic theory*. – 2006. – V. 29. – P. 677-699.
21. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // *Econometrica*. – 1982. – V. 50. – №4.

# The construction of a preference field on a trade statistics

© V.K. Gorbunov<sup>4</sup>, A.G. Ledovskikh<sup>5</sup>

**Abstract.** An inverse problem for the generalized model of the consumer demand, consisting in construction of a vector field of consumer preferences on trade statistics is considered. The least squares algorithm of an estimation of parameters of the field is proposed. Node values of the field are obtained from the conditions of the monotony generating generalized system of inequalities.

**Key Words:** Market demand, preference field, parameters estimation, generalized Afriat inequalities system.

---

<sup>4</sup>Chief of Mathematical Methods and Information Technology Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vkgorbunov@mail.ru.

<sup>5</sup>Postgraduate student of Mathematical Methods and Information Technology Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; ledovskikh\_ag@mail.ru.

УДК 519.6:517.962

# Разностные аналоги некоторых мультипликативных неравенств О.А. Ладыженской для функциональных

## пространств $W_2^1(\Omega)$ , $W_{2,0}^2(\Omega)$

© Ф.В. Лубышев<sup>1</sup>, М.Э. Файрузов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Даются доказательства ряда мультипликативных неравенств для пространств сеточных функций  $W_2^1(\bar{\omega})$ ,  $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$ , заданных на сетке  $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$ , которые являются сеточными аналогами некоторых мультипликативных неравенств О.А. Ладыженской для пространств  $W_2^1(\Omega)$ ,  $W_{2,0}^2(\Omega)$ .

**Ключевые слова:** сетка, сеточная функция, конечные разности, теорема вложения.

## 1. Введение

При исследовании краевых задач, задач оптимального управления, обратных задач для уравнений математической физики, чрезвычайно большую роль играет теория вложения функциональных пространств [1]-[4]. При этом наиболее тонкие зависимости между функциональными пространствами  $W_p^l(\Omega)$ ,  $L_q(\Omega)$ ,  $C^m(\Omega)$  отражают так называемые "мультипликативные" неравенства [2]-[4]. Проблема численного решения прямых и обратных задач, задач оптимального управления для уравнений математической физики, приводит к необходимости их конечномерных аппроксимаций методом сеток или методом конечных элементов [5]-[10]. При этом, при исследовании сходимости и точности аппроксимаций, наряду с теоремами вложения Соболева и мультипликативными неравенствами для пространств функций непрерывного аргумента, чрезвычайно большую роль играют их разностные аналоги.

Здесь мы дадим доказательства ряда мультипликативных неравенств для пространств сеточных функций  $W_2^1(\omega)$ ,  $W_{2,0}^2(\omega)$ , заданных на сетке  $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$ , которые являются сеточными аналогами некоторых мультипликативных неравенств О.А. Ладыженской для пространств  $W_2^1(\Omega)$ ,  $W_{2,0}^2(\Omega)$  функций непрерывного аргумента. Установленные в работе разностные аналоги мультипликативных неравенств и следствия из них могут найти широкое приложение при доказательстве центральных положений о разрешимости и единственности решения сеточных краевых задач, обосновании сходимости и точности разностных аппроксимаций уравнений математической физики, обратных задач и задач оптимального управления для уравнений математической физики, сходимость итерационных процессов.

<sup>1</sup>Профессор кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

<sup>2</sup>Доцент кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

## 2. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения

Для функций  $u(x)$  непрерывного аргумента, заданных в  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , введем полунормы и нормы Соболева [1]-[4]:

$$|u|_{W_2^s(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} \sum_{s_1+s_2=s} \left( \frac{\partial^{s_1} u}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2}} \right)^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2},$$

$$|u|_{W_2^0(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|u\|_{W_2^s(\Omega)}^2 = \sum_{k=0}^s |u|_{W_2^k(\Omega)}^2.$$

Здесь символом  $|u|_{W_2^s(\Omega)}$  обозначена полунорма в  $W_2^s(\Omega)$ ,  $s > 0$ .

В частности, нормы в  $W_2^1(\Omega)$  и  $W_2^2(\Omega)$  определяются равенствами

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 + u^2 \right] dx_1 dx_2,$$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 = |u|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad |u|_{W_2^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right)^2 dx_1 dx_2.$$

Через  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ , как обычно, мы обозначаем подпространство пространства  $W_2^1(\Omega)$ , плотным множеством в котором является совокупность  $\overset{\circ}{C}^{\infty}(\Omega)$  всех бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций. Через  $W_{2,0}^2(\Omega)$  обозначаем подпространство пространства  $W_2^2(\Omega)$ , плотным множеством в котором являются все дважды непрерывно дифференцируемые в  $\overline{\Omega}$  функции, равные нулю на  $\partial\Omega$  – границе области  $\Omega$ . Пусть  $\overline{\Omega}$  – прямоугольник  $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ .

В данном случае  $W_{2,0}^2(\Omega)$  совпадает с  $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ . В дальнейшем нам понадобятся сетки на  $[0, l_{\alpha}]$ ,  $\alpha = 1, 2$  и прямоугольнике  $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}$ :  $\overline{\omega}_{\alpha} = \{x_{\alpha}^{i_{\alpha}} = i_{\alpha} h_{\alpha} \in [0, l_{\alpha}] : i_{\alpha} = \overline{0}, N_{\alpha}, N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha}\}$ ,  $\omega_{\alpha} = \overline{\omega}_{\alpha} \cap (0, l_{\alpha})$ ,  $\omega_{\alpha}^{+} = \overline{\omega}_{\alpha} \cap (0, l_{\alpha}]$ ,  $\omega_{\alpha}^{-} = \overline{\omega}_{\alpha} \cap [0, l_{\alpha})$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ ,  $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ ;  $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$ ,  $\overset{\circ}{\gamma} = (\overline{\omega}_1 \setminus \omega_1) \times (\overline{\omega}_2 \setminus \omega_2)$  – множество угловых точек прямоугольника  $\overline{\Omega}$ ,  $\gamma_{\pm\alpha} = \{x \in \gamma \setminus \overset{\circ}{\gamma} : \cos(n, x_{\alpha}) = \pm 1\}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , где  $n$  – внешняя нормаль к границе  $\Gamma = \partial\Omega$ ;  $\gamma_{\alpha} = \gamma_{-\alpha} \cup \gamma_{+\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $\omega^{(\pm 1)} = \omega_1^{\pm} \times \overline{\omega}_2$ ,  $\omega^{(\pm 2)} = \overline{\omega}_1 \times \omega_2^{\pm}$ ,  $\omega^{+} = \omega_1^{+} \times \omega_2^{+}$ ,  $\omega^{-} = \omega_1^{-} \times \omega_2^{-}$ .

Введем также средний шаг сетки  $\overline{\omega}_{\alpha}$ :  $\overline{h}_{\alpha} = \overline{h}(x_{\alpha}) = h_{\alpha}$ , если  $x \in \omega_{\alpha}$  и  $\overline{h}_{\alpha} = 0.5h_{\alpha}$ , если  $x_{\alpha} = 0, l_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Для функций  $y(x)$ , заданных на сетке  $\overline{\omega}$  или на ее частях  $\omega_* \subset \overline{\omega}$  будем использовать следующие обозначения:

$$y = y(x) = y(x_1, x_2), \quad y^{(\pm 1_1)}(x) = y(x_1 \pm h_1, x_2), \quad y^{(\pm 1_2)}(x) = y(x_1, x_2 \pm h_2);$$

$$y_{x_{\alpha}} = y_{x_{\alpha}}(x) = \frac{y^{(+1_{\alpha})} - y}{h_{\alpha}} = D_{\alpha} y, \quad y_{\overline{x}_{\alpha}} = y_{\overline{x}_{\alpha}}(x) = \frac{y - y^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}} = \overline{D}_{\alpha} y.$$

Это правые и левые разностные отношения по  $x_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;

$$y_{\overline{x}_{\alpha} x_{\alpha}} = y_{\overline{x}_{\alpha} x_{\alpha}}(x) = \frac{y^{(+1_{\alpha})} - 2y + y^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}^2} = D_{\alpha} \overline{D}_{\alpha} y, \quad \alpha = 1, 2.$$

Множество сеточных функций, заданных на сетке  $\overline{\omega}$  будем обозначать через  $H_h$ , а его подмножество, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на  $\gamma_h$  – через  $\overset{\circ}{H}_h$ .

Введем сеточные аналоги градиента

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$$

с помощью соотношений

$$\overset{(+)}{\nabla} y = (D_1 y, D_2 y) = (y_{x_1}, y_{x_2}), \quad \overset{(-)}{\nabla} y = (\bar{D}_1 y, \bar{D}_2 y) = (y_{\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_2}),$$

а также следующие операторы сеточного дифференцирования  $\Lambda_\alpha$  второй производной по направлению  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  и  $\Lambda$  – пятиточечный разностный оператор Лапласа

$$\Lambda_\alpha y = D_\alpha \bar{D}_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = \sum_{\alpha=1}^2 D_\alpha \bar{D}_\alpha y = \sum_{\alpha=1}^2 y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Далее, обозначим

$$|\overset{(+)}{\nabla} y| = (y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2)^{1/2}, \quad |\overset{(-)}{\nabla} y| = (y_{\bar{x}_1}^2 + y_{\bar{x}_2}^2)^{1/2}.$$

Для сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}$  и ее частях введем следующие полунормы и нормы:

$$\|y\|_{C(\bar{\omega})} = \|y\|_{L_\infty(\bar{\omega})} = \max_{\bar{\omega}} |y(x)|, \quad \|y\|_{L_2(\bar{\omega})}^2 = \sum_{\bar{\omega}} h_1 h_2 y^2(x),$$

$$\|y_{\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2)}^2 = \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1}^2(x), \quad \|y_{\bar{x}_2}\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \omega_2^+)}^2 = \sum_{\bar{\omega}_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_2}^2(x),$$

$$|y|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 = \|y_{\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2)}^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \omega_2^+)}^2,$$

$$\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 = |y|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 + \|y\|_{L_2(\bar{\omega})}^2,$$

$$\|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega_1 \times \bar{\omega}_2)}^2 = \|\Lambda_1 y\|_{L_2(\omega_1 \times \bar{\omega}_2)}^2 = \sum_{\omega_1 \times \bar{\omega}_2} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_1}^2(x),$$

$$\|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \omega_2)}^2 = \|\Lambda_2 y\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \omega_2)}^2 = \sum_{\bar{\omega}_1 \times \omega_2} h_1 h_2 y_{\bar{x}_2 x_2}^2(x),$$

$$\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2 = \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2(x),$$

$$|y|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 = \|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega_1 \times \bar{\omega}_2)}^2 + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \omega_2)}^2 + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2,$$

$$\|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 = |y|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 + \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2.$$

Здесь  $\|y\|_{C(\bar{\omega})}$  – дискретный аналог чебышевской нормы  $\|y\|_{C(\Omega)}$ ;  $\|y\|_{W_2^s(\bar{\omega})}$  – дискретные аналоги соболевских норм  $\|y\|_{W_2^s(\Omega)}$ ,  $s = 0, 1, 2$ , а  $|y|_{W_2^s(\bar{\omega})}$  – разностные аналоги полунорм  $|y|_{W_2^s(\Omega)}$  в соболевских пространствах  $W_2^s(\Omega)$ ,  $s = 1, 2$ .

Пусть теперь  $\overset{\circ}{H}_h = \{y(x) : x \in \bar{\omega}, y(x) = 0, x \in \gamma\}$  – подмножество из  $H_h$ , состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на  $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ . Для сеточных функций из множества  $\overset{\circ}{H}_h$  введем скалярные произведения и нормы:

$$(y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_{L_2(\omega)}^2 = (y, y)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} h_1 h_2 y^2(x), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 &= \|y\|_A^2 = (Ay, y)_{L_2(\omega)} = \|y_{\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2)}^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1 \times \omega_2^+)}^2, \\ \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} &= \|y\|_{A^2}^2 = \|Ay\|_{L_2(\omega)}^2 = \|y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}\|_{L_2(\omega)}^2 = \|A_1 y\|_{L_2(\omega)}^2 + \|A_2 y\|_{L_2(\omega)}^2 + \\ &+ 2(A_1 y, A_2 y)_{L_2(\omega)} = \|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_{L_2(\omega)}^2 + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}. \end{aligned}$$

Здесь  $A$  – разностный оператор, определенный в пространстве  $\overset{\circ}{H}_h$  формулами:

$$A = A_1 + A_2, \quad A_\alpha y = -\Delta y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Нетрудно убедиться, что разностные операторы  $A_1$  и  $A_2$  являются самосопряженными, положительно определенными и перестановочными в  $\overset{\circ}{H}_h$  в смысле скалярного произведения (2.1):  $A_\alpha = A_\alpha^* > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ . Так что оператор  $A = A_1 + A_2$  является самосопряженным и положительно определенным в  $\overset{\circ}{H}_h$  в смысле скалярного произведения (2.1).

Кроме того, при определении нормы  $\|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}$  мы негласно воспользовались тождеством

$$(A_1 y, A_2 y)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} h_1 h_2 = \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} h_1 h_2 = \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)},$$

в справедливости которого для  $\forall y \in \overset{\circ}{H}_h$  можно убедиться, используя формулы суммирования по частям.

Заметим, что сеточная норма  $\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^{\circ}$  отличается от стандартной сеточной нормы  $\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}$ , определенной выше. Однако нетрудно убедиться, что эти сеточные нормы эквивалентны для функций, обращающихся в нуль на  $\gamma_h = \bar{\omega} \setminus \omega$ .

Действительно, так как для любой сеточной функции  $y(x) \in \overset{\circ}{H}_h$  справедливо неравенство (разностный аналог неравенства Фридрикса)

$$\|y\|_{L_2(\omega)}^2 \leq C_\Omega^2 \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2, \quad C_\Omega^2 = \left( \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}, \quad (2.2)$$

то как следствие из этого неравенства, получим, что в пространстве  $\overset{\circ}{H}_h$  полунорма  $|y|_{W_2^1(\bar{\omega})} \equiv \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^{\circ}$  определяет норму, эквивалентную норме  $\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}$ , так как справедливы оценки

$$(1 + C_\Omega^2)^{-1} \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2.$$

Кроме того, из (2.2) следует, что оператор  $A$  является положительно определенным:

$$(Ay, y)_{L_2(\omega)} = \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 \geq C_\Omega^{-2} \|y\|_{L_2(\omega)}^2.$$

Заметим также, что сеточная норма  $\|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}$  отличается от стандартной сеточной нормы  $\|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}$ , определенной выше. Однако нетрудно убедиться, что в пространстве  $\overset{\circ}{H}_h$  сеточных функций, обращающихся в нуль на границе  $\gamma_h = \bar{\omega} \setminus \omega$ , полунорма  $|y|_{W_2^2(\bar{\omega})} \equiv \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}$  эквивалентна норме  $\|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}$ .

Действительно, можно показать, что справедлива оценка

$$\|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 = |y|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{8} \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2. \quad (2.3)$$

Далее, применяя неравенство (2.2) к оценке неравенства (2.3), получим

$$C_{\Omega}^{-2} \|y\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{8} \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2. \quad (2.4)$$

Используя теперь неравенства (2.3), (2.4), после некоторых оценок, установим неравенство

$$\frac{16}{16 + (l_1^2 + l_2^2)(1 + C_{\Omega}^2)} \|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2.$$

То есть для сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$  и обращающихся в нуль на  $\gamma_h$ , сеточные нормы  $\|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}$  и  $\|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}$  эквивалентны.

Вводя на множестве сеточных функций  $\mathring{H}_h$  различные нормы  $\|y\|_{L_2(\omega)}$ ,  $\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}$ ,  $\|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}$ , мы превратили это множество в нормированные пространства, которые обозначили через  $L_2(\omega)$ ,  $W_2^1(\bar{\omega})$ ,  $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$  соответственно.

Нетрудно видеть, что сеточную норму  $\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}$  в пространстве  $\mathring{H}_h$  можно записать также в виде

$$\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 = (Ay, y)_{L_2(\omega)} = \sum_{\alpha=1}^2 \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2 = \left\| \overset{(-)}{\nabla} y \right\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2.$$

### 3. Сеточные аналоги некоторых мультипликативных неравенств Ладыженской

Справедливы следующие лемма и следствие [2]:

**Л е м м а 3.1.** Для любой функции  $u(x) \in W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ , где  $\Omega$  – открытая выпуклая ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$ , справедливо следующее мультипликативное неравенство Ладыженской

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla u|^4 d\Omega \right)^{1/2} \leq (2 + \sqrt{2}) \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \left( \int_{\Omega} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

где

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad |\nabla u| = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

**С л е д с т в и е 3.1.** Имеет место неравенство

$$\|\nabla u\|_{L_4(\Omega)} \leq (2 + \sqrt{2})^{1/2} C_0^{1/2}(\Omega) |u|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \forall u \in W_{2,0}^2(\Omega),$$

где

$$\|\nabla u\|_{L_4(\Omega)}^4 = \int_{\Omega} |\nabla u|^4 d\Omega; \quad |u|_{W_2^2(\Omega)}^2 \equiv \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)^2 d\Omega$$

– полунорма в Соболевском пространстве  $W_2^2(\Omega)$ , которая в пространстве  $W_{2,0}^2(\Omega)$  эквивалентна стандартной норме  $\|u\|_{W_2^2(\Omega)}$ ,  $C_0(\Omega) = \text{Const} > 0$  из хорошо известного утверждения [4]: функции из  $W_{2,0}^2(\Omega)$  суть непрерывные функции  $x$ , если размерность пространства  $\mathbb{R}^n$  не более 3, причем для них справедливо неравенство

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_0(\Omega) |u|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \forall u \in W_{2,0}^2(\Omega).$$

Справедливы следующие разностные аналоги леммы 3.1 и следствия 3.1.

**Л е м м а 3.2.** Для любой сеточной функции  $y(x)$ , заданной на сетке  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  и обращающейся в нуль на границе  $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ , справедлив сеточный аналог мультипликативного неравенства (3.1)

$$\left( \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 \left| \overset{(-)}{\nabla} y \right|^4 \right)^{1/2} \leq 8 \|y\|_{C(\bar{\omega})} \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})},$$

где  $\overset{(-)}{\nabla} y = (y_{\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_2}) = (\bar{D}_1 y, \bar{D}_2 y)$  – разностный аналог градиента  $\nabla u$ ;  $\left| \overset{(-)}{\nabla} y \right| = (y_{\bar{x}_1}^2 + y_{\bar{x}_2}^2)^{1/2}$ ;

$$\|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}^2 = \sum_{\omega_1 \times \omega_2} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 x_1}^2 + y_{\bar{x}_2 x_2}^2) + 2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2$$

– сеточный аналог выражения

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)^2 d\Omega \equiv \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}^2,$$

определяющего в Соболевском пространстве  $W_2^2(\Omega)$  полунорму, которая в пространстве  $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  эквивалентна стандартной норме  $\|u\|_{W_2^2(\Omega)}$ .

**С л е д с т в и е 3.2.** Для любой сеточной функции  $y(x)$ , заданной на сетке  $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$  и обращающейся в нуль на границе  $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ , имеет место неравенство

$$\left\| \overset{(-)}{\nabla} y \right\|_{L_4(\omega_1^+ \times \omega_2^+)} \leq 2\sqrt{2} C_1^{1/2}(\Omega) \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})},$$

где

$$\left\| \overset{(-)}{\nabla} y \right\|_{L_4(\omega_1^+ \times \omega_2^+)} = \left( \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 \left| \overset{(-)}{\nabla} y \right|^4 \right)^{1/4},$$

а  $C_1(\Omega) = Const > 0$  из сеточного аналога неравенства (2.3), не зависящая от  $y$  [5]:

$$\|y\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_1(\Omega) \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}, \quad C_1(\Omega) = \frac{l_0^2}{2(l_1 l_2)^{1/2}}, \quad l_0 = \max\{l_1, l_2\}.$$

Справедливы следующие лемма и следствие [4]

**Л е м м а 3.3.** Для любой функции  $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ , где  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$ , справедливы следующие мультипликативные неравенства Ладыженской

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq 4 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)}^2, \quad (3.2)$$

где

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^4(x) d\Omega \right)^{1/4}.$$

**С л е д с т в и е 3.3.** *Имеет место неравенство*

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leq (2\tilde{C}_\Omega^2)^{1/4} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega),$$

где  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$ , а  $\tilde{C}_\Omega = \text{Const} > 0$  (зависящая лишь от области  $\Omega$ ) из неравенства Фридрикса

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \tilde{C}_\Omega^2 \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega).$$

Справедливы следующие разностные аналоги леммы 3.3 и следствия 3.3.

**Л е м м а 3.4.** *Для любой сеточной функции  $y(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\bar{\omega})$ , заданной на двумерной сетке  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ , имеют место следующие сеточные аналоги мультипликативных неравенств (3.2)*

$$\|y\|_{L_4(\omega)}^4 \leq 4 \|y\|_{L_2(\omega)}^2 \|y_{\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega)}^2 \|y_{\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq 2 \|y\|_{L_2(\omega)}^2 \|y\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\bar{\omega})}^2,$$

где

$$\|y\|_{L_4(\omega)}^4 = \sum_{\omega} h_1 h_2 y^4(x).$$

**С л е д с т в и е 3.4.** *Имеет место неравенство*

$$\|y\|_{L_4(\omega)} \leq (2C_\Omega^2)^{1/4} \|y\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\bar{\omega})}, \quad \forall y \in \overset{\circ}{W}_2^1(\bar{\omega}),$$

где  $y(x)$  – сеточная функция, заданная на сетке  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  и обращающаяся в нуль на  $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ , а  $C_\Omega = \text{const} > 0$  из сеточного аналога неравенства Фридрикса

$$\|y\|_{L_2(\omega)}^2 \leq C_\Omega^2 \|y\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\bar{\omega})}^2, \quad C_\Omega^2 = \left( \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. - 334с.
2. Ладыженская О.А., Уралыцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. - 575с.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. - 407с.
4. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. - 288с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. - 614с.
6. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. - 350с.

7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. - 480с.
8. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999. - 244с.
9. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Доклады РАН. 1996. Т.349. №5. С.598-602.
10. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журнал вычисл. математики и математической физики. 2007. Т.47. №3. С.376-396.

---

# Difference analogues of O.A. Ladygenskaya's multiplicative inequalities for functional spaces $W_2^1(\Omega)$ , $W_{2,0}^2(\Omega)$

© F.V. Lubyshev<sup>3</sup>, M.E. Fairuzov<sup>4</sup>

**Abstract.** Here we prove several multiplicative inequalities for the spaces  $\overset{\circ}{W}_2^1(\bar{\omega})$ ,  $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$  of grid functions defined on the grid  $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$ . The inequalities are the grid analogues of O.A. Ladygenskaya's multiplicative inequalities for functional spaces  $W_2^1(\Omega)$ ,  $W_{2,0}^2(\Omega)$ .

**Key Words:** grid, grid function, finite differences, embedding theorem.

---

<sup>3</sup>Professor of mathematics department, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.

<sup>4</sup>Associate professor of mathematics department, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.

УДК 517.9

# О параметрических решениях дифференциальных уравнений с частными производными; приложения в трансзвуковой газовой динамике.

© П. А. Вельмисов<sup>1</sup>, Ю. А. Казакова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе предложен метод построения параметрических решений дифференциальных уравнений с частными производными. На основе этого метода построены параметрические решения трансзвукового уравнения, проведена их классификация и указаны приложения для решения конкретных физических задач. В частности, получены решения простых волн и построены решения, описывающие течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лаваля.

**Ключевые слова:** трансзвуковая газовая динамика, дифференциальные уравнения в частных производных, параметрические решения.

## 1. Описание метода построения параметрических решений

Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными

$$F_k(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n, u_{1x_1}, \dots, u_{nx_1}, \dots, u_{1x_m}, \dots, u_{nx_m}) = 0, \quad k = 1 \div n, \quad (1.1)$$

где  $u_k(x_1, \dots, x_m)$  функции  $m$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . При переходе к новым переменным  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , которые являются функциями переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , решение системы (1.1) отыскивается в следующем виде

$$u_k = U_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad k = 1 \div n; \quad x_l = X_l(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad l = 1 \div m, \quad (1.2)$$

Частные производные  $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$  находятся по формулам

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial U_k}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l}, \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} = \frac{\Delta_{jl}}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_m}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial X_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.3)$$

где  $\Delta_{jl}$  - определитель, полученный из определителя  $\Delta$  заменой  $j$ -го столбца на столбец с нулевыми элементами, кроме элемента с номером  $l$ , равным единице. Тогда система уравнений (1.1) преобразуется к виду

$$F_k(\xi_1, \dots, \xi_m, X_1, \dots, X_m, X_{1\xi_1}, \dots, X_{m\xi_m}, U_1, \dots, U_n, U_{1\xi_1}, \dots, U_{n\xi_m}) = 0. \quad (1.4)$$

В системе (1.4)  $U_k (k = 1 \div n)$ ,  $X_l (l = 1 \div m)$  являются функциями переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ . Решение полученной системы уравнений можно искать в виде многочленов

$$\begin{aligned} U_k &= \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi_1, \dots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \dots, \xi_m) \xi_s^i, \quad k = 1 \div n, \quad s = 1 \div m \\ X_l &= \sum_{j=0}^{\gamma_l} x_{lj}(\xi_1, \dots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \dots, \xi_m) \xi_s^j, \quad l = 1 \div m, \quad s = 1 \div m \end{aligned} \quad (1.5)$$

<sup>1</sup>Заведующий кафедры высшей математики, профессор, д.ф.-м.н., Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmiso@ulstu.ru

<sup>2</sup>Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; sunwave@inbox.ru

где  $\alpha_k, \gamma_l \in N$  ( $N$  - множество натуральных чисел). Задача состоит, в частности, в определении параметров  $\alpha_k, \gamma_l \in N$ , для которых система дифференциальных уравнений для  $u_{ki}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ ,  $x_{lj}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$  является определенной или недоопределенной.

Рассмотрим частный случай, когда искомые функции зависят от координат  $x, y$  и времени  $t$ :

$$F_k(x, y, t, u_1, \dots, u_n, u_{1x}, \dots, u_{nx}, u_{1y}, \dots, u_{ny}, u_{1t}, \dots, u_{nt}) = 0, \quad k = 1 \div n \quad (1.6)$$

Для этого случая решение удобно искать в виде

$$u_k = U_k(\xi, \eta, t), \quad k = 1 \div n, \quad x = X(\xi, \eta, t), \quad y = Y(\xi, \eta, t) \quad (1.7)$$

Тогда формулы перехода к новым переменным следующие

$$\begin{aligned} u_{kx} &= \frac{U_{k\xi}Y_\eta - U_{k\eta}Y_\xi}{\Delta}, \quad u_{ky} = \frac{U_{k\eta}X_\xi - U_{k\xi}X_\eta}{\Delta}, \\ u_{kt} &= U_{kt} + \frac{U_{k\xi}(Y_tX_\eta - Y_\eta X_t) + U_{k\eta}(Y_\xi X_t - Y_t X_\xi)}{\Delta}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\Delta = X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi \neq 0$ . Система уравнений (1.6) преобразуется к виду

$$F_k(\xi, \eta, t, X, Y, X_\xi, X_\eta, X_t, Y_\xi, Y_\eta, Y_t, U_1, \dots, U_n, U_{1\xi}, \dots, U_{nt}) = 0 \quad (1.9)$$

В этой системе  $X, Y, U_k (k = 1 \div n)$  являются функциями переменных  $\xi, \eta, t$ . Решение системы (1.9) можно искать в виде многочленов по степеням  $\eta$ :

$$U_k = \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi, t)\eta^i, \quad X = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t)\eta^k, \quad Y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi, t)\eta^k, \quad (1.10)$$

где  $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$ . Для некоторых типов уравнений (например, для квазилинейных уравнений первого порядка, коэффициенты в которых являются многочленами относительно зависимых и независимых переменных) несложно получить соотношения для параметров  $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$ , позволяющие выяснить, при каких значениях  $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$  система дифференциальных уравнений для  $x_k(\xi, t), y_k(\xi, t), u_{ki}(\xi, t)$  является определенной или недоопределенной, т.е.  $s \geq r, s = r + j$ , где  $s$  - число неизвестных функций, зависящих от  $\xi, t$ ;  $r$  - число уравнений;  $j$  - степень недоопределенности. Если  $r_k$  - максимальная степень переменной  $\eta$ , возникающая в уравнении  $F_k = 0 (k = 1 \div n)$  при подстановке в него выражений (1.10), то параметры  $s$  и  $r$  находятся следующим образом

$$r = \sum_{k=1}^n r_k + n, \quad s = \gamma + \omega + \sum_{k=1}^n \alpha_k + n + 2. \quad (1.11)$$

## 2. Применение метода к уравнениям трансзвуковой газовой динамики

Рассматривается трансзвуковое уравнение, описывающее неустановившиеся течения идеального газа:

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_{xt} + \Phi_x \Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\Phi$  - потенциал скорости.

Полагая в (2.1)  $w = \Phi_t$ ,  $u = \Phi_x$ ,  $v = \Phi_y$ , представим (2.1) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} w_t + 2u_t + uu_x - v_y = 0, \\ u_y - v_x = 0, \\ u_t - w_x = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Считая  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $x$ ,  $y$  функциями параметров  $t$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , запишем систему (2.2) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} w_t(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + w_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + w_\eta(y_\xi x_t - y_t x_\xi) + 2u_t(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) + 2u_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + \\ + 2u_\eta(x_t y_\xi - y_t x_\xi) + u(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi) - (v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) = 0, \\ (u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta) - (v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi) = 0, \\ u_t(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) + u_\xi(x_\eta y_t - x_t y_\eta) + u_\eta(y_\xi x_t - x_\xi y_t) - (w_\xi y_\eta - w_\eta y_\xi) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Решение системы (2.3) отыскивается в виде многочленов по степеням  $\eta$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\alpha} U_k(\xi, t)\eta^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} V_k(\xi, t)\eta^k, \quad w = \sum_{k=0}^{\theta} W_k(\xi, t)\eta^k, \\ x &= \sum_{k=0}^{\gamma} X_k(\xi, t)\eta^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\omega} Y_k(\xi, t)\eta^k. \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega$  - натуральные числа. При подстановке выражений (2.4) в систему (2.3) получим следующие максимальные степени переменной  $\eta$ :

$$\begin{cases} J_1 = \theta + \gamma + \omega - 1, J_2 = 2\alpha + \omega + \alpha - 1, J_3 = 2\alpha + \omega - 1, J_4 = \beta + \gamma - 1, \\ J_5 = \alpha + \gamma - 1, J_6 = \beta + \omega - 1, \\ J_7 = \alpha + \gamma + \omega - 1, J_8 = \theta + \gamma - 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Параметры  $J_1, J_2, J_3, J_4$  соответствуют первому уравнению системы (2.3),  $J_5, J_6$  - второму уравнению (2.3),  $J_7, J_8$  - третьему уравнению (2.3). Число коэффициентов в (2.4) равно  $r = \alpha + \beta + \theta + \gamma + \omega + 5$ , а число уравнений в системе (2.3) определяется соотношением:  $s = I_1 + I_2 + I_3 + 3$ , где  $I_1 = \max(J_1, J_2, J_3, J_4)$ ,  $I_2 = \max(J_5, J_6)$ ,  $I_3 = \max(J_7, J_8)$ . Максимальные значения  $I_1, I_2, I_3$  можно выбрать 16 способами.

После применения описанной в [1] программы получены возможные значения переменных  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega \in N$ , для которых система уравнений будет определенной или недоопределенной ( $j = r - s \geq 0$ , где  $j$  - степень недоопределенности). В таблице 1 приведены допустимые значения параметров со степенью недоопределенности  $j = 3$  и  $j = 4$ .

Заметим, что решения с  $\gamma = 1$ ,  $\omega = 0$  являются решениями степенного вида по переменной  $x$  с коэффициентами, зависящими от  $y$ ,  $t$ . В качестве примера рассмотрим вариант 21:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \theta = 3$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\omega = 0$ . Решение будет иметь вид:

$$u = \sum_{k=0}^2 U_k(y, t)x^k, \quad v = \sum_{k=0}^3 V_k(y, t)x^k, \quad w = \sum_{k=0}^3 W_k(y, t)x^k.$$

Этому решению системы (2.2) соответствует решение  $\Phi(x, y, t) = \sum_{k=0}^3 \Phi_k(y, t)x^k$  уравнения (2.1), при этом функции  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  удовлетворяют нелинейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \Phi_{3yy} - \Phi_{3tt} = 18\Phi_3^2, \\ \Phi_{2yy} - \Phi_{2tt} - 18\Phi_3\Phi_2 = 6\Phi_{3t}, \\ \Phi_{1yy} - \Phi_{1tt} - 6\Phi_3\Phi_1 = 4\Phi_{2t}, \\ \Phi_{0yy} - \Phi_{0tt} = 2\Phi_{1t} + 2\Phi_1\Phi_2, \end{cases}$$

| $N$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\theta$ | $\gamma$ | $\omega$ | $j$ | $N$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\theta$ | $\gamma$ | $\omega$ | $j$ |
|-----|----------|---------|----------|----------|----------|-----|-----|----------|---------|----------|----------|----------|-----|
| 1   | 0        | 0       | 0        | 1        | 0        | 3   | 14  | 0        | 1       | 0        | 0        | 1        | 3   |
| 2   | 0        | 0       | 1        | 1        | 0        | 3   | 15  | 1        | 1       | 1        | 0        | 1        | 3   |
| 3   | 0        | 1       | 1        | 1        | 0        | 4   | 16  | 1        | 2       | 1        | 0        | 1        | 3   |
| 4   | 0        | 2       | 2        | 2        | 0        | 3   | 17  | 0        | 2       | 2        | 1        | 0        | 3   |
| 5   | 1        | 0       | 1        | 0        | 1        | 3   | 18  | 1        | 3       | 3        | 1        | 0        | 3   |
| 6   | 1        | 1       | 2        | 1        | 0        | 3   | 19  | 2        | 4       | 4        | 1        | 0        | 3   |
| 7   | 1        | 2       | 2        | 1        | 0        | 4   | 20  | 1        | 2       | 1        | 2        | 0        | 3   |
| 8   | 1        | 3       | 3        | 2        | 0        | 3   | 21  | 2        | 3       | 3        | 1        | 0        | 3   |
| 9   | 2        | 4       | 4        | 2        | 0        | 3   | 22  | 2        | 4       | 3        | 1        | 0        | 3   |
| 10  | 0        | 1       | 2        | 1        | 0        | 3   | 23  | 0        | 1       | 0        | 1        | 0        | 3   |
| 11  | 1        | 2       | 3        | 1        | 0        | 3   | 24  | 0        | 2       | 1        | 1        | 0        | 3   |
| 12  | 2        | 3       | 4        | 1        | 0        | 3   | 25  | 1        | 3       | 2        | 1        | 0        | 3   |
| 13  | 0        | 0       | 0        | 0        | 1        | 3   |     |          |         |          |          |          |     |

Таблица 1: допустимые значения параметров со степенью недоопределенности  $j = 3$  и  $j = 4$ .

Если  $\Phi_3 = 0$ ,  $\Phi_2 = const$ , то решение описывает течения газа в соплах Лавалья с постоянным ускорением потока  $\Phi_{xx} = 2a = const$ . При этом функции  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  находятся из линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi_{1yy} - \Phi_{1tt} = 0, \\ \Phi_{0yy} - \Phi_{0tt} = 2\Phi_{1t} + 2a\Phi_1. \end{cases}$$

общие решения которых несложно записать.

Решения с  $\omega = 1$  имеют степенной вид по переменной  $y$ . Например, можно показать, что существуют решения типа «простая волна»

$$v = v_0(u), w = w_0(u), x = x_0(u) + x_1(u)y + x_2(u)t. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.3) и полагая  $y = \eta$ ,  $\xi = u$ , для функций  $x_0(u)$ ,  $x_1(u)$ ,  $x_2(u)$ ,  $v_0(u)$ ,  $w_0(u)$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -v_0', \\ x_2 = -w_0', \\ (w_0')^2 - (v_0')^2 + 2w_0' + u = 0, \end{cases}$$

в которой одна из функций  $v_0(u)$ ,  $w_0(u)$  может быть выбрана произвольно. Произвольной также является функция  $x_0(u)$ .

### 3. Трансзвуковые течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лавалья.

Неустановившиеся «медленные» околосвуковые плоские течения идеального газа описываются системой уравнений

$$2u_\tau + uu_x - v_y = 0, \quad u_y = v_x. \tag{3.1}$$

Здесь  $u, v$  - проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат  $x, y$ ;  $\tau$  - время. Рассмотрим для системы уравнений (3.1) следующий класс решений:

$$\begin{aligned} u &= e^{2n\tau} u_*(x_*, y_*, \tau) + 2\lambda'(\tau), & v &= e^{3n\tau} v_*(x_*, y_*, \tau) + \frac{4}{\omega+1} \lambda''(\tau) y, \\ x_* &= [x - \lambda(\tau)] e^{-2n\tau}, & y_* &= y e^{-n\tau}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для (3.2) существуют решения, описывающие течения с местными сверхзвуковыми зонами. Они имеют вид (запишем их сразу в физических переменных  $x, y, \tau$ )

$$\begin{aligned} u &= m e^{2n\tau} U(\xi, \tau) + 4c^2 y^2 + 2\lambda'(\tau), & x &= m \xi e^{2n\tau} + c y^2 + \lambda(\tau), \\ v &= 2c m e^{2n\tau} (4c\xi - U) y + \frac{16}{\omega+3} c^3 y^3 + \frac{4}{\omega+1} \lambda''(\tau) y. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $m, c, n$  - произвольные постоянные,  $\lambda(\tau)$  - произвольная функция,  $\omega = 0$  для плоских и  $\omega = 1$  для осесимметричных течений.

После перехода к переменным  $(\tau, \xi, y)$  система (3.1) запишется

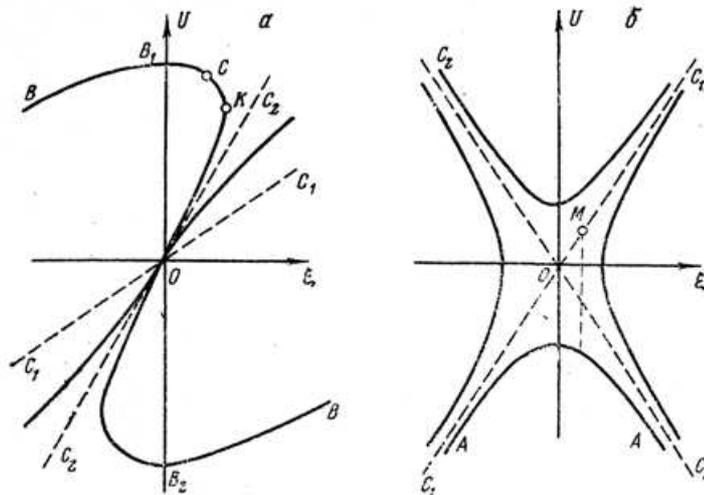
$$\begin{cases} 2(u_\tau x_\xi - u_\xi x_\tau) + u u_\xi - v v_\xi + v_\xi x_y = 0, \\ u_y x_\xi - u_\xi x_y - v_\xi = 0. \end{cases}$$

Тогда для функции  $U(\tau, \xi)$  получим уравнение

$$2U_\tau + (U - 4n\xi)U_\xi + 2[2n + (\omega + 1)c]U - 8(\omega + 1)c^2\xi = 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим автомодельный случай  $U = U(\xi)$ . Для  $U$  имеем тогда обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое входят два произвольных параметра  $c$  и  $n$ . Поведение интегральных кривых в этом случае зависит от значений величин  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\lambda_k = q_k - 4n, \quad q_{1,2} = (-\omega - 1 \pm (\omega^2 + 10\omega + 9)^{0.5})c.$$



Р и с у н о к 3.1

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  различные и одного знака, то в начале координат плоскости  $(U, \xi)$  имеем особую точку типа узел (Рис. 3.1, а), если разных знаков - седло (Рис. 3.1, б); если  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ , то имеем вырожденный узел; в случае, когда одна из величин  $\lambda_k$  (или обе) равна нулю, решение на плоскости  $(U, \xi)$  изображается параллельными прямыми. Решения, которые изображаются прямыми, проходящими через особую точку (им соответствуют пунктирные прямые), имеют вид

$$U = q_1 \xi, \quad U = q_2 \xi.$$

В плоском случае ( $\omega = 0$ )  $q_1 = -4c$ ,  $q_2 = 2c$ .

В случае узла кривые касаются в особой точке прямой  $U = q_1\xi$ , если  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , и прямой  $U = q_2\xi$ , если  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . В случае, когда  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , решение уравнения (3.4) записывается в виде:

$$(U - q_1\xi)^{-\lambda_1}(U - q_2\xi)^{-\lambda_2} = A = const \quad (3.5)$$

или в параметрической форме

$$U = \frac{q_2}{q_2 - q_1}\eta + q_1 B\eta^\chi, \quad \xi = \frac{1}{q_2 - q_1}\eta + B\eta^\chi, \quad \chi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (3.6)$$

В формулах (3.5)-(3.6)  $A$  и  $B$  - произвольные постоянные. Уравнение звуковой линии имеет вид (взяли  $m = 1$ )

$$y^2 = -\frac{\lambda'(\tau)}{2c^2} - \frac{1}{4c^2}e^{2n\tau}U(\eta), \quad x = -\frac{\lambda'(\tau)}{2c^2} + e^{2n\tau}(\xi(\eta) - \frac{1}{4c}U(\eta)) \quad (3.7)$$

Из первой формулы (3.7) ясно, что звуковую линию можно построить при  $c \neq 0$ . Анализируя поведение интегральных кривых на Рис.3.1 и учитывая первую формулу (3.3), приходим к выводу, что кривые  $AA$  и  $C_1OC_2$ , изображенные на Рис.3.1,б, при  $c \neq 0$  могут описывать течения с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лавалья. Формулы (3.7) дают ясное представление об изменении звуковых линий с течением времени. При  $n > 0$  (и соответствующей функции  $\lambda(\tau)$ ), как видно из (3.7), решения описывают процесс «затухания» местных сверхзвуковых зон в соплах Лавалья, при  $n < 0$  наблюдается развитие местных сверхзвуковых зон.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК N1122.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vel'misov, P.A. Some classes of the solutions of aerohydrodynamic equations // P.A.Vel'misov, M.D.Todorov, J.A.Kazakova. - Applications of Mathematics in Engineering and Economics. - Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2008, p.427-441.
2. Рыжов О.С. О работе сопел Лавалья в нерасчетных режимах. Ж.выч., матем. и матем. физ., 1967, т.7, №4.
3. Вельмисов П.А. Неустановившееся движение газа в сопле Лавалья. В сб.: Аэродинамика. Изд-во Саратовск. ун-та, вып. 2, 1973.

# About parametric solutions of partial differential equations; applications to transonic gas dynamics.

© P. A. Velmisov<sup>3</sup>, J. A. Kazakova<sup>4</sup>

**Abstract.** In this work the method of constructing of the parametric solutions of partial differential equations is offered. The parametric solutions of transonic gas dynamic equation are constructed in terms of this method, their classification is carried, and the applications are showed for solutions of specific physic problems. Particularly, the solutions of simple wave are derived, and the solutions, describing gas flows with local supersonic zones in Laval nozzles, are constructed.

**Key Words:** Transonic gas dynamics, Partial differential equations, Parametric solutions.

---

<sup>3</sup>Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

<sup>4</sup>Postgraduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; sunwave@inbox.ru

УДК 519.853.62

# О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата

© В. Г. Малинов<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе предлагается и исследуется проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод для решения конечномерных задач минимизации на выпуклом замкнутом множестве в евклидовом пространстве с переменной метрикой. Доказывается сходимость метода для выпуклых гладких функций с Липшицевыми градиентами. Рассматривается применение метода для численного решения тестовой задачи оптимального управления движением летательного аппарата, описываемой системой дифференциальных уравнений, а также приводятся некоторые результаты вычислительного эксперимента.

**Ключевые слова:** минимизация на простом множестве, проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод, сходимость, дифференциальные уравнения движения, задача оптимального управления, оптимизация, траектория летательного аппарата.

## 1. Постановка задачи и предыстория

Множество задач науки, техники, экономики, итеративные способы решения задач оптимального управления в них и других науках, при математической формализации приводят к задаче минимизации на выпуклом замкнутом множестве  $Q$

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset E^n, \quad (1.1)$$

где  $n$ -мерное евклидово пространство  $E^n$  нормировано скалярным произведением,  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} \quad \forall \mathbf{x} \in E^n$ , выпуклая функция  $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ . Предполагаем, что функция  $f(\mathbf{x})$  имеет гиперповерхности уровней овражной структуры и ограничена снизу, множество её минимумов не пусто:

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \quad \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

Встречаются сложные задачи поставленного вида, не решаемые существующими методами. Для их решения предпочтительно применение метода из класса проекционных многошаговых методов, разработанного и обоснованного за последние восемнадцать лет. В этот класс входят, например, двухшаговый, трёхшаговый, четырёхшаговый методы проекции градиента (см., например, работы [1] - [3]). Методы этого класса обладают многими известными достоинствами. Но обнаруживается факт возрастания вычислительной погрешности в окрестности минимума вследствие использования градиента функции на "дне оврага" гиперповерхности уровня, где его величина мала. Этот факт не присущ проекционным обобщенным многошаговым методам решения задачи (1.1), простейшими из которых являются двухшаговые, поэтому последние здесь и рассмотрим.

Подробнее о методах класса. *Проекционные обобщенные двухшаговые* методы (ПОДМ) минимизации функций с "овражными" гиперповерхностями уровней - это *новый класс проекционных методов*, использующих для построения минимизирующей

<sup>1</sup>Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

последовательности  $\{\mathbf{x}^k\} \rightarrow \mathbf{x}^* \in Q_*$  точки  $\mathbf{z}^k = \mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})$  (где  $\alpha_k$  - один из параметров методов класса) на "склоне оврага" гиперповерхности уровня функции  $f(\mathbf{x})$  и градиенты  $\nabla f(\mathbf{z}^k)$  в них. Последние имеют большую величину, чем градиенты  $\nabla f(\mathbf{x}^k)$  в точках на "дне" оврага. Поэтому ПОДМ мало чувствительны к овражности функций и ошибкам округлений [2]. Методы этого класса предложены и исследованы, например, в работах [4]- [6].

К сожалению, и многошаговые методы проекции градиента, и ПОДМ, требуют специальной процедуры локального поиска в окрестности минимума, которая может оказаться трудоёмкой. Для устранения этого недостатка при решении задач с непрерывными моделями разработаны *непрерывные* методы проекции градиента первого и второго порядков, с *переменной метрикой* (НМПМ) (см., например, [7]-[9]). Они минимизируют функцию путём решения обыкновенных дифференциальных уравнений (соответствующих порядков) с оператором проектирования в переменной метрике в уравнении. Для построения НМПМ, согласно их основной идее, сначала строится пространство с новым скалярным произведением.

Но существует множество задач минимизации, требующих применения *итеративных* (аналогов непрерывных) методов. Поэтому идея, использованная для НМПМ, распространена на итеративные ПОДМ квазиньютоновского типа [10] - [12]. Отметим, что основанные на другой идее многошаговые (итеративные) МПМ разрабатывались не для решения задачи (1.1), а задач *безусловной минимизации* и они построены иначе.

В данной работе предлагается и исследуется квазиньютоновский метод, принадлежащий классу ПОДМ, улучшенная версия методов из работ [10]- [12]. Метод получен путём развития для итеративных ПОДМ отмеченной выше новой идеи, реализованной в НМПМ. Об этом далее подробнее.

## 2. Метод решения задачи

Применяя теперь идею НМПМ из [7] для построения *итеративных* методов в конечномерном евклидовом пространстве  $E^n$  [10], наряду с существующей метрикой и оператором  $P_Q(\mathbf{v})$  проектирования вектора  $\mathbf{v}$  на множество  $Q$ , введём новую метрику с помощью нового скалярного произведения  $(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E^n$  и оператор  $P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}]$  проектирования в новой метрике в точке  $\mathbf{x} \in E^n$  вектора  $\mathbf{v} \in E^n$  на множество  $Q$ . Оператор  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) : E^n \rightarrow E^n$ , при каждом фиксированном  $\mathbf{x} \in E^n$ , суть положительно определённый самосопряженный линейный оператор, изменяющий метрику пространства. Проекция  $\mathbf{w} = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}] \in Q$  в этой метрике существует, единственна, как решение квадратичной задачи минимизации  $g(\mathbf{u}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{u} \in Q$ , в силу выпуклости множества  $Q$  и сильной выпуклости функции  $g(\mathbf{u})$ ; критерием её решения  $\mathbf{w} \in Q$  служит [7] неравенство

$$(\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \mathbf{u} \in Q. \quad (2.1)$$

Полученное евклидово пространство с двумя скалярными произведениями и определяемыми ими метриками обозначим  $E_1^n$ , далее подразумеваем задачу вида (1.1) в нём.

Для решения задачи в пространстве  $E_1^n$  исследуем проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод (ПОДКМ)

$$1 \text{ этап. } \mathbf{z}^k = P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k); \quad (2.2)$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k)], k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{x}^0$  - произвольная начальная точка из  $E_1^n$ ;  $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$ ;  $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$ ;  $\alpha_k, \beta_k$  - параметры метода;  $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$  - последовательность положительно определённых самосопряжённых линейных операторов (симметричных матриц). Итерационными формулами (2.2), (2.3) задается целое семейство двухшаговых методов. В зависимости от выбора последовательности операторов  $\mathbf{B}_k$  и способов выбора параметров метода, из (2.2), (2.3) получаются различные ПОДКМ первого или (при  $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \nabla^2 f(\mathbf{z}^k)$ ) второго порядка.

Отметим, что от метода из работы [10] ПОДКМ отличается: 1) наличием операции проектирования на первом этапе, что препятствует "выбросу" из оврага на первом этапе метода и способствует увеличению скорости сходимости метода; 2) видом оператора переменной метрики (в (2.3) предпочтителен оператор с диагональной матрицей); 3) видом оператора проектирования, если его сравнить с НМПМ, исследованными в работах [7], [8].

**Примечание 1.** Оператор  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  в (2.3) таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad 0 < m, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E_1^n; \quad (2.4)$$

3) если выполняется (2.4), то существует обратный оператор  $\mathbf{B}(\mathbf{x})^{-1}$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  - тождественный оператор и ей соответствует единичная матрица.

### 3. Вспомогательные утверждения

Приведём обоснование вспомогательных утверждений для доказательства сходимости и оценки скорости сходимости метода семейства (2.2), (2.3).

**Примечание 2.** По самому построению пространства  $E_1^n$  в нём, наряду с (2.1), имеет место критерий ([1], с. 189)  $(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q$  проекции  $\mathbf{w} \in Q$  вектора  $\mathbf{v} \in E_1^n$  на выпуклое замкнутое множество  $Q$ . Это следует из известного факта, что евклидовы пространства с различными скалярными произведениями изоморфны; поэтому в  $E_1^n$  сохраняются все соотношения и теоремы из  $E^n$ , связанные со скалярным произведением  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ .

**Лемма 1.** Пусть выпуклые функции  $f(\mathbf{x})$  и  $\varphi(\mathbf{x})$  класса  $C^{1,1}(E_1^n)$  таковы, что

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E_1^n. \quad (3.1)$$

и множество точек минимума функций  $f(\mathbf{x})$  и  $\varphi(\mathbf{x})$  не пусто,  $Q_* \neq \emptyset$ .

Тогда для  $\mathbf{x}^* \in Q_*$  в пространстве  $E_1^n$  имеет место неравенство

$$(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Пользуясь формулой Лагранжа для функции  $\varphi(\mathbf{x})$ , определением точки минимума  $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset E_1^n$  и (3.1), получим:

$$\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{x}^*) = (\nabla\varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) = (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть выпуклое замкнутое множество  $Q \subset E_1^n$ , функция  $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_1^n)$ .

Тогда для  $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset E_1^n$  равенство  $\mathbf{x}^* = P_Q[\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)]$  эквивалентно неравенству (3.2).

**Доказательство.** Согласно необходимому и достаточному условию проекции (см. [1], с. 189)  $\mathbf{w} = P_Q(\mathbf{v}) \in Q$  в  $E_1^n$  при  $\mathbf{x}^* \in Q_*$ , по заданному равенству получаем вариационное неравенство

$$(\mathbf{x}^* - (\mathbf{x}^* - \beta \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}^*)), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

Отсюда следует неравенство  $\beta (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0$ ,  $\mathbf{u} \in Q$ . В силу положительности  $\beta$ , отсюда следует неравенство (3.2).

Аналогично можно провести обратные рассуждения.

Лемма 2 доказана.

Следующая лемма выражает связь между необходимыми условиями оптимальности точки  $\mathbf{x}^*$  в исходной метрике пространства  $E^n$  и в новой метрике пространства  $E_1^n$ .

**Лемма 3.** Пусть: 1) множество  $Q \subset E_1^n$  выпукло и замкнуто;

2) выпуклая функция  $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_1^n)$ ;

3) выполнено неравенство (2.4).

Тогда для  $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset E_1^n$  равенство  $\mathbf{x}^* = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x}^*)}[\mathbf{x}^* - \beta \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}^*)]$  в  $E_1^n$  эквивалентно неравенству  $(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{u} \in Q$ .

**Доказательство.** Пользуясь критерием (2.1) проекции  $\mathbf{w} = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x}^*)}[\mathbf{v}] \in Q$  в  $E_1^n$  при  $\mathbf{x}^* \in Q_*$  получаем:

$$(\mathbf{B}(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^* + \beta \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}^*)), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

Отсюда следует неравенство  $\beta (\mathbf{B}(\mathbf{x}^*) \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0$ ,  $\mathbf{u} \in Q$ . В силу примечаний 1 и 2, положительности  $\beta$ , отсюда следует  $(\mathbf{I} \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) = (\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0$ ,  $\mathbf{u} \in Q$ .

Лемма 3 доказана.

**Примечание 3.** Классы функций  $\varphi(\mathbf{x})$  и операторов  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (3.1), не пусты.

В самом деле, в класс таких операторов входят тождественный оператор и скалярный оператор (матрица) и оператор (матрица) вторых производных  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$  функции  $f(\mathbf{x})$ , а также существуют другие самосопряженные положительно определённые линейные операторы (симметричные матрицы), удовлетворяющие (3.1).

В класс функций, удовлетворяющих условию (3.1), например, входят выпуклые гладкие дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Возникает интересная, пока еще нерешённая, проблема полной характеристики классов функций  $\varphi(\mathbf{x})$  и операторов  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию (3.1).

Здесь рассмотрим простые примеры таких функций  $\varphi(\mathbf{x})$  и операторов  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$ .

*Пример 1.* Пусть выпуклая функция  $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$  задана в односвязной области, её градиент  $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 1) \end{bmatrix}$ , заданы операторы а)  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$  и б)  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ . Вычислим для обоих случаев функцию  $\varphi(\mathbf{x})$ , для которой выполнено (3.1).

а) Сначала найдём градиент  $\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x}) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 6 \\ 2x_1 + 12x_2 - 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(x_1, x_2) \\ M_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

. По градиенту функции  $\varphi(\mathbf{x})$  можно записать её полный дифференциал и, как известно из анализа, можно решить задачу восстановления функции  $\varphi(\mathbf{x})$ . Здесь получим функцию  $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 16x_2 + C$ ,  $C = const$ .

б) В случае второго оператора  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$  вычисления проводим аналогично. По градиенту  $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$  получим  $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2/4 - 8x_1 - x_2/2 + C$ ,  $C = const$ .

Кроме рассмотренных, обращенный оператор второй производной  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$  для этой же функции удовлетворяет равенству (3.1). Сложнее в случае функций в многомерных пространствах.

*Пример 2.* В трёхмерном пространстве  $E_1^3$  для выпуклой функции  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3$ , заданной в односвязной области, для оператора  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$  по равенству вида (7)  $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  получаем функцию  $\varphi(\mathbf{x}) = x_1^2/2 + x_2^2/2 + x_3^2/2 + C$ ,  $C = const$ .

#### 4. Обоснование сходимости метода

О сходимости ПОДКМ (2.2), (2.3) с параметрами константами  $\alpha_k = \alpha$ ,  $\beta_k = \beta$  имеет место

**Т е о р е м а 1.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) множество  $Q \subset E_1^n$  выпукло и замкнуто;
- 2) функция  $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$  выпуклая и выполнены соотношения (1.2);
- 3) оператор  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in E_1^n$  таков, что выполнено неравенство (2.4);
- 4) выпуклая функция  $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$  такова, что имеет место равенство (3.1);
- 5) параметры константы метода семейства (2.2), (2.3) таковы, что:

$$0 < \alpha < 1/\sqrt{5},$$

$$0 < \beta < \min [\alpha/(2L); (4 - 10\alpha - 5\alpha^3)/(2L - 10L\alpha^2); 2/L]. \quad (4.1)$$

Тогда последовательность  $\{\mathbf{x}^k\}$ , определяемая методом (2.2), (2.3), (4.1), из любой начальной точки  $\mathbf{x}^0 \in E_1^n$  сходится к точке  $\mathbf{x}^* \in Q_*$ ,

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0, \quad f(\mathbf{x}^k) \rightarrow f(\mathbf{x}^*), \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Покажем сходимость последовательности  $\{\mathbf{x}^k\}$  метода и получим соотношения (4.2). Из характеристического свойства оператора проектирования ([1], с. 189) в исходной метрике пространства  $E_1^n$  и из (2.2), (2.3) получим вариационные неравенства

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha\mathbf{y}^k, \mathbf{v} - \mathbf{z}^k) &\geq 0, \\ (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k + \beta\mathbf{B}_k^{-1}\nabla f(\mathbf{z}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}) &\geq 0, \quad k \geq 0, \quad \mathbf{v} \in Q. \end{aligned}$$

Сложив оба вариационных неравенства, запишем результат в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{y}^k, \mathbf{v} - \mathbf{z}^k) + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 &\leq \\ \leq \beta(\mathbf{B}_k^{-1}\nabla f(\mathbf{z}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}), \quad k \geq 0, \quad \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Сложим (4.3) при  $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* \in Q_*$  с неравенством (3.2) из леммы 1, положив в нём  $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$  и умножив на  $\beta > 0$ . Полученное неравенство представим в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*) + \alpha(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k) + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 &\leq \\ \leq \beta(\mathbf{B}_k^{-1}\nabla f(\mathbf{z}^k) - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пользуясь четвёртым условием теоремы для скалярного произведения в правой части, запишем (4.4) в виде

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*) + \alpha (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k) + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq \\ & \leq \beta (\nabla\varphi(\mathbf{z}^k) - \nabla\varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

и оценим правую часть с помощью неравенства (см. [1], с.188)

$$(\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{u}), \mathbf{u} - \mathbf{z}) \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2/4, \quad \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z} \in Q$$

для выпуклых функций  $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$  при  $\mathbf{x} = \mathbf{z}^k$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{x}^{k+1}$ . Тогда из (4.5) получим

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*) + \alpha (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k) + \\ & + (1 - L\beta/4)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq 0, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь сначала оценим скалярные произведения в левой части неравенства. Распишем первое слагаемое  $(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*) = (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*) - (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k)$  и, пользуясь известным равенством

$$(a - b)^2 = (a - c)^2 + 2(a - c, c - b) + (c - b)^2 \quad \forall a, b, c \in E_1^n, \quad (4.7)$$

оценим скалярные произведения в его правой части:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*) = (\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2) / 2, \\ & - (\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}) = (\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2) / 2. \end{aligned}$$

Тогда для первого слагаемого в левой части (4.6) получим

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*) = \\ & = (\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2) / 2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для второго слагаемого в (4.6) скалярное произведение представим в виде

$$(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k) = (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k) - (\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k)$$

и оценим первое слагаемое в правой части с помощью (4.7), а второе – с помощью известного неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2, \quad a, b, \varepsilon > 0. \quad (4.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k) = 0.5 (\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k-1}\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2), \\ & (\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k) \leq 0.5 (\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + \|\mathbf{y}^k\|^2), \end{aligned}$$

и второе слагаемое в левой части (4.6) оценивается:

$$\begin{aligned} & \alpha (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k) \geq \\ & \geq 0.5\alpha (\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k-1}\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 - 2\|\mathbf{y}^k\|^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Подставляя оценки (4.8) и (4.10) в левую часть (4.6), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2/2 + (1 - \alpha)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2/2 + \alpha\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k-1}\|^2/2 + \\ & + (0.5 - L\beta/4)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 \leq \alpha\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1 + \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2/2, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Далее оценим квадрат нормы в четвёртом слагаемом левой части (4.11)

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 - 2(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k),$$

где согласно неравенству (4.9) при  $\varepsilon = 1/5$  имеем

$$2(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k) \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 + 5\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2,$$

поэтому

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \geq 4\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 - 4\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2.$$

С учётом этой оценки и второго слагаемого в левой части, из (4.11) получим

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2/2 - (0.5\alpha - L\beta)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + (2 - L\beta)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 + \\ & + \alpha\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|^2/2 \leq \alpha\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1 + \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2/2, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $1.5 + 0.5\alpha - L\beta > 0$  при условиях (4.1). Здесь оценим квадрат нормы в третьем слагаемом для  $\mathbf{x}^k \in Q$  по свойству оператора проектирования (см. [1], с. 190)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 &= \|P_Q[\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k] - P_Q[\mathbf{x}^k]\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k - \mathbf{x}^k\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2, \end{aligned}$$

тогда из (4.12) получим неравенство, аналогичное полученному в [10]

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + a\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \\ & \leq b\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1 + \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

где  $a = (4 - 2L\beta)/5$ ,  $b = 2\alpha + \alpha^2(3 + \alpha - 2L\beta)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  при условиях (4.1).

Далее доказательство сходимости и соотношений (4.2) проводится по той же схеме, что использована в работе [10], с помощью лемм 2 и 3.

Теорема 1 доказана.

## 5. Численное решение модельной задачи

Решить задачу оптимального управления численным методом на порядок труднее, чем обычную задачу оптимизации. Процесс численного решения таких задач связан с проблемами: удовлетворения заданным конечным условиям; учёта ограничений на фазовые координаты и управляющие функции; "овражности" и многоэкстремальности получаемой для минимизации вспомогательной функции. Такими же свойствами обладает рассматриваемая здесь задача оптимального управления (ЗОУ) расчёта траектории летательного аппарата. Численно эта ЗОУ решается ПОДКМ по классической схеме как задача минимизации вспомогательной функции при простых ограничениях на переменные.

**Постановка задачи.** ЗОУ разворотом самолёта в плоскости горизонта описывается математической моделью (ММ), построенной на основе ММ задач о пространственном развороте самолёта ([13], с.353-355) и о развороте в плоскости горизонта [14], в работе [15].

В предположении постоянства высоты манёвра система дифференциальных уравнений движения самолёта имеет вид:

$$\begin{aligned} dD/dt &= V \cos(\eta) = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ dZ/dt &= -V \sin(\eta) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \quad dw/dt = -c_s = f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ dV/dt &= g[u_1 P \cos \alpha - c_x q^0 S] / w = f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ d\eta/dt &= -gu_2 N \sin(\gamma) / V = f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $P = [10 + V^2/(a(h))^2](25000 - h)/12.5$ ;  $q^0 = \rho(h)V^2/2$ ;  $a(h) = 340.3 - .00408h$ ;  $\rho(h) = 3.3 * 10^{-10}h^2 - 1.155 * 10^{-5}h + 0.125$ ;  $\alpha = u_2Nw/(u_1P + 4.6q^0S)$ ;  $c_x = 0.02 + 3.174\alpha^2 + .03u_3$ ;  $c_s = [0.7 + 2(u_1 - 0.3)^2]u_1P/3600$ ;  $N = \min \{q^0S/w; 150000/w; 8\}$ ,

$D = x_1$ ,  $Z = x_2$  – декартовы координаты самолёта (продольная и боковая);  $h$  – высота над Землёй;  $V = x_3$  – модуль вектора скорости;  $\eta = x_4$  – угол курса;  $mg = w = x_5$  – вес самолёта;  $u_1$  – величина тяги двигателя, отнесённая к максимальному значению тяги  $P$ ;  $u_2$  – величина перегрузки, отнесённая к максимальному значению перегрузки  $N$ ;  $u_3$  – величина тормозящей силы, отнесённая к её максимальному значению;  $\gamma = u_4$  – угол крена;  $\alpha$  – угол атаки;  $S = 55 \text{ м}^2$  – характерная площадь самолёта;  $q^0$  – скоростной напор;  $c_x$  – коэффициент лобового сопротивления;  $c_s$  – секундный расход топлива;  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ . Заметим, что  $\rho(h)$  и  $a(h)$  будут постоянными.

Ограничения на управления и их производные:

$$0.05 \leq u_1 \leq 1; \quad 0.01 \leq u_2 \leq 1; \quad 0 \leq u_3 \leq 1;$$

$$\left| \frac{du_1}{dt} \right| \leq 0.2; \quad \left| \frac{du_2}{dt} \right| \leq 0.25; \quad \left| \frac{du_3}{dt} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{du_4}{dt} \right| \leq 1.57 \text{ рад/сек}; \quad (5.2)$$

Начальные условия для фазовых координат и значения управлений:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0;$$

$$h(0) = 7000 \text{ м}; \quad x_3(0) = 300 \text{ м/с}; \quad x_5(0) = 20000 \text{ кг};$$

$$u_1(0) = u_1^0; \quad u_2(0) = 1/N(x(0)); \quad u_3(0) = u_3^0; \quad u_4(0) = 0. \quad (5.3)$$

Конечные значения фазовых координат и управлений:  $x_2(T) = h(T) = 7000 \text{ м}$ ;

$$\begin{aligned} \varphi_1 = x_4(T) + \pi = 0; \quad \varphi_3 = u_2(T) - 1/N(x(T)) = 0; \\ u_4(T) = 0; \quad \varphi_2 = (y_p + P \sin \alpha) \cos \gamma - w(t) = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Последнее в (5.4) – условие горизонтального полёта [14], где  $y_p = c_y \rho V^2 S / 2$  – подъёмная сила,  $c_y$  – коэффициент подъёмной силы;  $\varphi_4 = x_2(t) - h(T) = 0$ .

Для задачи (5.1)-(5.4) фазовый вектор  $\mathbf{x} \in E^{5*k}$ , а вектор управлений  $\mathbf{u} \in E^4 * k$ , где  $k$  – число делений отрезка интегрирования.

**Результаты расчётов.** В качестве примера решения ЗОУ с помощью алгоритма штрафных функций (МШФ) на основе ПОДКМ (2.2), (2.3) рассмотрим численное решение задачи (5.1)-(5.4); одну из возможных её подзадач будем решать по методике из [13]–[15].

Для ММ (5.1)-(5.4) сформулирована задача оптимального быстрогодействия: найти вектор  $\mathbf{u}(t)$  управлений, удовлетворяющий системе (5.1), ограничениям (5.2), (5.4) и переводящий самолёт из горизонтального полёта на высоте 7000 м в горизонтальный полёт на высоте 7000 м с разворотом вектора скорости на 180° за наименьшее время при начальных условиях (5.3).

Минимизируется время движения  $T$ , систему терминальных ограничений дают ограничения равенства (5.4).

Для решения задачи проведена замена переменной как в [13],  $t = \tau T$  и система (5.1) преобразована к виду  $dx_i/d\tau = T f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Численное интегрирование производилось по схеме Эйлера. Шаг интегрирования 0.04. Системе (5.1) соответствует функция Понтрягина  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{i=5} p_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  где  $p_i$  – сопряжённые переменные. Вспомогательная функция для задачи минимизации имеет вид

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = T - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) + \lambda \sum_{j=1}^{j=m} r_j \varphi_j,$$

где  $\lambda$  – штрафной коэффициент,  $r_j$  – весовые коэффициенты;  $m = 4$  – число терминальных ограничений равенств. С учётом ограничений на координаты получим задачу вида (1.1) для  $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ . Дифференцирование производилось численное по конечно-разностной формуле  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = (F(x_i + h) - F(x_i - h))/(2h)$ .

Начальные приближения для МШФ:  $u_1(t) = 0.476$ ;  $u_2(t) = 0.1$ ;  $u_3(t) = 0.024$ ;  $u_4(t) = 1.5 \sin(\pi t/T_0)$ ;  $T_0 = 20$  с.

Результаты расчётов для значения  $\gamma_{max} = 69^\circ 58'$  приведены в таблице 1. Обозначения в таблице:  $w(t)$  – переменный вес самолёта в моменты времени  $t$  по мере расхода горючего;  $V$  – скорость самолёта;  $\eta^\circ$  – угол курса в градусах;  $D$  – продольная дальность;  $Z$  – боковая дальность;  $u_4(t)$  – угол крена.

| $t$     | $w(t)$    | $V$     | $\eta^\circ$ | $D$     | $Z$      | $u_4(t) = \gamma(t)$ |
|---------|-----------|---------|--------------|---------|----------|----------------------|
| 0       | 20000.0   | 300.0   | 0.0          | 0.0     | 0.0      | .00001               |
| 0.6255  | 19997.609 | 302.605 | -0.00001     | 195.155 | 0.000001 | 0.710                |
| 1.2510  | 19995.214 | 304.182 | -2.5650      | 392.003 | 0.00001  | 0.980                |
| 1.8765  | 19992.817 | 304.301 | -7.3650      | 589.680 | 14.830   | 1.2211               |
| 2.5020  | 19990.420 | 302.065 | -14.8240     | 786.000 | 34.230   | 1.2211               |
| 3.1275  | 19988.026 | 297.928 | -23.5500     | 975.957 | 84.507   | 1.2211               |
| 4.3785  | 19983.254 | 290.034 | -40.8150     | 1315.32 | 263.92   | 1.2211               |
| 5.6295  | 19978.610 | 282.915 | -57.6550     | 1579.64 | 528.45   | 1.2211               |
| 6.8804  | 19973.769 | 276.476 | -74.1140     | 1752.28 | 850.010  | 1.2211               |
| 8.7569  | 19966.698 | 267.926 | -98.1650     | 1824.92 | 1375.31  | 1.2211               |
| 10.008  | 19962.000 | 262.869 | -113.821     | 1752.51 | 1713.73  | 1.2211               |
| 10.6334 | 19959.656 | 260.510 | -121.546     | 1683.45 | 1870.17  | 1.2211               |
| 11.8844 | 19956.036 | 255.134 | -136.780     | 1489.01 | 2144.26  | 1.2211               |
| 13.1354 | 19951.368 | 251.200 | -151.748     | 1234.37 | 2354.03  | 1.2211               |
| 14.3864 | 19946.708 | 247.600 | -166.510     | 938.83  | 2489.11  | 1.2211               |
| 15.0119 | 19944.382 | 247.164 | -172.816     | 782.21  | 2526.68  | 1.2211               |
| 15.6374 | 19942.056 | 248.358 | -177.484     | 622.69  | 2546.78  | 0.8550               |
| 16.2629 | 19940.651 | 249.695 | -180.0001    | 461.29  | 2553.88  | 0.00000              |

Таблица 1: Результаты расчётов для значения  $\gamma_{max} = 69^\circ 58'$ .

Полученное  $\eta = -3.141595$  соответствует значению угла курса  $\eta^\circ = -180.0001^\circ$ ; время счёта для одного значения штрафного коэффициента ( $it = 6$ )  $16c$ , всего  $32c$ ; размерность задачи  $n = 114$ . Значение  $u_4^{max}(t) = \gamma_{max} = 1.2211$  соответствует максимальному углу крена  $69^\circ 58'$ ; весовые множители  $1 \leq r_1, r_2, r_4 \leq 10$ ,  $r_3 = 19.28$ ; начальное и конечное значения штрафного коэффициента  $\lambda_1 = 5$  и  $\lambda_2 = 5.048$ ; конечные значения невязок терминальных ограничений равенств в (25)  $\varphi_1 = .00014$ ,  $\varphi_2 = -5.74d - 9$ ,  $\varphi_3 = u_2(T) - 1/N(x(T)) = 0.00000495$ ,  $\varphi_4 \leq 10^{-3}$ ; время манёвра  $T = 16.2629$  сек; начальные значения сопряжённых переменных  $p_i(0) = c_i = 1$ ,  $i \in [1 : 5]$ , а вычисленный в ходе минимизации вектор сопряжённых переменных  $\mathbf{p}(t) = (0.99989; 1.00123; 0.99953; 0.99957; 0.99956)$ . Значения вспомогательной и штрафной функций в конце счёта  $F = 14.692$  и  $5.836d - 10$ . При счёте с половинным шагом  $0.02$  результаты совпадают до второго знака после десятичной точки (счёт на Атлон 1800 с удвоенной точностью).

**Вывод.** Результаты показывают работоспособность предлагаемого проекционного обобщённого двухшагового двухэтапного квазиньютоновского метода минимизации при решении ЗОУ, обеспечиваемую им достаточную скорость и точность минимизации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.– М.: Наука, 1988.– 552 с.
2. Антипин А.С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования // Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем.– М.: АН СССР, 1989.– С. 5-43.
3. Недич А. Трехшаговый метод проекции градиента для задач минимизации // Изв. вузов. Математика.– 1993.– № 10.– С. 32-37.
4. Амочкина Т.В., Недич А. Об одном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка и его дискретном аналоге // Вестник МГУ, Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.– 1995.– № 2.– С. 5-11.
5. Малинов В.Г. Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка // Журнал вычислит. математ. и матем. физики.– 1996.– Т. 36. № 12.– С. 48-56.
6. Малинов В.Г. Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление.– 1999.– Вып.1(20).– С. 169-178.
7. Антипин А.С., Васильев Ф.П. О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой // Известия вузов. Математика.– 1995.– № 12(403).– С. 3-9.
8. Амочкина Т.В. Непрерывный метод проекции градиента второго порядка с переменной метрикой // Журнал вычисл. матем. и матем. физики.– 1997.– Т. 37. № 10.– С. 1174-1182.
9. Малинов В.Г. О непрерывном проекционном методе минимизации второго порядка с переменной метрикой // Тезисы докладов Международной конференции по прикладной математике, посвященной 65-летию Б.Н. Пшеничного. 25-28 июня 2002. Украина.– Киев. НТУУ, 2002.– С. 48-49.
10. Малинов В.Г. Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации первого порядка с переменной метрикой // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Серия "Фундаментальные проблемы математики и механики". Вып. 1(13). – Ульяновск. Изд-во УлГУ, 2003.– С. 127-138.
11. Малинов В.Г. Проекционные двухшаговые методы с переменной метрикой // 4 Московская международная конференция по исследованию операций. Москва. 21-24 сентября 2004. Труды.– Москва. Макс-пресс, 2004.– С. 135-137.
12. Малинов В.Г. О сравнительных численных экспериментах с проекционным двухшаговым методом минимизации с переменной метрикой // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: синтез, анализ, диагностика. Труды международной конференции КЛИН-2007 (г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.) – Ульяновск: УлГТУ, 2007.– Том 4.– С. 175-179.
13. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.– М.: Наука, 1982.– 432 с.

14. Дикусар В.В., Милютин А.А. Качественные и численные методы в принципе максимума.– М.: Наука, 1989.– 141 с.
15. Малинов В.Г. Метод оптимизации в задаче расчёта оптимальной траектории самолёта // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки.– 2009.– Том 14. Вып. 4.– С. 752-755.

# On projection generalized two-step two-stage quasinewton minimization method and optimization of the trajectory of aircraft

© V. G. Malinov <sup>2</sup>

**Abstract.** In the work projection generalized two-step two-stage Quasinewton method for solving finite dimensional minimization problems on the convex closed set in the Euclidean variable metric space is proposed. For continuously differentiable convex functions with a Lipschitz gradients the convergence of the method is proved. Application of the method to problem of numerical solution of optimal control test problem optimization of the trajectory of aircraft is discussed; we also present the results of some computational experiences.

**Key Words:** minimization on the simple set, projection generalized two-step two-stage Quasinewton method, convergence, differential equations of movement, optimal control problem, optimization, trajectory of aircraft.

---

<sup>2</sup>Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.

## В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.925

## Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром

© В. В. Абрамов<sup>1</sup>

**Аннотация.** По свойствам оператора монодромии определены условия ограниченности решений по норме, согласованной с выбором допустимого возмущения, при условии достаточной малости начальных значений и параметра.

**Ключевые слова:** система обыкновенных дифференциальных уравнений, устойчивость, оператор монодромии, норма матрицы.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим в  $R^n$  систему возмущенных движений вида

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) : (\forall (t, x, \mu)) [f(t \pm \omega, x, \mu) = f(t, x, \mu)], \quad f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n, \quad (1.1)$$

локально удовлетворяющую условиям существования и единственности решений  $x(t, a, \mu)$ ,  $x(0, a, \mu) = a$ , при всех допустимых значениях малого параметра  $\mu \in R^m$ .

Пусть далее  $\|\cdot\|$  – произвольно выбранная матричная норма и согласованная с ней векторная норма в  $R^n$ ,  $N(\cdot)$  – нормировка в пространстве параметров.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Решение  $x = 0_n$  системы вида (1.1)  $\mu$ -устойчиво (устойчиво по параметру), если

$$(\exists \|\cdot\|_0) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\exists M : 0_m \in M \subseteq R^m) (\forall a \in R^n) (\forall \mu \in M) (\forall t \geq 0) \\ [ \|a\|_0 < \delta \ \& \ N(\mu) < \delta \Rightarrow \|x(t, a, \mu)\|_0 < \varepsilon ] .$$

Свойство устойчивости по параметру связано с ветвлением малых решений:

1) если  $\mu$ -устойчиво решение  $x = 0_n$ , то  $\mu$ -устойчиво и любое малое решение  $(x(t, a, \mu) : \lim_{N(\mu) \rightarrow 0} \|x(t, a, \mu)\| \equiv 0)$ ;

2) если  $\mu = 0_m$  – точка ветвления малого  $\mu$ -устойчивого решения, то тривиальное решение условно (относительно многообразия начальных значений)  $\mu$ -устойчиво.

Проблема устойчивости по параметру и по части фазовых переменных решалась на основе комбинации метода усреднения и прямого метода Ляпунова. Результаты этих исследований изложены в монографии [1]. Предполагалось, что при нулевом значении параметра для системы известна функция Ляпунова.

В данной работе будет использован другой подход. В силу периодичности системы (1.1) решение задачи об устойчивости сводится к задаче о локальной оценке степеней  $U^k(\mu)a : a \rightarrow x(k\omega, a, \mu)$  оператора монодромии.

<sup>1</sup>Доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, г. Рязань; v.abramov@rsu.edu.ru.

**Л е м м а 1.1.** *Решение  $x = 0_n$  системы (1.1) устойчиво по определению 1.1. тогда и только тогда, когда*

$$(\exists \|*\|_0) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\exists M : 0_m \in M \subseteq R^m) (\forall a \in R^n) (\forall \mu \in M) (\forall k \in N) \\ [ \|a\|_0 < \delta \ \& \ N(\mu) < \delta \Rightarrow \|x(k\omega, a, \mu)\|_0 < \varepsilon ] .$$

Необходимость очевидна. Достаточность устанавливается на основе группового свойства периодической динамической системы так же, как и лемма 9.1 [2].

В определении 1.1. свойство устойчивости равномерно относительно способа нормировки возмущений. Снимая требование равномерности, получаем формулировку, сохраняющую естественный смысл устойчивости.

**О п р е д е л е н и е 1.2.** *Решение  $x = 0_n$  системы (1.1)  $\mu$ -устойчиво по  $\varepsilon$ -норме (по норме, согласованной с выбором допустимого возмущения), если*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \|*\|_\varepsilon) (\exists \delta > 0) (\exists M : 0_m \in M \subseteq R^m) (\forall a \in R^n) (\forall \mu \in M) (\forall t \geq 0) \\ [ \|a\|_\varepsilon < \delta \ \& \ N(\mu) < \delta \Rightarrow \|x(t, a, \mu)\|_\varepsilon < \varepsilon ] .$$

**Л е м м а 1.2.** *Решение  $x = 0_n$  системы (1.1) устойчиво по определению 1.2. тогда и только тогда, когда*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \|*\|_\varepsilon) (\exists \delta > 0) (\exists M : 0_m \in M \subseteq R^m) (\forall a \in R^n) (\forall \mu \in M) (\forall k \in N) \\ [ \|a\|_\varepsilon < \delta \ \& \ N(\mu) < \delta \Rightarrow \|x(k\omega, a, \mu)\|_\varepsilon < \varepsilon ] .$$

При локальном условии достаточно гладкой зависимости правой части системы (1.1) от  $x$  и от  $\mu$  допустимо предполагать, что  $f(t, x, \mu) = A(t)x + f_{k+1}(t, x, \mu) + g(t, x, \mu)$ ,  $f_{k+1}(t, \alpha x, \alpha \mu) = \alpha^{k+1} f_{k+1}(t, x, \mu)$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(k+1)} \|g(t, \alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0$ . Тогда для оператора монодромии системы (1.1) возможно представление в виде

$$x(\omega, a, \mu) = [X + F(a, \mu) + G(a, \mu)] a, \quad (1.2)$$

здесь  $X = X(\omega)$  – матрица монодромии системы  $\dot{x} = A(t)x$ , матрицы  $F(a, \mu)$ ,  $G(a, \mu)$  имеют свойства:  $F(a, \mu)a = X \int_0^\omega X^{-1}(t) f_{k+1}(t, X(t)a, \mu) dt$ ,  $F(\alpha a, \alpha \mu) \equiv \alpha^k F(a, \mu)$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|G(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0$ .

Будем решать задачу об устойчивости нулевого решения системы (1.1)-(1.2) предполагая, что имеет место общий критический случай устойчивости по линейному приближению:  $\rho(X) = 1$ , здесь и далее  $\rho(*)$  – спектральный радиус матрицы.

В силу лемм 1.1 и 1.2 решение задачи об устойчивости системы (1.1)-(1.2) сводится к определению условий для матрицы  $F(a, \mu)$ , при которых норма суммы  $X + F(a, \mu)$  меньше единицы хотя бы в кольцевой области, окружающей точку  $a = 0_n$ . Для этого по лемме 5.6.10 [3] необходимо условие  $\rho(X + F(a, \mu)) < 1$ .

## 2. Признаки устойчивости

Пусть  $U$  – матрица,  $\det U \neq 0$ , приводящая  $X$  к верхнему треугольному виду  $\Lambda$ :

$$\Lambda = U X U^{-1} = (\lambda_{ij}) : \quad \lambda_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, i-1}, \quad i = \overline{2, n};$$

$$|\lambda_{ii}| = 1, \quad i = \overline{1, p}, \quad |\lambda_{ii}| < 1, \quad i = \overline{p+1, n}. \quad (2.1)$$

Такое преобразование подобия возможно по теореме Шура-Тёплица о триангуляции.

**Т е о р е м а 2.1.** *Если при условии (2.1) и при некотором значении  $\mu = \mu_0$  для всех  $a \in R^n$ :  $\|a\| = 1$ , возможно представление  $F(a, \mu_0) = U^{-1}B(a)U$ ,  $B(a) = (b_{ij}(a))$ , удовлетворяющее условиям: 1)  $b_{ij}(a) \equiv 0$ ,  $j = \overline{1, i-1}$ ,  $i = \overline{2, n}$ ; 2)  $|\lambda_{ii} + \alpha b_{ii}(a)| \leq 1 - \alpha \bar{b}_i$ ,  $\bar{b}_i > 0$  – некоторые числа,  $\alpha > 0$  – малый параметр,  $i = \overline{1, p}$ , то решение  $x = 0_n$  системы (1.1), (1.2) устойчиво по определению 1.2.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По теореме 5.6.7 [3] выберем способ нормировки  $n \times n$ -матриц:  $\|*\|_\tau = \|D_\tau U * U^{-1} D_\tau^{-1}\|_\infty$ , где  $U$  – матрица из условия (2.1),  $D_\tau = \text{diag}\{\tau, \tau^2, \dots, \tau^n\}$ ,  $\tau > 0$  – параметр. Обозначим:  $\bar{c} = \max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{\|a\|=1} \{ \sum_{j>i} |b_{ij}(a)| \}$ ,  $q = \max_{p+1 \leq i \leq n} \max_{\|a\|=1} \{ |b_{ij}(a)| \}$ ,  $\lambda_0 = \max_{p+1 \leq i \leq n} \{ |\lambda_{ii}| \}$ ,  $\bar{b} = \min_{1 \leq i \leq p} \{ \bar{b}_i \}$ ,

$$d = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ \sum_{j>i} |\lambda_{ij}| \}. \quad (2.2)$$

Тогда при  $\|a\| = 1$ ,  $\tau \geq \max\{1, 2\bar{c}/\bar{b}, 2d/(1-\lambda_0)\}$  и при достаточно малых  $\alpha > 0$  получим оценку:

$$\|X + \alpha B(a)\|_\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \tau^i \sum_{j=1}^n |\lambda_{ij} + \alpha b_{ij}(a)| \tau^{-j} \} =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \{ |\lambda_{ii} + \alpha b_{ii}(a)| + \sum_{j=i+1}^n (|\lambda_{ij}| + \alpha |b_{ij}(a)|) \tau^{i-j} \} \leq$$

$$\leq \max\{(1 - \alpha \bar{b}) + d/\tau + \alpha \bar{c}/\tau, (1 + \lambda_0)/2 + \alpha q + d/\tau + \alpha \bar{c}/\tau\} \leq 1 + d/\tau - \alpha \bar{b}/2.$$

Произвольно выберем  $\varepsilon > 0$ . Теперь окончательно определим параметр для матричной нормировки  $\|*\|_\tau$ :  $\tau = \tau_\varepsilon = \max\{1, 2\bar{c}/\bar{b}, 2d/(1-\lambda_0), 8d/(\varepsilon \bar{b})\}$  и будем использовать матричную норму  $\|*\|_\varepsilon = \|*\|_{\tau_\varepsilon}$  ( $\varepsilon$ -норму). Согласованную с ней векторную норму определим равенством:  $\|y\|_\varepsilon = \|Y\|_{\tau_\varepsilon}$ , где  $Y$  – матрица, все столбцы которой равны вектору  $y$ . Тогда предыдущая оценка примет вид:

$$\|X + \alpha B(a)\|_\varepsilon \leq 1 + \varepsilon \bar{b}/8 - \alpha \bar{b}/2. \quad (2.3)$$

В силу представления (1.2) имеем условие  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|G(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0$ . Значит, по свойству аналитической эквивалентности норм и по определению предела без ограничения общности рассуждений значение  $\varepsilon$  можно считать столь малым, что при  $\alpha < \varepsilon^k$  и  $\|a\|_\varepsilon = 1$  справедливы оценки

$$\|G(\sqrt[k]{\alpha} a, \sqrt[k]{\alpha} \mu_0)\|_\varepsilon < \alpha \bar{b}/16. \quad (2.4)$$

$$\|X + F(\sqrt[k]{\alpha} a, \sqrt[k]{\alpha} \mu_0) + G(\sqrt[k]{\alpha} a, \sqrt[k]{\alpha} \mu_0)\|_\varepsilon < 2. \quad (2.5)$$

Выберем  $\delta = \varepsilon$ . Положим,  $M = \{\mu : \mu = \rho\mu_0, \rho > 0\}$  – множество допустимых параметров. Тогда в силу представления (1.2) и неравенств (2.3)-(2.5) при  $a : \|a\|_\varepsilon < \delta/2$  и  $\mu \in M : N(\mu) < \delta$  справедлива оценка:

$$\|x(\omega, a, \mu)\|_\varepsilon < 2 \cdot \delta/2 = \delta = \varepsilon, \quad (2.6)$$

а при  $a : \delta/2 \leq \|a\|_\varepsilon < \delta$  и  $\mu \in M : N(\mu) < \delta$

$$\|x(\omega, a, \mu)\|_\varepsilon \leq (1 - (\varepsilon/2)(\bar{b}/2) + \varepsilon\bar{b}/8 + \varepsilon\bar{b}/16) \cdot \delta < \delta = \varepsilon. \quad (2.7)$$

Из оценок (2.6) и (2.7) следует справедливость неравенства  $\|x(\omega, a, \mu)\|_\varepsilon < \delta = \varepsilon$  при всех  $a : \|a\|_\varepsilon < \delta$  и  $\mu \in M : N(\mu) < \delta$ . Далее, рассматривая  $a_1 = x(\omega, a, \mu)$  в качестве начального значения решения системы (1.1), получим:  $\|x(2\omega, a, \mu)\|_\varepsilon < \delta = \varepsilon$ , а затем по индукции:  $\|x(k\omega, a, \mu)\|_\varepsilon < \varepsilon$  при всех  $k \in N$ . Значит, в силу леммы 1.2 решение  $x = 0_n$  системы (1.1)-(1.2) устойчиво по определению 1.2.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Величина  $d$  из равенства (2.2) – мера близости матрицы монодромии  $X$  к диагонализуемой матрице. Если  $d = 0$ , то рассуждая по схеме доказательства теоремы 2.1, видим, что значение параметра  $\tau$  для матричной нормы не зависит от  $\varepsilon$ . Следовательно, по лемме 1.1 справедливо следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2.2.** *Если выполняются условия теоремы 2.1, причем  $d = 0$  в равенстве (2.2), то решение  $x = 0_n$  системы (1.1), (1.2) устойчиво по определению 1.1.*

### 3. Пример

Определим условия устойчивости для системы вида (1.1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + v(r_{11}x_1 + r_{12}x_2) + p_1x_1^3 + p_2x_1^2x_2 + p_3x_1x_2^2 + p_4x_2^3, \\ \dot{x}_2 = v(r_{21}x_1 + r_{22}x_2) + q_1x_1^3 + q_2x_1^2x_2 + q_3x_1x_2^2 + q_4x_2^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

или в векторной форме  $\dot{x} = Ax + vRx + \varphi(x)$ ,  $v \geq 0$  – малый параметр. Допустим,  $r_{11} > 0$  или  $r_{22} > 0$ , то есть при  $v > 0$  нулевое решение системы (3.1) неустойчиво по Ляпунову.

Пусть  $\omega = 1$  – период правой части по  $t$ . Тогда  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица монодромии. В равенстве (2.1) выберем  $U = E$  и получим:  $\Lambda = X$ .

Вычислим  $\Phi(a)a = X \int_0^1 \exp(-tA)\varphi(\exp(tA)a)dt$ ,  $\Phi(a) = (\varphi_{ij}(a))$ . Получим:  $\varphi_{21}(a)a_1 + \varphi_{22}(a)a_2 = a_1^3q_1 + a_1^2a_2(3q_1/2 + q_2) + a_1a_2^2(q_1 + q_2 + q_3) + a_2^3(q_1/4 + q_2/3 + q_3/2 + q_4)$ . Если  $q_1 = 0$ , то  $\Phi(a)$  можно записать в верхней треугольной форме. При этом  $\varphi_{11}(a)a_1 + \varphi_{12}(a)a_2 = (a_1^2p_1 + a_1^2a_2(h_1 - l_1) + a_2^2(h_2 - l_2))a_1 + (a_1^2l_1 + a_1a_2l_2 + a_2^2h_3)a_2$ ,  $h_1 = 3p_1/2 + p_2 + q_2$ ,  $h_2 = p_1 + p_2 + p_3 + q_2/3 + q_3/2$ ,  $h_3 = p_1/4 + p_2/3 + p_3/2 + p_4 + q_2/12 + q_3/6 + q_4/2$ ,  $l_1$  и  $l_2$  – произвольно выбранные числа.

Вычислим  $\bar{R} = (\bar{r}_{ij}) = X \int_0^1 \exp(-tA)R \exp(tA)dt$ . Чтобы удовлетворить условия теорем 1.1-1.2 потребуем выполнение равенства  $r_{21} = 0$ .

Пусть  $v = \mu^2$ . В (1.2) выберем  $F(a, \mu)a = [\mu^2\bar{R} + \Phi(a)]a$ . При  $r_{21} = 0$ ,  $q_1 = 0$  в условии теоремы 2.1:  $B(a)a = \begin{pmatrix} (\mu_0^2r_{11} + \varphi_{11}(a))a_1 + (\mu_0^2(r_{11}/2 + r_{12} + 2r_{22}/3) + \varphi_{12}(a))a_2 \\ (\mu_0^2r_{22} + \varphi_{22}(a))a_2 \end{pmatrix}$ .

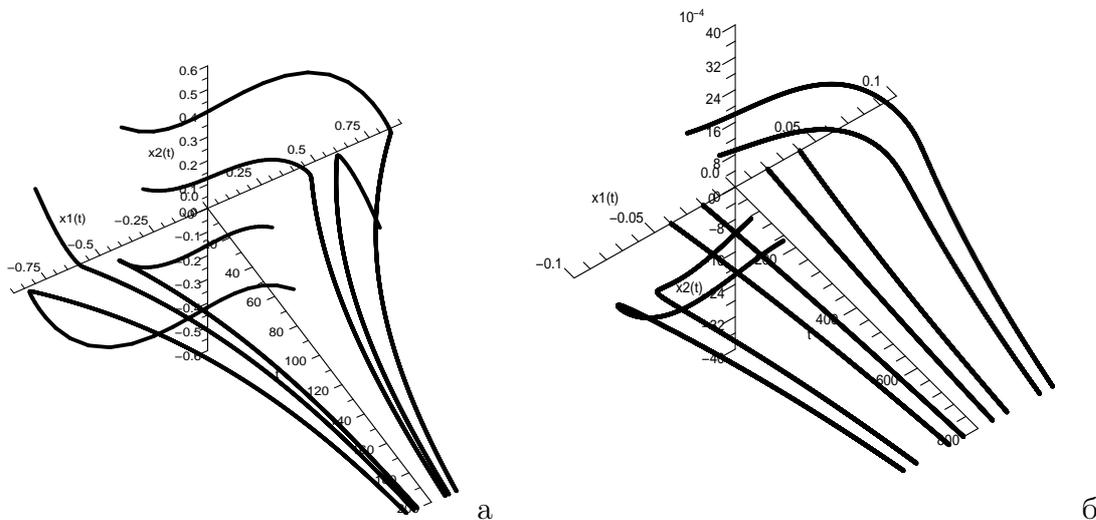
Обозначим  $\bar{\varphi}_{ii} = \max_{\|a\|=1} \varphi_{ii}(a)$ ,  $i = 1, 2$ .

Если  $\bar{\varphi}_{22} < 0$  (по критерию Сильвестра для этого требуется  $q_2 < 0$  и  $q_2(q_2/3 + q_3/2 + q_4) > q_3^2$ ), то для выполнения условия 2) теоремы 2.1 при  $i = 2$ :  $\mu_0$  может быть произвольным при  $r_{22} \leq 0$ , иначе следует выбрать  $\mu_0 < \sqrt{-\bar{\varphi}_{22}/r_{22}}$ . Если  $\bar{\varphi}_{22} \geq 0$ , то требуем  $r_{22} < 0$  и выбираем  $\mu_0 > \sqrt{-\bar{\varphi}_{22}/r_{22}}$ . При  $p_1 < 0$  можно выбрать  $l_1$  и  $l_2$  так, что  $\bar{\varphi}_{11} \leq p_1$ . Тогда для выполнения условия 2) теоремы 2.1 при  $i = 1$ :  $\mu_0$  может быть произвольным при  $r_{11} \leq 0$ , иначе достаточно взять  $\mu_0 < \sqrt{-p_1/r_{11}}$ . Если  $p_1 \geq 0$ , то требуем  $r_{11} < 0$  и выбираем  $\mu_0 > \sqrt{-p_1/r_{11}}$ .

Итак, в силу теоремы 2.1 справедливо следующее утверждение.

**Л е м м а 3.1.** Пусть в системе (3.1)  $r_{21} = q_1 = 0$  и выполняется одно из условий: 1)  $p_1 < 0$ ,  $\bar{\varphi}_{22} < 0$ ,  $r_{11}r_{22} > 0$ ; 2)  $r_{11} > 0$ ,  $p_1 < 0$ ,  $r_{22} < 0$ ,  $\bar{\varphi}_{22} \geq 0$ ,  $r_{11}\bar{\varphi}_{22} < r_{22}p_1$ ; 3)  $r_{11} < 0$ ,  $p_1 \geq 0$ ,  $r_{22} > 0$ ,  $\bar{\varphi}_{22} < 0$ ,  $r_{22}p_1 < r_{11}\bar{\varphi}_{22}$ . Тогда нулевое решение системы (3.1) устойчиво, по крайней мере, в соответствии с определением 1.2.

Иллюстрация леммы 3.1 (случай 3) дана рисунке, представленном ниже (построен в пакете Maple). Здесь для системы 3.1 с коэффициентами  $r_{11} = -1$ ,  $r_{12} = 2$ ,  $r_{21} = 0$ ,  $r_{22} = 1$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 3$ ,  $p_4 = 4$ ,  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = -7$ ,  $q_3 = 2$ ,  $q_4 = 1$  видим, что интегральные кривые с начальными значениями в плоскости  $t = 0$  удерживаются вблизи нулевой интегральной кривой за счет одновременного уменьшения начальных значений и параметра  $v$  (а -  $v = 0.01$ , б -  $v = 0.001$ ).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
2. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
3. Хорн Р.А., Джонсон Ч.Р. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

# Stability of zero solution of periodic system of differential equations with small parameter

© V. V. Abramov<sup>2</sup>

**Abstract.** By properties of monodromy operator it is received sufficient conditions of boundedness of solution with small initial values if parameter is small. It was investigated the norm stability problem coordinated with choice admissible value of the perturbation.

**Key Words:** ODE system, stability, operator of monodromy, norm of matrix.

---

<sup>2</sup>Associate Professor, Chair of Mathematics and Method of Teaching of mathematical Disciplines, Ryazan State University after S.A. Yesenin, Ryazan; v.abramov@rsu.edu.ru.

УДК 519.6

## Моделирование динамики поверхностных волн оползневого происхождения методом частиц

© Е. Л. Авербух<sup>1</sup>, А. А. Куркин<sup>2</sup>

**Аннотация.** В рамках данной работы разработан и реализован программный комплекс, основанный на трехмерной системе уравнений Навье-Стокса, и позволяющий численно исследовать и моделировать процессы, сопровождающиеся сильно-нелинейной деформацией. Численное решение построено на основе гидродинамического метода сглаженных частиц.

**Ключевые слова:** гидродинамика сглаженных частиц, оползневые потоки, система уравнений Навье-Стокса.

### 1. Введение

За последнее десятилетие заметно возросла интенсивность использования морских берегов, океанического шельфа и прибрежных регионов, плотность населения в которых постоянно возрастает. В этих регионах динамично развивается индустрия туризма, которая приводит, в том числе, и к резким сезонным увеличениям потоков населения. Все более активно начинает использоваться океанский шельф (процент нефти, добытой на нефтяных платформах, возрастает с каждым годом). Этот факт, в свою очередь вызывает стремительный рост берегового техногенного строительства. Оползание грунта вблизи опор мостов и других подводных конструкций должно быть оценено и спрогнозировано. Перечисленные особенности требуют дополнительного изучения оползневого механизма генерации волн.

Для описания движения оползневого потока используем модель Джанга и ЛеБлонда [1], основанную на представлении тела в виде потока жидких частиц, движущихся вниз по жесткому непроницаемому склону. Она учитывает реальный рельеф местности и батиметрию дна, и основывается на вязкой модели. При этом предполагается, что, во-первых, вода и взвесь являются однородными, и, во-вторых, существует четкая граница между взвесью и поверхностью склона. Необходимо отметить, что данная модель хорошо подходит для описания оползневых процессов, в которых участвуют мелкозернистые фракции, и в частности, депозитные илистые осадки.

В качестве основных уравнений используем трехмерную систему уравнений Навье – Стокса:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla P + \mu \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $t$  – время,  $\rho$  – плотность потока,  $P$  – давление,  $\mu$  – коэффициент вязкости,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения.

В процессе своего движения, оползневое тело сопровождается сильно - нелинейной деформацией, поэтому необходимую точность численного решения можно получить

<sup>1</sup>Магистр кафедры прикладной математики, Нижегородский Государственный Технический Университет им. Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород; Averbukh.lena@gmail.com.

<sup>2</sup>Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский Государственный Технический Университет им.Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород; aakurkin@gmail.com

только при расчётной сетке, ячейки которой меньше самого мелкого вихря. Это требует очень больших затрат расчетного времени на современных суперкомпьютерах. Поэтому все большее распространение приобретают бессеточные методы, среди которых можно выделить гидродинамический метод сглаженных частиц (SPH).

## 2. Гидродинамика сглаженных частиц

Метод впервые был предложен в 1977 г. Леоном Льюси и независимо Бобом Джингольдом и Джо Монаганом [2] и применялся для астрофизических расчетов. Позже он был адаптирован для решения задач гидродинамики, газодинамики, а также динамики твердого тела. Следует отметить, что классический метод сглаженных частиц применяется для моделирования движения сжимаемых сред. В настоящей работе представлено применение данного метода для расчета течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Бессеточная природа данного метода обусловила огромную популярность метода частиц в сфере решения задач со свободными границами.

Основная его идея состоит в дискретизации сплошной среды конечным набором лагранжевых частиц, которые движутся со скоростью потока и допускают произвольную связность между собой, что позволяет отказаться от использования сеток и назвать метод бессеточным. Частицы обладают всеми характеристиками среды: координатами, скоростью, массой, плотностью, давлением и энергией.

Необходимо отметить, что используемые для описания движения потоков в эйлеровом представлении уравнения Навье-Стокса, основываются на сеточной структуре. То есть значения искомого поля зависят не только от времени, но и от положения в пространстве  $\mathbf{r}(t)$ , которое также зависит от времени. В трехмерном пространстве получаем:  $\mathbf{r}(x(t), y(t), z(t))$ . В лагранжевой формулировке - частицы полностью определяют поток. Это означает, что частицы двигаются вместе с жидкостью. В сравнении с эйлеровым описанием, это значит, что любое значение искомого поля теперь зависит только от времени, т.е. в лагранжевом описании полная производная по времени будет эквивалентна частной производной по времени, что значительно упрощает исходные уравнения.

Все функции, входящие в систему уравнений движения, например плотность, представляются в виде интегралов по области течения от этих функций с весовой функцией Дирака:

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d\mathbf{r}', \quad (2.1)$$

где  $\delta$  - дельта-функция Дирака. Далее функция Дирака заменяется на некоторую финитную функцию, которая может быть проинтегрирована аналитически:

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{r}')W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d\mathbf{r}', \quad (2.2)$$

где  $A$  - искомая функция,  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор,  $W(\mathbf{r}, h)$  - функция ядра. Величина  $h$  является носителем функции ядра. Она определяет радиус взаимодействия между частицами и называется сглаживающей длиной. Для частиц вне радиуса взаимодействия, функция ядра равна нулю.

Интеграл (2.2) заменяется конечной суммой по соседним к аппроксимируемой частице:

$$A_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} A_i W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h), \quad (2.3)$$

где  $m_i, \rho_i$  - масса и плотность  $i$ -й частицы соответственно, а  $n$  - количество соседних с ней частиц.

Выразим градиент и лапласиан искомой функции. Из (2.3) следует, что они получаются путем прямого дифференцирования функции ядра:

$$\nabla A_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} A_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h), \quad (2.4)$$

$$\Delta A_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} A_i \Delta W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h). \quad (2.5)$$

Аппроксимируя плотность по формуле (2.3) получим:

$$\rho_j(\mathbf{r}_j) = \sum_i m_i W(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, h). \quad (2.6)$$

Для увеличения точности вычислений, необходимо вносить плотность внутрь оператора Набла для всех рассматриваемых составляющих сил:

$$\rho \nabla A = \nabla(\rho A) - A \nabla \rho.$$

Иначе это формула носит название второго золотого правила SPH и представляется в виде:

$$\nabla A = \frac{\nabla(\rho A) - A \nabla \rho}{\rho}. \quad (2.7)$$

Перейдем к согласованию формул (2.4) и (2.7):

$$\begin{aligned} \nabla A_s(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\rho} \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} \rho_i A_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) - A \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} \rho_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \sum_{i=1}^n m_i A_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) - \sum_{i=1}^n A m_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \right) \\ \nabla A_s(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n (A_i - A) m_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогично с представлением (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\nabla A}{\rho} &= \nabla \left( \frac{A}{\rho} \right) + \frac{A}{\rho^2} \nabla \rho, \\ \nabla A &= \rho \left( \nabla \left( \frac{A}{\rho} \right) + \frac{A}{\rho^2} \nabla \rho \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставим формулу (2.4) в равенство (2.9):

$$\begin{aligned} \nabla A_s(\mathbf{r}) &= \rho \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} \frac{A_i}{\rho_i} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) + \frac{A}{\rho^2} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} \rho_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \right) = \\ &= \rho \left( \sum_{i=1}^n m_i \frac{A_i}{\rho_i^2} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) + \sum_{i=1}^n \frac{A}{\rho^2} m_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \right) \end{aligned}$$

$$\nabla A_s(\mathbf{r}) = \rho \sum_{i=1}^n \left( \frac{A_i}{\rho_i^2} + \frac{A}{\rho^2} \right) m_i \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \quad (2.10)$$

Остановимся теперь подробнее на первом золотом правиле о сглаживающем ядре.

Использование различных ядер аналогично использованию различных разностных схем при моделировании методом конечных разностей. Важность проблемы выбора сглаживающего ядра высока, так как влияет на оценку эффективности метода к поставленной задаче.

Первое золотое правило: для лучшей физической интерпретации метода сглаженных частиц, лучше всего применять ядро Гаусса:

$$W_{gaussian}(\mathbf{r}, h) = \frac{1}{(2\pi h^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-|\mathbf{r}|^2/2h^2}. \quad (2.11)$$

Несмотря на то, что ядро (2.11) имеет очень хорошие физические и математические свойства, оно не всегда является лучшим ядром. При использовании экспоненциальная функция будет увеличивать время моделирования, и усложнять алгоритм. Поэтому будем использовать полиномиальное ядро 6-й степени:

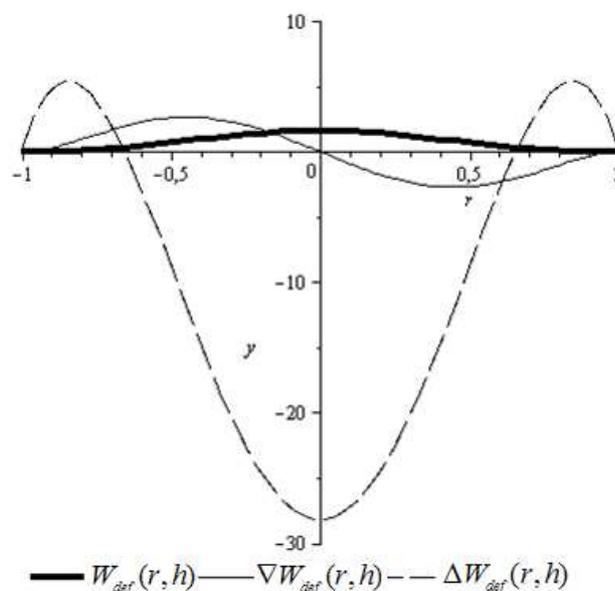
$$W_{def}(\mathbf{r}, h) = \frac{315}{64\pi h^9} (h^2 - |\mathbf{r}|^2)^3, \quad (2.12)$$

$$\nabla W_{def}(\mathbf{r}, h) = \frac{315}{64\pi h^9} 3(h^2 - |\mathbf{r}|^2)^2 (-2|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$\nabla W_{def}(\mathbf{r}, h) = \frac{-945}{32\pi h^9} \mathbf{r} (h^2 - |\mathbf{r}|^2)^2, \quad (2.13)$$

$$\Delta W_{def}(\mathbf{r}, h) = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} (|\mathbf{r}|^2 \nabla W_{def})'_r$$

$$\Delta W_{def}(\mathbf{r}, h) = \frac{-945}{32\pi h^9} (h^2 - |\mathbf{r}|^2)(3h^2 - 7|\mathbf{r}|^2) \quad (2.14)$$



Р и с у н о к 2.1

Полиномиальное ядро 6-й степени в одном измерении при  $h=1$ .

### 3. Основные уравнения модели

Основываясь на принципах, изложенных в предыдущем разделе, перепишем исходные уравнения модели и сформулируем необходимые граничные условия.

Составляющая сила давления, задаваемая выражением (2.10) имеет вид:

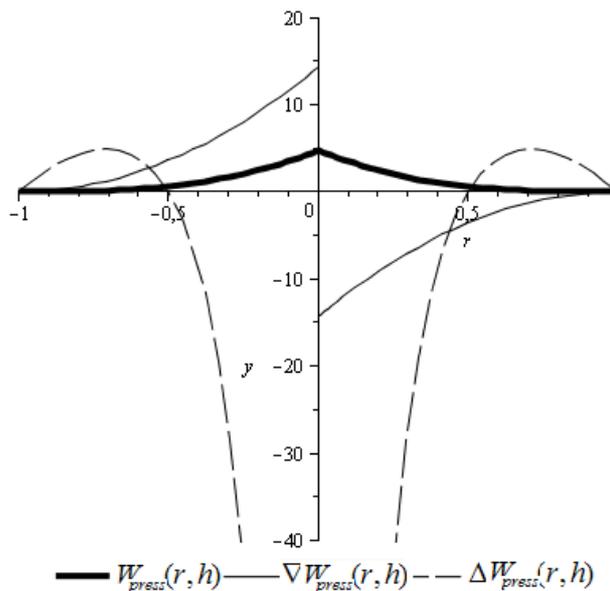
$$F_{j,j \neq i}^{press} = -\rho_j \sum_i \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho^2} \right) m_i \nabla W_{press}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, h) \quad (3.1)$$

Она отвечает за притяжение и отталкивание взаимодействующих частиц. Если в качестве ядра использовать полиномиальное ядро (2.13), то в районах высокого давления частицы будут собираться между собой в группы. При этом необходимо, чтобы при уменьшении расстояния между частицами они начинали отталкиваться друг от друга, а при увеличении – притягиваться. Выполнение этого условия влечет за собой необходимость использования сглаживающего ядра для составляющей силы давления следующего вида:

$$W_{press}(\mathbf{r}, h) = \frac{15}{\pi h^6} (h - |\mathbf{r}|)^3, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla W_{press}(\mathbf{r}, h) &= \frac{15}{\pi h^6} 3(h - |\mathbf{r}|)^2 (-1) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \\ \nabla W_{press}(\mathbf{r}, h) &= \frac{-45}{\pi h^6} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, (h - |\mathbf{r}|)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta W_{press}(\mathbf{r}, h) &= \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} (|\mathbf{r}|^2 \nabla W_{press})'_r \\ \Delta W_{press}(\mathbf{r}, h) &= \frac{-90}{\pi h^6} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (h - |\mathbf{r}|)(h - 2|\mathbf{r}|). \end{aligned} \quad (3.4)$$



Р и с у н о к 3.1

Ядро давления в одном измерении при h=1.

Необходимо отметить, что разрывность оператора Набла от ядра давления в нуле, необходимо в том случае, когда частицы располагаются очень близко друг от друга.

Остановимся, далее, на составляющей силы вязкости:

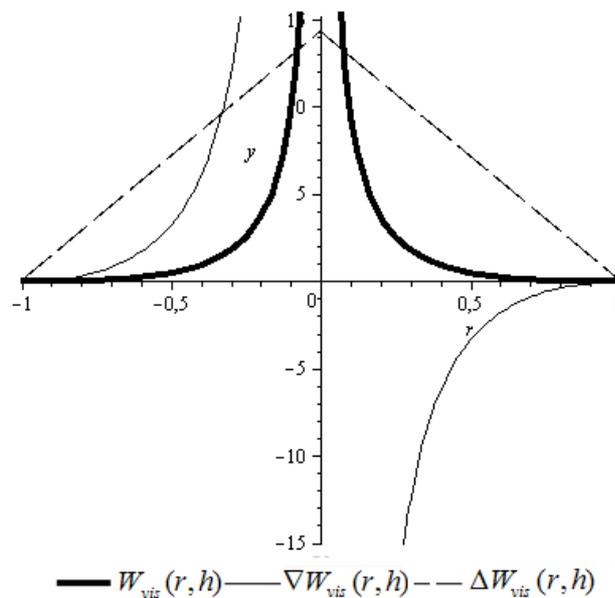
$$F_{j,j \neq i}^{vis} = \mu \sum_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \frac{m_i}{\rho_i} \Delta W_{vis}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, h). \quad (3.5)$$

Она играет роль сопротивления потоку частиц, уменьшая, тем самым, скорость движения среды. Это влечет за собой положительность оператора Лапласа от ядра. Однако, стандартное ядро не обладает этим свойством, поэтому мы используем сглаживающее ядро с положительным лапласианом внутри радиуса взаимодействия вида:

$$W_{vis}(\mathbf{r}, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \left( -\frac{|\mathbf{r}|^3}{2h^3} + \frac{|\mathbf{r}|^2}{h^2} + \frac{h}{2|\mathbf{r}|} - 1 \right), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla W_{vis}(\mathbf{r}, h) &= \frac{15}{2\pi h^3} \left( -\frac{3|\mathbf{r}|^2}{2h^3} + \frac{2|\mathbf{r}|}{h^2} - \frac{h}{2|\mathbf{r}|^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \\ \nabla W_{vis}(\mathbf{r}, h) &= \frac{15}{2\pi h^3} \mathbf{r} \left( -\frac{3|\mathbf{r}|}{2h^3} + \frac{2}{h^2} - \frac{h}{2|\mathbf{r}|^3} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta W_{vis}(\mathbf{r}, h) &= \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} (|\mathbf{r}|^2 \nabla W_{press})'_r \\ \Delta W_{vis}(\mathbf{r}, h) &= \frac{45}{\pi h^6} (h - |\mathbf{r}|) \end{aligned} \quad (3.8)$$



Р и с у н о к 3.2

Ядро вязкости в одном измерении при  $h=1$

Мы используем уравнения состояния следующего вида [3]:

$$P_i = k(\rho_i - \rho_0), \quad (3.9)$$

где  $k$  — константа Бойля - Мариотта,  $\rho_0$  — плотность покоящейся жидкости. При этом предполагается, что все взаимодействия между частицами ограничены конечным объемом радиуса  $h$ , вне которого они не взаимодействуют. В этом случае, вычислительная сложность пересчета значений неизвестной функции на каждом временном шаге будет равна  $O(NM)$ , где  $N$  — общее число частиц, а  $M$  — число взаимодействующих частиц.

Для реализации граничных условий используются различные методы. Во-первых — это классический метод сглаженных частиц, использующий «виртуальные» частицы (частицы Монагана) [2], которые располагаются вдоль твердой границы в один ряд, не меняют своих координат и действуют на частицы подвижной среды посредством некоторого потенциала взаимодействия.

Второй подход предполагает, что частицы располагаются вдоль границы в несколько слоев (частицы Морриса) [4]. При этом, значения их характеристик вычисляются исходя из их значений в частицах подвижной среды. Это позволяет решить одну из главных проблем метода сглаженных частиц — несимметричность функции ядра вблизи границы.

В рамках третьего подхода [5], частицам потока, при приближении к границе ближе некоторого фиксированного расстояния, передается потенциал взаимодействия, путем учета дополнительных слагаемых в соответствующих силах, например, в силе давления.

При формулировке граничных условий на свободной поверхности, частицы, принадлежащие свободной границе, идентифицируются по нормали к поверхности, а на поток действует дополнительная сила — сила поверхностного напряжения:

$$F_i^{surface} = -\sigma \Delta c_i \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|}, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{n}_i$  - вектор нормали внутрь поверхности жидкости для частицы  $i$ ,  $c_i$  - дополнительный коэффициент поля напряжений, взятый для частицы  $i$ , который принимает значение 1 точно в месте расположения частицы и значение 0 в остальных точках пространства,  $\sigma$  - коэффициент поверхностного напряжения, который зависит от свойств жидкости. Градиент коэффициента поля напряжений соответствует нормали по направлению внутрь поверхности жидкости:

$$\mathbf{n}_i = \nabla c(\mathbf{r}_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W_{def}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h), \quad (3.11)$$

причем,  $|\mathbf{n}_i| > 0$  только вблизи поверхности и на ней, а ядро задается формулой (2.13). Тогда сила поверхностного натяжения с ядром (2.14) примет вид:

$$F_i^{surface} = -\sigma \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \Delta W_{def}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h) \quad (3.12)$$

Алгоритм моделирования можно представить следующим образом: на каждой временной итерации выполняется следующая последовательность действий:

1. определяется радиус взаимодействия для каждой частицы. Фактически происходит образование структур частиц, их инициализация и привязка к батиметрии и топологии местности;
2. вычисляется плотность и скорость частиц, формируются граничные условия;
3. выполняется перерасчет положения частиц по схеме «предиктор-корректор»:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t+0.5\Delta t} &= \mathbf{u}_{t-0.5\Delta t} + \Delta t \mathbf{a}_t \\ \mathbf{r}_{t+\Delta t} &= \mathbf{r}_t + \Delta t \mathbf{u}_{t+0.5\Delta t} \\ \mathbf{u}_t &\approx 0.5(\mathbf{u}_{t-0.5\Delta t} + \mathbf{u}_{t+0.5\Delta t}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

#### 4. Заключение

В статье представлены теоретические основы и особенности моделирования динамики оползневых потоков, движущихся по наклонной поверхности, в рамках гидродинамического метода сглаженных частиц, лежащего в основе используемой модели, базирующейся на трехмерных уравнениях Навье-Стокса. Особое внимание уделяется разработанному программному комплексу, реализующему эту модель, прошедшему в настоящее время тестирование и применяемому для моделирования широкого круга задач.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации мероприятия 1.2.1 «Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jiang L., LeBlond P.H. Numerical modelling of an underwater Bingham plastic mudslide and the waves which it generates // J. Geophys. Res, 1993.- V. 98.- P.10303 – 10317.
2. Monaghan J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics // Annual Reviews Astronomy. – Astrophysics, 1992.- No 30. - P.543-574.
3. Kelager M. Lagrangian Fluid Dynamics Using Smoothed Particle Hydrodynamics / University of Copenhagen. Denmark, 2006.
4. Morris J.P., Fox P.J.,Zhu Y. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH//Journal of computational physics, 1997.- No 136.-P.214-226.
5. Harada T.,Koshizuka S., Kanaguchi Y. SPH on GPU's / Tokyo, Japan, 2006.

# Simulation of surface waves landslide origin using particle method

© E. L. Averbukh<sup>3</sup>, A. A. Kurkin<sup>4</sup>

**Abstract.** Software system based on three-dimensional Navier-Stokes equations was designed and implemented allowing investigation and simulation processes accompanied by strongly nonlinear deformation. The numerical solution is based on a hydrodynamic smoothed particles method.

**Key Words:** smoothed particle hydrodynamics, landslide flows, Navier-Stokes.

---

<sup>3</sup>Master of the Applied Mathematics Department, R. Y. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod; Averbukh.lena@gmail.com.

<sup>4</sup>Professor of the Applied Mathematics Department, R. Y. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod; aakurkin@gmail.com

УДК 531.391.5

# Метод функций Ляпунова в задачах управления

© А. С. Андреев<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе исследованы задачи о стабилизации и синтезе управления на конечном интервале времени динамическими системами на основе метода сравнения. Исследование основано на построении релейных и непрерывных законов управления и применении вектор-функции Ляпунова.

**Ключевые слова:** вектор-функция Ляпунова, метод сравнения, предельные уравнения, стабилизация, синтез управления на конечном интервале времени.

## 1. Введение

В классических теоремах прямого метода Ляпунова теории устойчивости условия вида

$$\dot{V} \leq 0, \quad \dot{V} \geq \lambda W,$$

налагаемые на производные функции Ляпунова, представляют собой простейшие дифференциальные неравенства. Естественно возникали попытки построить критерии устойчивости с использованием более сложных дифференциальных неравенств, что может облегчить решение проблемы построения функции типа Ляпунова. С.А. Чаплыгин ввёл и исследовал скалярные дифференциальные неравенства общего вида. Ему принадлежит основная теорема о дифференциальных неравенствах. На основе применения дифференциальных неравенств к функциям Ляпунова при решении задач устойчивости возник метод сравнения. Первые шаги в развитии этого метода, сделанные в 50-х – 60-х годах XX века, связаны с именами Г.И. Мельникова, Г.А. Антосиевича, З. Опяль, К. Кордуняну, Ж. Ла-Салля, С. Лефшеца, В. Лакшмикантама, М.А. Красносельского и др. Так в 1960 году К. Кордуняну доказал основную теорему метода сравнения с применением скалярной функции Ляпунова, которая устанавливает связь между оценками, следующими из теории С.А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, и оценками для функций Ляпунова в теории устойчивости. Благодаря исследованиям отечественных и зарубежных ученых метод сравнения был развит в качественной теории дифференциальных уравнений (Р. Конти, М.А. Красносельский, С.Г. Крейн, Г. Антосевич, В. Лакшмикантам и др.). С помощью этого метода были доказаны теоремы о существовании, единственности, продолжимости, непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений, об ограниченности, притяжении, предельной ограниченности, диссипативности и т.д. Совместное развитие идеи векторной функции Ляпунова Р. Беллмана и метода сравнения, предложенное В. М. Матросовым, привело к созданию метода вектор-функций Ляпунова, базирующегося на теории векторных дифференциальных неравенств типа Чаплыгина-Важевского, развитой в работах Я. Шарского, Т. Важевского, С. Олеха и других учёных. Разработка теоретических основ метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова связана с именами В.М. Матросова, Р.З. Абдуллина, Л.Ю. Анапольского, С.Н. Васильева, А.А. Воронова, А.С. Землякова, Р.И. Козлова, А.И. Маликова, К. Кордуняну, В. Лакшмикантама и др. В настоящее

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; AndreevAS@ulsu.ru.

время результаты, полученные в работах этих ученых, эффективно применяются для выявления различных динамических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений. Однако возможности метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова в задачах о стабилизации и управлении движениями механических систем далеко не исчерпаны. Усложнение структуры управляемых механических систем, разработка математических основ управления мехатронными системами и алгоритмов управления мобильными роботами требуют изучения новых классов задач в нелинейной и нестационарной постановке. В этом плане важную роль приобретают исследования по развитию этого метода в направлении смягчения условий классических теорем и разработке новых способов построения вектор-функций Ляпунова и систем сравнения.

В настоящей работе представлены новые результаты по развитию метода сравнения в задачах стабилизации и управления на конечном интервале времени динамическими системами с применением к модельной задаче управления движением перевернутого математического маятника.

## 2. Основные построения

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x, u), \quad X(t, 0, 0) \equiv 0, \quad (2.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)'$  — вектор  $n$ -мерного линейного действительного пространства  $\mathbb{R}^n$  с какой-либо нормой  $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)'$  — вектор управляющих воздействий,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{R}^m$  —  $m$ -мерное линейное действительное пространство с соответствующей нормой  $\|u\|$ ,  $X$  — вектор-функция, определенная и непрерывная в области  $\mathbb{R}^+ \times G \times \mathbb{R}^m$ ,  $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < H, 0 < H \leq +\infty\}$  и такая, что для некоторого класса  $U$  управляющих воздействий  $u : \mathbb{R}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $u(t, 0) \equiv 0$ , при каждом  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times G$  система (2.1) имеет единственное решение.

Исследуем задачу о стабилизации  $x = 0$ , исходя из следующей постановки.

**О п р е д е л е н и е 2.1.** (Красовский Н.Н. [1966]) *Управляющее воздействие  $u^0 \in U$  решает задачу о стабилизации, если невозмущенное движение  $x = 0$  системы*

$$\dot{x} = X^0(t, x), \quad X^0(t, x) = X(t, x, u^0(t, x)) \quad (2.2)$$

*равномерно асимптотически устойчиво.*

Одним из широко применяемых методов исследования задачи о стабилизации является метод векторных функций [1], [2]. Простейший вариант такого применения представляется следующей теоремой.

Введем класс векторных функций

$$V = (V^1, V^2, \dots, V^k)', \quad V : \mathbb{R}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$$

непрерывных, локально липшицевых по  $x$ . И соответственно рассмотрим векторное уравнение сравнения

$$\dot{v} = F(t, v), \quad F(t, 0) \equiv 0, \quad (2.3)$$

где  $F : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , есть непрерывная квазимоноotonно возрастающая функция.

Определим скалярную функцию

$$\bar{V}(t, x) = \sum_{i=1}^k V^i(t, x) \text{ или } \bar{V}(t, x) = \max\{V^1(t, x), V^2(t, x), \dots, V^k(t, x)\}.$$

**Т е о р е м а 2.1.** (В.М. Матросов [1972]) *Предположим, что для системы (2.1) можно найти управление  $u^0 \in U$  и векторную функцию  $V(t, x)$ , такие, что:*

- 1)  $a_1(\|x\|) \leq \bar{V}(t, x) \leq a_2(\|x\|)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times G$ ;
  - 2)  $\dot{V}^+(t, x) \leq F(t, V(t, x))$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times G$ ;
  - 3) нулевое решение  $v = 0$  системы (2.3) равномерно асимптотически устойчиво.
- Тогда управление  $u^0(t, x)$  решает задачу о стабилизации.

Этот результат допускает развитие в случае, когда решение  $v = 0$  системы (2.3) является только равномерно устойчивым. Оно достигается качественным анализом предельных свойств решений системы (2.2) и «невязок» в оценке производной векторной функции  $V(t, x)$ .

Будем полагать, что правая часть системы (2.2) удовлетворяет условию Липшица по  $x$  равномерно относительно  $t$ , т.е. для любого компакта  $K \subset G$  существует число  $L = L(K)$ , такое, что для любых  $x_1, x_2 \in K$  и любого  $t \in \mathbb{R}^+$  выполняется неравенство

$$\|X^0(t, x_1) - X^0(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Тогда семейство сдвигов

$$\{X_\tau^0(t, x) = X^0(t + \tau, x), \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

будет предкомпактно в некотором компактном метрическом пространстве  $F$ . При этом для системы (2.2) можно построить семейство предельных систем в соответствии со следующим определением.

**О п р е д е л е н и е 2.2.** [3] *Функция  $X^*(t, x)$ , задаваемая для определенной последовательности  $t_j \rightarrow +\infty$  соотношением*

$$X^*(t, x) = \frac{d}{dt} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t X_j^0(\tau, x) d\tau, \quad (t, x) \in R \times G; \quad X_j^0(\tau, x) = X^0(t_j + \tau, x)$$

называется предельной к  $X^0(t, x)$ . Система уравнений

$$\dot{x} = X^*(t, x) \tag{2.4}$$

называется предельной к системе (2.2).

В зависимости от последовательности  $t_j \rightarrow +\infty$  системе (2.2) соответствует целое семейство предельных систем (2.4), где  $X^* \in F$ . При этом положительное предельное множество  $\omega^+(t_0, x_0)$  решения  $x(t, t_0, x_0)$  системы (2.2), определяемое по формуле

$$\omega^+(t_0, x_0) = \{p \in G : \exists t_k \rightarrow +\infty, x(t_k, t_0, x_0) \rightarrow p\}$$

квазиинвариантно относительно семейства систем (2.4) [3], [4].

Введем класс  $\mathbb{K}_1$  векторных функций

$$V = (V^1, V^2, \dots, V^k)', \quad V : \mathbb{R}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$\mathbb{R}^k$  —  $k$ -мерное пространство с нормой  $\|\cdot\|_k$ , ограниченных, равномерно непрерывных на каждом множестве  $R \times K$ , таким образом, что для любого компакта  $K \subset G$  существует число  $m = m(K) > 0$  и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ , такие, что

$$\|V(t, x)\|_k \leq m, \quad \|V(t_2, x_2) - V(t_1, x_1)\|_k < \varepsilon$$

для всех  $(t, x) \in \mathbb{R} \times K$ ,  $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathbb{R} \times K$ , удовлетворяющих неравенствам  $|t_2 - t_1| < \delta$ ,  $\|x_2 - x_1\| < \delta$ .

Для каждой функции  $V \in \mathbb{K}_1$  семейство сдвигов

$$\{V_\tau(t, x) = V(t + \tau, x), \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

будет предкомпактно в некотором функциональном метризуемом пространстве  $F_v$  непрерывных функций  $V : \mathbb{R}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$  с открыто-компактной топологией. Таким образом, для любой последовательности  $t_l \rightarrow +\infty$  найдутся подпоследовательность  $t_{l_j} \rightarrow +\infty$  и функция  $V^* \in F_v$ , такие, что последовательность сдвигов

$$\{V_{l_j}(t, x) = V(t_{l_j} + t, x)\}$$

будет сходиться к  $V^*(t, x)$  в пространстве  $F_v$ , а именно, сходимость будет равномерной по  $(t, x) \in [-\beta, \beta] \times K$  для каждого числа  $\beta > 0$  и каждого компактного множества  $K \subset G$ .

Введем также аналогичные классы  $\mathbb{K}_2$  и  $\mathbb{K}_3$  векторных функций

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ и } W : \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

ограниченных и равномерно непрерывных по  $(t, v) \in \mathbb{R} \times K_2$  и  $(t, x, v) \in \mathbb{R} \times K_1 \times K_2$  для любых компактных множеств  $K_1 \subset G$  и  $K_2 \subset \mathbb{R}^k$ . При этом дополнительно будем считать, что каждая функция  $F \in \mathbb{K}_2$  непрерывно дифференцируема по  $v$ .

Соответственно для каждой из функций  $V \in \mathbb{K}_1$ ,  $F \in \mathbb{K}_2$ ,  $W \in \mathbb{K}_3$  могут быть построены семейства предельных функций  $\{V^*\}$ ,  $\{F^*\}$ ,  $\{W^*\}$ . А для определенных последовательностей  $t_j \rightarrow +\infty$  могут быть найдены предельные совокупности  $\{(X^*, V^*, F^*, W^*)\}$ .

Пусть для системы (2.2) существует функция  $V \in \mathbb{K}_1$ ,  $V \in C^1$ ,  $V(t, 0) \equiv 0$ , производная которой в силу этой системы представима в виде

$$\dot{V}(t, x) = F(t, V(t, x)) + W(t, x, V(t, x)), \quad F(t, 0) \equiv 0, W(t, 0, 0) \equiv 0, \quad (2.5)$$

где функция  $F = F(t, v)$ ,  $F \in \mathbb{K}_2$ , квазимоноотонная и непрерывно дифференцируемая по  $v \in \mathbb{R}^k$ ,  $\partial F / \partial v \in \mathbb{K}_2$ , функция  $W \in \mathbb{K}_3$ ,  $W(t, x, v) \leq 0$  для любых  $(t, x, v) \in \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k$ .

Из представления (2.5) следует, что  $V(t, x)$  — вектор-функция сравнения, а система (2.3) есть система сравнения. Функции  $W(t, x, v)$  являются «невязками» в оценке производной  $\dot{V}(t, x)$ .

Если  $V = V(t, x)$  — функция, удовлетворяющая уравнению (2.5), при этом  $V(t_0, x_0) = V_0$ , а  $v = v(t, t_0, V_0)$  — решение системы (2.3), определенное на интервале  $[t_0, t_0 + \beta)$ ,  $\beta > 0$ , то на решении  $x = x(t, t_0, x_0)$  системы (2.2) выполняется неравенство [1]

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq v(t, t_0, V_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \beta)$$

Из условия  $F \in \mathbb{K}_2$  следует, что система (2.3) предкомпактна и для нее можно определить семейство предельных систем сравнения

$$\dot{v} = F^*(t, v), \quad F^* \in F_f \quad (2.6)$$

Из условий относительно правой части  $F = F(t, v)$  системы (2.3) следует, что решения этой системы  $v = v(t, t_0, v_0)$  непрерывно дифференцируемы по  $(t_0, v_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k$ . Из свойства неубывания зависимости  $v(t, t_0, v_0)$  по  $v_0$  [1] следует, что матрица

$$\Phi(t, t_0, v_0) = \frac{\partial v(t, t_0, v_0)}{\partial v_0}$$

является неотрицательной, нормированной,  $\Phi(t_0, t_0, v_0) = I$  ( $I$  — единичная матрица), фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях

$$\dot{y} = H(t, t_0, v_0)y, \quad H = \left. \frac{\partial F(t, v)}{\partial v} \right|_{v=v(t, t_0, v_0)}.$$

В дальнейшем будем полагать, что система сравнения (2.3) такова, что матрица  $\Phi(t, t_0, v_0)$  имеет свойство: для любого компакта  $K \in \mathbb{R}^k$  существуют числа  $M(K)$  и  $\alpha(K) > 0$ , такие, что для любых  $(t, t_0, v_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times K$  имеют место неравенства

$$\|\Phi(t, t_0, v_0)\| \leq M(K), \quad \det \Phi(t, t_0, v_0) \geq \alpha(K) \quad (2.7)$$

Пусть  $x = x(t, t_0, x_0)$  — какое-либо движение системы (2.2), ограниченное компактом  $K_0 \subset G$ ,  $x(t, t_0, x_0) \in K_0$  для всех  $t \geq t_0$ ,  $\omega(t_0, x_0)$  — положительное предельное множество этого решения.

Из равенства (2.5) на основании формулы В.М. Алексева [2] получим следующее соотношение между значением

$$V[t] = V(t, x[t]) = V(t, x(t, t_0, x_0))$$

функции  $V(t, x)$  на решении  $x = x[t] = x(t, t_0, x_0)$  и решением

$$v = v[t] = v(t, t_0, V_0), \quad V_0 = V(t_0, x_0)$$

системы сравнения (2.3):

$$V(t, x[t]) = v[t] + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, V(\tau, x[\tau])) \cdot W(\tau, x[\tau], V(\tau, x[\tau])) d\tau$$

На основе этого соотношения в работе [5] представлены новые результаты о локализации положительного предельного множества  $\omega^+(t_0, x_0)$  и соответствующие результаты об асимптотической устойчивости при наличии векторной функции Ляпунова, удовлетворяющей равенству (2.5).

### 3. Теоремы о стабилизации

Имеет место следующая теорема.

**Т е о р е м а 3.1.** *Предположим, что существует определенно-положительная вектор-функция Ляпунова  $V = V(t, x)$ ,  $V \in \mathbb{K}_1$ , такая, что:*

- 1) справедливо дифференциальное равенство (2.5);
- 2) нулевое решение  $v = 0$  системы сравнения (2.3) равномерно устойчиво;
- 3) на каждом ограниченном решении системы сравнения (2.3) выполнено условие (2.7);

4) для любой предельной совокупности  $(X^*, V^*, F^*, W^*)$  и каждого ограниченного решения  $v = v^*(t) \neq 0$  предельной системы сравнения (2.6) множество

$$\{V^*(t, x) = v^*(t)\} \cap \{W^*(t, x, v^*(t)) = 0\}$$

не содержит решений предельной системы (2.4).

Тогда управляющее воздействие  $u = u(t, x)$  решает задачу о стабилизации системы (2.1).

**О п р е д е л е н и е 3.1.** Нулевое решение  $x = 0$  устойчиво относительно множества  $\{\bar{V}^*(t, x) = 0\}$  и выбранной предельной совокупности  $(X^*, V^*, F^*, W^*)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что для любого решения

$$x = x^*(t, x_0), x^*(0, x_0) = x_0 \\ x_0 \in \{\|x\| < \delta\} \cap \{\bar{V}^*(0, x) = 0\} \cap \{W^*(0, x, 0) = 0\}$$

системы (2.4) выполняется условие

$$\|x^*(t, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

**О п р е д е л е н и е 3.2.** Нулевое решение  $x = 0$  асимптотически устойчиво относительно множества  $\{\bar{V}^*(t, x) = 0\}$  и выбранной предельной совокупности  $(X^*, V^*, F^*, W^*)$ , если оно устойчиво, а также найдется число  $\Delta > 0$ , при котором для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $T = T(\varepsilon) > 0$ , такое, что для любого решения

$$x = x^*(t, x_0), x^*(0, x_0) = x_0 \\ x_0 \in \{\|x\| < \Delta\} \cap \{\bar{V}^*(0, x) = 0\} \cap \{W^*(0, x, 0) = 0\}$$

системы (2.4) выполняется условие

$$\|x^*(t, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T.$$

**О п р е д е л е н и е 3.3.** Нулевое решение  $x = 0$  равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) относительно множества  $\{\bar{V}^*(t, x) = 0\}$  и семейства предельных совокупностей  $\{(X^*, V^*, F^*, W^*)\}$ , если число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  в определении 3.2 не зависит (числа  $\Delta > 0$  и  $T = T(\varepsilon) > 0$  в определении 3.2 не зависят) от выбора  $(X^*, V^*, S^*, W^*)$ .

**Т е о р е м а 3.2.** Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова

$$V = V(t, x) \geq 0, \quad V \in \mathbb{K}_1$$

такая, что выполнены условия 1–4 теоремы 3.1, а также следующее условие: 5) нулевое решение  $x = 0$  равномерно асимптотически устойчиво относительно множества  $\{\bar{V}^*(t, x) = 0\}$  и семейства предельных совокупностей  $\{(X^*, V^*, F^*, W^*)\}$ .

Тогда управляющее воздействие  $u = u(t, x)$  решает задачу о стабилизации системы (2.1).

Среди задач, к которым приложимы теоремы 2.1–3.2, можно выделить задачи, в которых движения управляемой системы достигают некоторого множества, определяемого равенствами вида

$$N = \{V^{n-k} = 0, V^{n-k+1} = 0, \dots, V^n = 0\} \quad (1 \leq k \leq n).$$

В работе [6] дана следующая постановка задачи синтеза управления для системы (2.1) на конечном отрезке времени.

**О п р е д е л е н и е 3.4.** Задача синтеза управления на конечном отрезке времени состоит в нахождении управления  $u = u^0(t, x)$ ,  $u \in U$ , такого, чтобы движение  $x = x(t)$  системы (2.2), начинающееся в произвольной точке  $x_0$  из некоторой окрестности  $x = 0$  в любой начальный момент времени  $t_0$ , попадала в конечный момент времени  $t_0 + T$ , где  $T = T(t_0, x_0) > 0$ , в заданную точку  $x = 0$ .

При этом синтез будем называть устойчивым, если при  $u = u^0(t, x)$ , решающем поставленную задачу, для любого  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что  $\|x(t)\| < \varepsilon$ , если  $\|x_0\| < \delta$  и  $t \in [t_0, t_0 + T]$ .

**О п р е д е л е н и е 3.5.** Задача равномерного синтеза состоит в нахождении управления  $u = u^0(t, x)$ ,  $u \in U$ , такого, что существуют число  $H_0 > 0$  и число  $T > 0$ , такие, что любое движение, начинающееся в произвольной точке  $x_0 \in \Gamma_0$ ,  $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq H_0, 0 < H_0 < H\}$ , в любой начальный момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , попадает в заданную точку  $x = 0$  при некотором  $T^* \in [t_0, t_0 + T]$ .

**Т е о р е м а 3.3.** В предположениях 1) и 2) теоремы 2.1 положим, что:

3) решения системы сравнения (2.3) из некоторой  $\Delta$ -окрестности  $v = 0$  при  $\Delta > 0$  совпадают с  $v = 0$  через конечное  $T > 0$  равномерно по  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ .

Тогда  $u = u^0(t, x)$  решает задачу о равномерном конечном синтезе.

**Т е о р е м а 3.4.** Допустим, что для системы (2.1) можно найти управление  $u^0 \in U$  и векторную функцию  $V(t, x) \geq 0$ ,  $\|V(t, x)\| \leq a(\|x\|)$ , такие, что:

1)  $\dot{V}^+(t, x) \leq F(t, V(t, x))$   $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times G$ ;

2) решения системы сравнения (2.3) из некоторой  $\Delta$ -окрестности  $v = 0$  при  $\Delta > 0$  совпадают с  $v = 0$  через конечное  $T > 0$  равномерно по  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ .

3) движения системы (2.2), начинающиеся на множестве  $\{V(t, x) = 0\}$ , попадают в точку  $x = 0$  через конечное  $T > 0$  равномерно по  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ .

Тогда  $u = u^0(t, x)$  решает задачу о равномерном конечном синтезе.

## 4. Некоторые примеры

**П р и м е р 4.1.** Рассмотрим задачу о стабилизации положения равновесия перевернутого математического маятника, движение которого описывается известным уравнением

$$\ddot{\varphi} = \omega^2 \sin \varphi + U, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad (4.1)$$

где  $\varphi$  — угол отклонения маятника от вертикальной оси, направленной вверх,  $U$  — приложенный управляющий момент.

Положим

$$U = -k(t)|\dot{\varphi} + 2\omega \sin \varphi/2|^{\alpha(t)} \text{sign}(\dot{\varphi} + 2\omega \sin \varphi/2).$$

Если взять функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + 2\omega \sin \frac{\varphi}{2})^2,$$

то будет иметь уравнение сравнения

$$\dot{v} = 2\omega v - 2k(t)v^{(\alpha(t)+1)/2}.$$

Каждое движение маятника, содержащееся в инвариантном множестве  $\{V = \dot{\varphi} + 2\omega \sin \varphi/2 = 0\}$ , неограниченно приближается при  $t \rightarrow +\infty$  к одному из положений равновесия

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \varphi = 2k\pi, \quad k \in Z. \quad (4.2)$$

Отсюда по теореме 3.2 имеем следующие результаты.

**Результат 1.** При  $k(t) \geq \omega + \delta > \omega$ ,  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ , решается задача о стабилизации  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\varphi = 0$ .

**Результат 2.** При  $k(t) \geq k_0 > 0$ ,  $0 \leq \alpha(t) \leq 1 - \delta$ , эта задача решается так, что каждое ограниченное движение маятника попадает на множество  $\{\dot{\varphi} + 2\omega \sin \varphi = 0\}$  за конечное время.

**Результат 3.** При  $\alpha(t) \equiv 1$ ,  $\int_0^{\infty} (k(t) - \omega) dt = +\infty$ ,  $\int_t^{t+T} (k(\tau) - \omega) d\tau \geq \beta > 0$  для каждого  $t \geq 0$  и некоторого  $T > 0$ , достигается глобальная стабилизация (4.2).

**Пример 4.2.** Рассмотрим задачу о стабилизации маятника в более общем случае

$$\ddot{\varphi} = g(t) \sin \varphi + U, \quad g_0 \leq g(t) \leq g_1, \quad (4.3)$$

ограничиваясь областью  $\{\dot{\varphi}, \varphi : |\varphi| \leq \pi - \delta < \pi\}$ .

Положим

$$U = -k(t) |\dot{\varphi} + 2\omega \sin \frac{\varphi}{2}|^{\alpha(t)} \operatorname{sign}(\dot{\varphi} + 2\omega \sin \frac{\varphi}{2})$$

( $\omega > 0$ ,  $k_0 \leq k(t) \leq k_1$ ).

Введем векторную функцию  $V = (V_1, V_2)$

$$V_1 = 2|\sin \frac{\varphi}{2}|, \quad V_2 = |\dot{\varphi} + 2\omega \sin \frac{\varphi}{2}|.$$

Тогда имеем систему сравнения

$$\dot{v}_1 = -\omega \delta_0 v_1 + 2v_2, \quad \dot{v}_2 = |g(t) - \omega^2| v_1 + \omega v_2 - k(t) v_2^{\alpha(t)},$$

$\delta_0 = \cos \frac{\pi - \delta}{2} > 0$ .

Из соответствующих заключений относительно этой системы решается задача о стабилизации положения равновесия  $\dot{\varphi} = \varphi = 0$ .

При  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$  и  $k(t) \geq \omega + k_0 > \omega$  задача сводится к исследованию устойчивости системы

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -\omega \delta_0 v_1 + 2v_2, \\ \dot{v}_2 = g_0 v_1 - k_0 v_2, \quad g_0 = \max(|g(t) - \omega^2| \quad \text{при } t \geq 0). \end{cases}$$

Условие асимптотической устойчивости этой системы запишется в виде

$$k_0 \omega \delta_0 > g_0$$

При  $\alpha(t) \equiv 0$  и этом условии получаем, что каждое движение маятника, ограниченное так, что  $\varphi(t) \in \{(\dot{\varphi}, \varphi) : |\varphi| \leq \pi - \delta\}$  для всех  $t \in \mathbb{R}^+$ , попадает на множество  $\{V_2 = 0\}$  за конечное время, но затем покидает его.

**Пример 4.3.** Рассмотрим еще более общую задачу о стабилизации произвольного вращательного движения маятника с учетом неучтенных воздействий.

Пусть

$$\varphi = \varphi_0(t), \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0(t)$$

есть некоторое программное движение маятника.

Полагая  $x_1 = \varphi - \varphi_0(t)$ ,  $x_2 = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0(t)$ , имеем уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2g(t) \sin \frac{x_1}{2} \cos(\varphi_0(t) + \frac{x_1}{2}) + M_0(t) + U, \end{cases}$$

где  $M_0(t)$  — момент неучтенных воздействий,  $|M_0(t)| \leq m_0(t) \leq m_1 = \text{const}$ ,  $|g(t)| \leq g_0 = \text{const}$ .

Положим

$$U = -k(t)f(|x_2 + 2\omega \sin \frac{x_1}{2}|) \text{sign}(x_2 + 2\omega \sin \frac{x_1}{2}),$$

где  $f(a) \geq 0$  — некоторая функция,  $k(t) \geq 0$ .

Примем

$$V_1 = 2|\sin \frac{x_1}{2}|, \quad V_2 = |x_2 + 2\omega \sin \frac{x_1}{2}|.$$

Тогда для движений, ограниченных областью  $\{\varphi : |\varphi - \varphi_0(t)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\}$  можно вывести следующую систему сравнения

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \delta_0 \omega v_1 + v_2, \\ \dot{v}_2 = m_0(t) + (g_0(t) + \omega^2)v_1 + \omega v_2 - k(t)f(v_2). \end{cases}$$

Из анализа этой системы получаем, что при

$$\begin{aligned} f(V_2) \equiv 1, \quad k(t) \geq m_0(t) + \omega + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \\ \varepsilon \delta_0 \omega > g_0(t) + \omega^2, \end{aligned}$$

каждое движение маятника, ограниченное областью  $\{|\varphi - \varphi_0(t)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}\}$  будет стремиться к  $\varphi = \varphi_0(t)$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  в форме скользящего режима.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/6194) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг» (НК-408П, П/2230).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова и В.М. Матросова. — М.: Наука, 1987. — 312 с.
2. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 253 с.
3. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equation// J. Different. Equat. — 1977. — Vol. 23, № 2. — p. 216-223.
4. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы// ПММ. — 1984. — Т. 48. — Вып. 2. — С. 225-232.
5. Андреев А.С., Перегудова О.А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости// Доклады Академии наук. — 2005. — Т. 400, № 5. — С. 621-624.
6. Коробов В.И. Метод функции управляемости. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хлотивая динамика». — 2007. — 576 с.
7. Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербиков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 316 с.

# Lyapunov functions method in the problems of control

© A. S. Andreev<sup>2</sup>

**Abstract.** In the work the problems on stabilization and control on the finite time interval are solved. The investigation is based on the vector Lyapunov functions and limiting equations.

**Key Words:** vector Lyapunov function, comparison method, limiting equations, stabilization, synthesis of control on the finite time interval.

---

<sup>2</sup>Head of Mathematics and Information Technologies Faculty, Head of Information Security and Control Theory Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; AndreevAS@ulsu.ru.

УДК 519.876.5

## Разработка неизотермической кинетической модели реакции дегидрирования стирола на железокалиевом катализаторе

© А. В. Балаев<sup>1</sup>, И. Ф. Басыров<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе приведены результаты, полученные при разработке кинетической модели реакции дегидрирования стирола на железокалиевом катализаторе. Разработка проводилась на основе неизотермических экспериментальных данных, полученных при работе промышленного реактора. Решена обратная кинетическая задача и определены численные значения кинетических параметров (констант и энергий активации), адекватно описывающие неизотермические режимы работы реактора.

**Ключевые слова:** кинетические уравнения, закон действующих масс, константы скорости реакции, энергии активации, неизотермические данные, система дифференциальных уравнений.

### 1. Введение

Для понимания физико-химической сущности каталитической реакции, последующего математического моделирования каталитического процесса и определения условий его промышленной реализации необходимы, прежде всего, разработка его кинетической и математической моделей [1]-[3].

Согласно принципам структурированного, иерархического подхода при разработках математических моделей [2], [3] вся полученная информация на кинетическом уровне становится составной частью моделей каталитических реакторов.

Для задач последующего моделирования каталитических процессов и реакторов детальная разработка на кинетическом уровне становится определяющей, поскольку кинетические уравнения являются источниками членами дифференциальных уравнений материального и теплового балансов.

Понятно, что изучение реакций на кинетическом уровне желательно проводить в некоторых идеальных условиях, когда влияние процессов переноса и диффузии сведено к минимуму, т.е. проводить эксперименты в кинетической области, поэтому исследования кинетических закономерностей проводят, как правило, в изотермических условиях [2], [3]. Для реализации таких условий используются реакторы идеального смешения или реакторы идеального вытеснения.

### 2. Разработка кинетической модели

Однако кинетические эксперименты для дегидрирования этилбензола не проводились. Поэтому возникла необходимость разработки неизотермической кинетической модели реакции дегидрирования этилбензола на железокалиевом катализаторе на основе

---

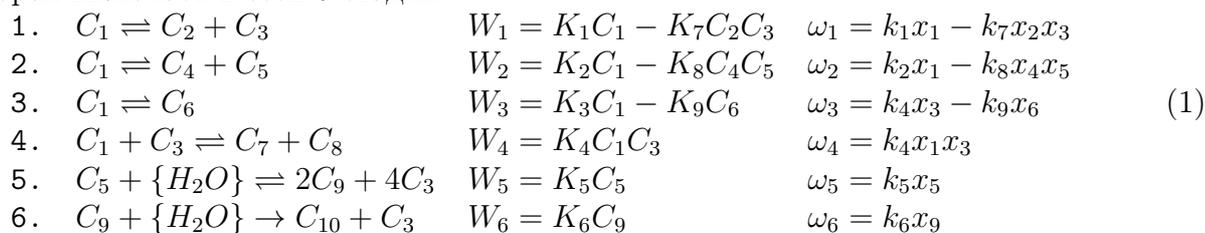
<sup>1</sup>Ведущий научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; avbalaev@gmail.com.

<sup>2</sup>Аспирант лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; ifbasurov@gmail.com.

экспериментальных данных, полученных при работе промышленного реактора. Поскольку реакция дегидрирования этилбензола эндотермическая, реактор представляет собой каскад из двух реакторов (P.202.1 и P.202.2) с неподвижным слоем катализатора и промежуточным подогревом реакционной смеси после первого реактора.

При анализе работы реактора были выбраны режимы со следующими режимными показателями: температура на входе в реактор ( $605 - 610^\circ\text{C}$ ), давление в реакторе ( $0.3 - 0.4$  ат), скорости подачи этилбензола ( $0.3 - 0.4 \text{ ч}^{-1}$ ) или ( $32-50 \text{ т/ч}$ ).

На основании анализа промышленных и литературных [1]-[7] данных предложена схема химических превращений дегидрирования этилбензола на железокалиевом катализаторе, которая включает в себя 6 стадий.



где  $C_i$  концентрации компонентов,  $\text{кмоль/м}^3$ :  $C_1$  - этилбензол ( $C_6H_5C_2H_5$ ),  $C_2$  - стирол ( $C_6H_5C_2H_3$ ),  $C_3$  - водород ( $H_2$ ),  $C_4$  - бензол ( $C_6H_6$ ),  $C_5$  - этилен ( $C_2H_4$ ),  $C_6$  - ксилол ( $C_6H_4(CH_3)_2$ ),  $C_7$  - толуол ( $C_6H_5CH_3$ ),  $C_8$  - парафин ( $CH_4$ ),  $C_9$  - монооксид углерода ( $CO$ ),  $C_{10}$  - диоксид углерода ( $CO_2$ );  $W_j$  - скорости химических реакций,  $\text{кмоль}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ ;  $\omega_j = W_j/C_0$  - приведенные скорости химического превращения,  $\text{с}^{-1}$ ;  $C_0$  - начальная молярная плотность реакционной смеси,  $\text{кмоль/м}^3$ .

Нумерация концентраций компонентов в молярных долях ( $x_i$ ) соответствует нумерации размерных концентраций  $C_i$ .

Кинетические уравнения, соответствующие схеме превращений (1), проанализированы в виде функциональных зависимостей в рамках закона действующих масс.

Константы схемы (1) ( $k_i$ ) являются некоторыми приведенными величинами, которые имеют размерность обратного времени и связаны с истинными константами ( $K_i$ ) соотношениями:  $k_i = K_i \cdot C_0$  ( $i=4,7,8$ ), размерность  $K_i$  ( $\text{м}^3 \cdot \text{кмоль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ );  $k_i = K_i$  ( $\text{с}^{-1}$ ) ( $i=1,2,3,5,6,9$ ). Наконец, поскольку реакция протекает при значительном молярном избытке водяного пара, а концентрации образующихся оксидов углерода незначительны, концентрация паров воды считается постоянной и включена в константы 5 и 6.

Аналогичный подход при анализе кинетических уравнений использован в работах [4]-[7].

Все данные по изменению концентраций и температур получены в промышленном реакторе с неподвижным слоем катализатора, который при разработке неизотермической кинетической модели рассматривался как реактор идеального вытеснения.

Решение обратной кинетической задачи осуществлялось методом случайного поиска с последующим параболическим спуском в выбранном направлении изменения констант. Определенные при решении численные значения кинетических параметров приведены в таблице 1.

| Кинетические константы при 585°C |         | Энергии активации, ккал/моль |      |
|----------------------------------|---------|------------------------------|------|
| $K_1$ (1/с)                      | 1.179   | $E_1$                        | 30.5 |
| $K_2$ (1/с)                      | 0.02173 | $E_2$                        | 33.2 |
| $K_3$ (1/с)                      | 1.04999 | $E_3$                        | 30.6 |
| $K_4$ (м <sup>3</sup> /кмоль/с)  | 53.991  | $E_4$                        | 21.8 |
| $K_5$ (1/с)                      | 0.08593 | $E_5$                        | 24.8 |
| $K_6$ (1/с)                      | 2.183   | $E_6$                        | 17.6 |
| $K_7$ (м <sup>3</sup> /кмоль/с)  | 1.176   | $E_7$                        | 21.7 |
| $K_8$ (м <sup>3</sup> /кмоль/с)  | 3.582   | $E_8$                        | 31.8 |
| $K_9$ (1/с)                      | 3.214   | $E_9$                        | 31.0 |

Таблица 1: Численные значения кинетических констант

Сравнение расчетных данных, полученных с помощью уравнений (5)-(7) и найденных констант, с экспериментальными данными, полученными при работе промышленного реактора, приведено в таблице 2.

|                          |   |             |   |             |
|--------------------------|---|-------------|---|-------------|
| Режимные параметры       | Подача этилбензола=43 т/ч<br>Подача водяного пара=86 т/ч<br>Давление=0.4 ат<br>Температуры:<br>На входе в Р.202.1=609°C<br>На входе в Р.202.2=605°C |             | Подача этилбензола=31.5 т/ч<br>Подача водяного пара=67 т/ч<br>Давление=0.4 ат<br>Температуры:<br>На входе в Р.202.1=606°C<br>На входе в Р.202.2=597.5°C |             |
| Компонент                | Состав компонентов жидкой фазы, % мас.  |             |   |             |
|                          | Расчет  | Эксперимент | Расчет  | Эксперимент |
| Этилбензол               | 38.44   | 38.43       | 39.06   | 39.37       |
| Стирол                   | 58.9  | 58.91       | 57.02   | 57.03       |
| Бензол                   | 0.44  | 0.44        | 1.09  | 1.17        |
| Ксилолы                  | 0.68  | 0.68        | 0.64  | 0.66        |
| Толуол                   | 1.54  | 1.54        | 1.68  | 1.77        |
| Расчетные температуры    | На выходе из Р.202.1=550°C<br>На выходе из Р.202.2=567°C  |             | На выходе из Р.202.1=544°C<br>На выходе из Р.202.2=559°C  |             |
| Эксперимент. температуры | На выходе из Р.202.1=549°C<br>На выходе из Р.202.2=568°C  |             | На выходе из Р.202.1=551°C<br>На выходе из Р.202.2=561°C  |             |

Таблица 2: Сравнение расчетных и промышленных характеристик работы реактора

Видно, что разработанная неизотермическая кинетическая модель адекватно описывает данные по изменению концентрационных и температурных характеристик, полученные на промышленном реакторе, в пределах погрешности количественного анализа.

### 3. Выводы

Разработана неизотермическая кинетическая модель реакции дегидрирования этилбензола на железокалиевом катализаторе. Решена обратная кинетическая задача и определены численные значения кинетических параметров (констант и энергий

активации), адекватно описывающие экспериментальные данные по изменению состава реакционной среды и температуры, полученные на промышленном реакторе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слинько М.Г. О кинетике гетерогенно-каталитических реакций // Химическая промышленность. 1993. №1-2. С.3-8.
2. Слинько М.Г. Научные основы теории каталитических процессов и реакторов // Кинетика и катализ. 2000. - Т. 41. - №6. - С. 933-946.
3. Слинько М.Г. Основы и принципы математического моделирования каталитических процессов // Ин-т катализа им. Г.К.Борескова. Новосибирск, 2004. 488 с.
4. Abdalla B.K., Elnashaie S.S.E.H., Alkhowaiter S., Elshishini S.S.// Appl. Catal. A: General. 1994. V.113. №1. P.89-102.
5. Elnashaie S.S.E.H., et al. // Catalysis today. 2001. V.64. P.151-162.
6. Schule A., et al. // J.Catal. 2005. V.231. №1. P.172-180.
7. Lee W.J., Froment G.F. // Ind. Eng. Chem. Res. 2008. V.47. №23. P.9183-9194.

# Development of kinetic model of styrene dehydrogenation on feroumkalii catalyst

© A. V. Balaev<sup>3</sup>, I. F. Basyrov<sup>4</sup>

**Abstract.** In this work are presented the results received under development of kinetic model of the of dehydrogenation styrene reaction on feroumkalii catalyst. Development was carried out on the base of nonisothermal data received under working of industry reactor. It was solved inversed kinetic problem and was estimated kinetic parameters (constants and activation energies), which adequate describe nonisothermal performance of reactor.

**Key Words:** kinetic equations, law of mass action, reaction rate constants, activation energies, nonisothermal data, system of ordinary differential equations.

---

<sup>3</sup>Leading Researcher, Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis RAS, Ufa; avbalaev@gmail.com.

<sup>4</sup>Graduate student, Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis RAS, Ufa; ifbasyrov@gmail.com.

УДК 533.6

## Об одной нелинейной начально-краевой задаче в аэрогидромеханике

© П. А. Вельмисов<sup>1</sup>, А. В. Крупенников<sup>2</sup>

**Аннотация.** Исследуются безвихревые изэнтропические (потенциальные) течения идеального газа, которые описываются нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных для потенциала скорости. Для этого уравнения указан класс решений, используемый для описания течений газа между вращающимися плоскостями. Найдено точное решение исследуемой задачи в случае некоторых конкретно заданных законов движения плоскостей. Предложен способ численного решения задачи методом Галеркина при произвольных законах движения плоскостей.

**Ключевые слова:** нелинейная начально-краевая задача, аэрогидромеханика, потенциал скорости, вращающиеся плоскости, дифференциальное уравнение с частными производными, метод Галеркина.

### 1. Постановка задачи

Безвихревые изэнтропические течения идеального газа описываются уравнением:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + 2\varphi_r\varphi_{rt} + \frac{2}{r^2}\varphi_\theta\varphi_{\theta t} + \varphi_r^2\varphi_{rr} + \frac{1}{r^4}\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta} + \\ + \frac{2}{r^2}\varphi_r\varphi_\theta\varphi_{r\theta} - \frac{1}{r^3}\varphi_r\varphi_\theta^2 = a^2 \left( \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$a^2 = \frac{\kappa + 1}{2} - (\kappa - 1) \left( \varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\varphi_\theta^2 \right).$$

Здесь  $\varphi(r, \theta, t)$ ,  $a$  - соответственно безразмерные потенциал скорости, скорость звука,  $r, \theta$  - полярные координаты,  $t$  - время,  $\kappa = const$  - показатель адиабаты.

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$\varphi = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}t + r^2f(\theta, t). \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), для  $f(\theta, t)$  получим уравнение

$$f_{tt} + 8ff_t + 2f_\theta f_{\theta t} + 8f^3 + f_\theta^2 f_{\theta\theta} + 6ff_\theta^2 + (\kappa - 1) \left( f_t + 2f^2 + \frac{1}{2}f_\theta^2 \right) (f_{\theta\theta} + 4f) = 0. \quad (1.3)$$

Класс решений (1.2), (1.3) используется для описания течений газа между вращающимися по законам  $\theta = \theta_1(t)$ ,  $\theta = \theta_2(t)$  плоскостями. Для точек плоскостей ( $\theta = \theta_k(t)$ ) имеют место условия непротекания

$$f_\theta[\theta_k(t), t] = \theta'_k(t), \quad k = 1, 2. \quad (1.4)$$

Задавая начальные условия

$$f(\theta, 0) = g(\theta), \quad f_t(\theta, 0) = h(\theta) \quad (1.5)$$

будем иметь нелинейную начально-краевую задачу (1.3) - (1.5).

<sup>1</sup>Заведующий кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmiso@ulstu.ru

<sup>2</sup>Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; al.krupennikov@mail.ru

## 2. Точное решение

Точное решение поставленной задачи (1.3), (1.4) можно искать в виде

$$f(\theta, t) = a(t) \cos 2\theta + b(t) \sin 2\theta + c(t). \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в уравнение (1.3), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} & [8a(t)c'(t) + 8b(t)^2a(t) + 8a(t)c(t)^2 + a''(t) + 4c(t)a'(t) + 4\kappa c(t)a'(t) + 16\kappa a(t)c(t)^2 + 8a(t)^3] \cdot \\ & \cdot \cos 2\theta + [b''(t) + 8a(t)^2b(t) + 4c(t)b'(t) + 8b(t)c'(t) + 8b(t)c(t)^2 + 8b(t)^3 + 4\kappa c(t)b'(t) + \\ & + 16\kappa b(t)c(t)^2] \cdot \sin 2\theta + 4\kappa c(t)c'(t) + c''(t) + 8\kappa c(t)b(t)^2 + 8a(t)a'(t) + 16b(t)^2c(t) + \\ & + 8\kappa c(t)a(t)^2 + 8\kappa c(t)^3 + 8b(t)b'(t) + 16c(t)a(t)^2 + 4c(t)c'(t) = 0. \end{aligned}$$

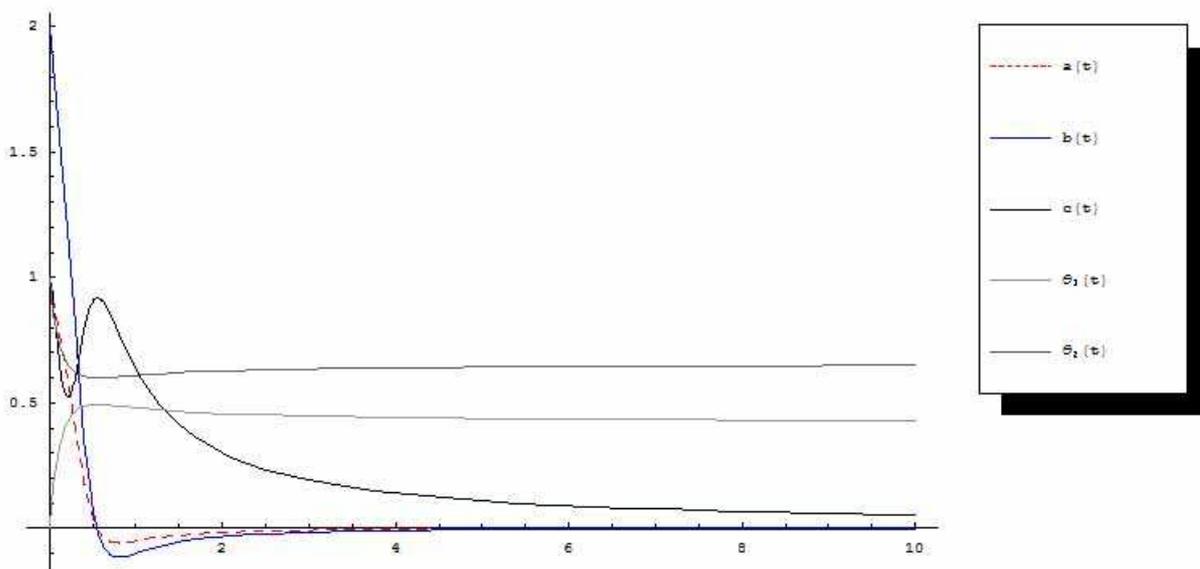
Подставив  $f(\theta, t) = a(t) \cos 2\theta + b(t) \sin 2\theta + c(t)$  в граничные условия, получим:  $-2a(t) \sin 2\theta_1(t) + 2b(t) \cos 2\theta_1(t) = \theta_1'(t)$ ,  $-2a(t) \sin 2\theta_2(t) + 2b(t) \cos 2\theta_2(t) = \theta_2'(t)$ .

Имеем систему 5 дифференциальных уравнений для 5 неизвестных  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ :

$$\begin{cases} a'' + 4a'c(1 + \kappa) + a(8b^2 + 8c' + 8c^2 + 16\kappa c^2) + 8a^3 = 0, \\ b'' + 4b'c(1 + \kappa) + b(8a^2 + 8c' + 8c^2 + 16\kappa c^2) + 8b^3 = 0, \\ c'' + 4c'(1 + \kappa) + 8c(2 + \kappa)(b^2 + a^2) + 8aa' + 8bb' + 8\kappa c^3 = 0, \\ -2a \sin 2\theta_1 + 2b \cos 2\theta_1 = \theta_1', \\ -2a \sin 2\theta_2 + 2b \cos 2\theta_2 = \theta_2'. \end{cases}$$

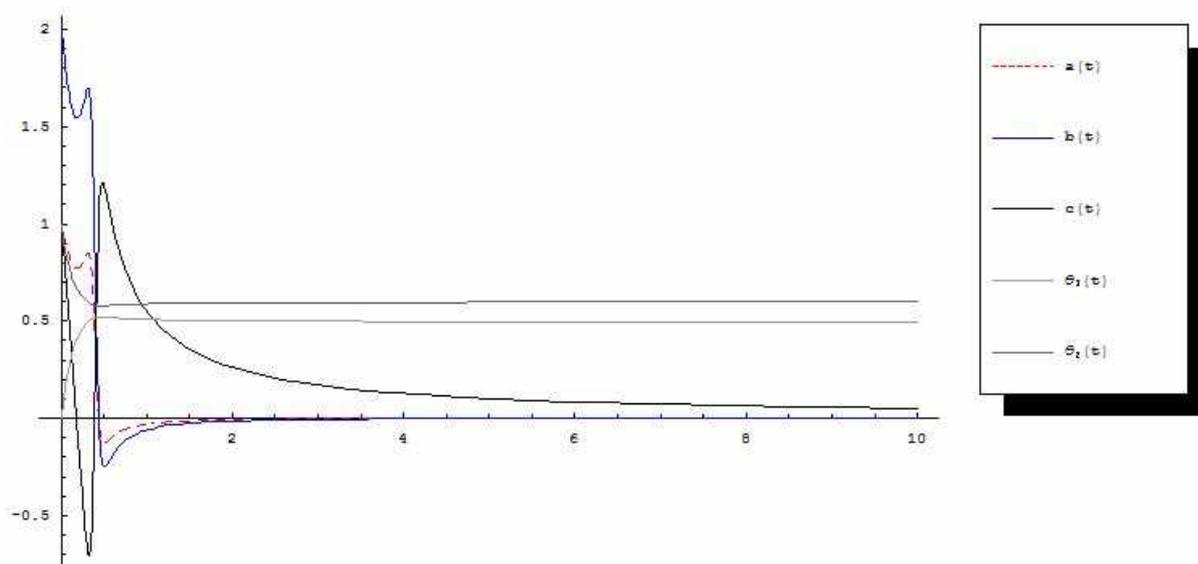
Задавая начальные условия  $a'(0) = a_0$ ,  $a(0) = a_0'$ ;  $b(0) = b_0$ ,  $b(0) = b_0'$ ;  $c(0) = c_0$ ,  $c'(0) = c_0'$ ;  $\theta_1(0) = \theta_{10}$ ,  $\theta_2(0) = \theta_{20}$ , будем иметь задачу Коши, которую можно решать численно методом Рунге-Кутты с помощью пакета Mathematica.

Например, зададим начальные условия:  $a'(0) = 0$ ,  $a(0) = 1$ ;  $b'(0) = 0$ ,  $b(0) = 2$ ;  $c'(0) = 0$ ,  $c(0) = 1$ ;  $\theta_1(0) = 0$ ,  $\theta_2(0) = 1$ . Ниже на рис. 2.1 приведены графики функций  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  при  $\kappa = 1.4$  (воздух), на рис. 2.2 при  $\kappa = 7$  (вода), а на рис. 2.3 поверхность  $f(\theta, t)$  при  $\kappa = 1.4$  (воздух).



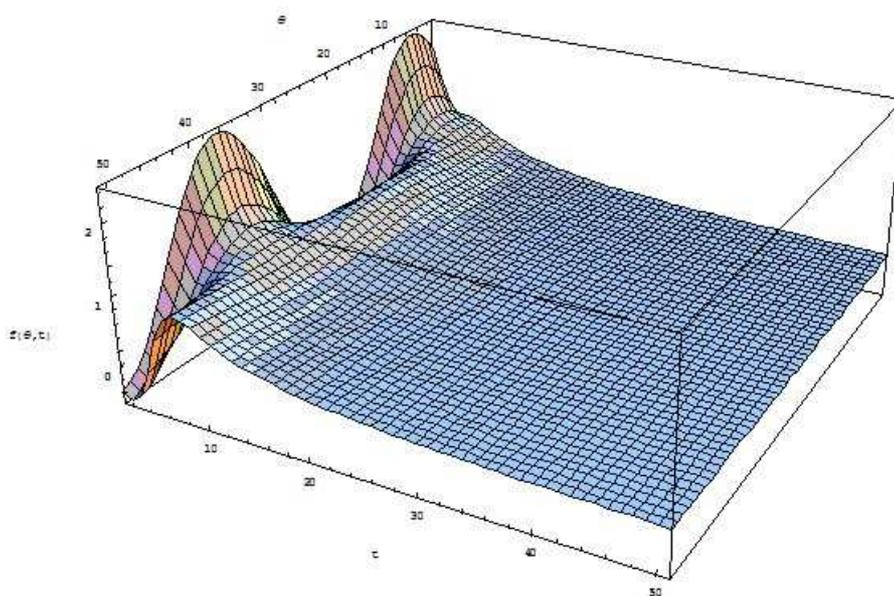
Р и с у н о к 2.1

Графики функций  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  при  $t \in [0, 10]$  ( $\kappa = 1.4$ )



Р и с у н о к 2.2

Графики функций  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  при  $t \in [0, 10]$  ( $\kappa = 7$ )



Р и с у н о к 2.3

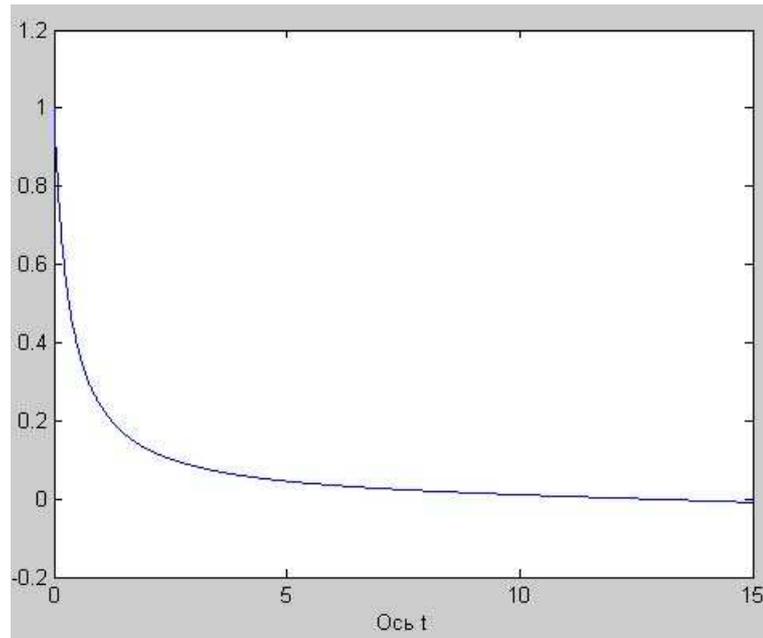
Поверхность  $f(\theta, t) = a(t) \cos 2\theta + b(t) \sin 2\theta + c(t)$  при  $t \in [0, 5]$ ,  $\theta \in [0, 5]$  ( $\kappa = 1.4$ )

Найдены также другие частные решения для уравнения (1.3).

Например, в случае, когда функция  $f$  зависит только от  $t$ , дифференциальное уравнение (1.3) примет вид

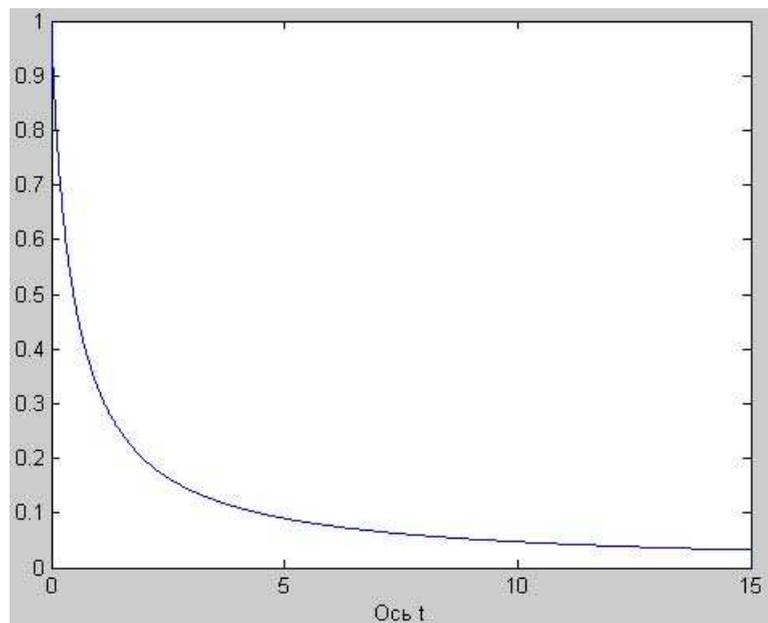
$$f_{tt} + 8ff_t + 8f^3 + 4(\kappa - 1)f(f_t + 2f^2) = 0. \quad (2.2)$$

Для этого обыкновенного дифференциального уравнения (2.2) решалась задача Коши с начальными условиями  $f(0) = g_0$ ,  $f_t(0) = h_0$ , при этом строился график для  $f(t)$ . Примеры приведены на рис. 2.4 - 2.5:



Р и с у н о к 2.4

График  $f = f(t)$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -3$ ,  $\kappa = 1.4$  (воздух)



Р и с у н о к 2.5

График  $f = f(t)$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -3$ ,  $\kappa = 7$  (вода)

В случае стационарного течения ( $f = f(\theta)$ ) задача не имеет физического смысла, так как при этом давление оказывается отрицательным.

### 3. Приближенное решение

Предложен приближенный способ решения задачи (1.3),(1.4) о движении газа между вращающимися плоскостями, основанный на методе Галеркина и приводящий

решение задачи к исследованию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом случае решение задачи находится для произвольных законов вращения плоскостей  $\theta = \theta_1(t)$ ,  $\theta = \theta_2(t)$ . Решение представлялось в виде

$$f(\theta, t) = a(t) \cos \nu \theta + b(t) \cos \nu \theta + \sum_{n=0}^N f_n(t) \cos \frac{n\pi(\theta - \theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}, \quad (3.1)$$

где  $a(t) = \frac{1}{\nu\Delta}(\theta'_1 \cos \nu \theta_2 - \theta'_2 \cos \nu \theta_1)$ ,  $b(t) = \frac{1}{\nu\Delta}(\theta'_1 \sin \nu \theta_2 - \theta'_2 \sin \nu \theta_1)$ ,  $\Delta = \sin \nu(\theta_2 - \theta_1)$ ,  $\nu$  - произвольный параметр (может быть и функцией времени). Наиболее простые вычисления будут иметь место в случае  $\nu = 2$ .

В первом приближении ( $N = 0$ ) получено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''_0 \cdot S_1 + f_0 f'_0 \cdot S_2 + f_0^3 \cdot S_2 + f_0 \cdot S_3 + f'_0 \cdot S_4 + f_0^2 \cdot S_5 + S_6 = 0, \quad (3.2)$$

где  $S_i$  - функции, зависящие от  $t$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ .

Решение задачи можно представить также в виде

$$f(\theta, t) = \alpha(t)\theta + \beta(t)\theta^2 + \sum_{n=0}^N f_n(t) \cos \frac{n\pi(\theta - \theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}, \quad (3.3)$$

где  $\alpha(t) = \frac{\theta'_1 \theta_2 - \theta_1 \theta'_2}{\theta_2 - \theta_1}$ ,  $\beta(t) = \frac{\theta'_1 - \theta'_2}{2(\theta_2 - \theta_1)}$ .

В частности, в первом приближении, когда  $N=0$ ,

$$f(\theta, t) = \alpha(t)\theta + \beta(t)\theta^2 + f_0(t).$$

Тогда для  $f_0(t)$  получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f'_0 \cdot Z_1 + f''_0 \cdot Z_2 + f'_0 f_0 \cdot Z_3 + f_0 \cdot Z_4 + f_0^3 \cdot Z_5 + f_0^2 \cdot Z_6 + Z_7 = 0, \quad (3.4)$$

где  $Z_i$  - функции, зависящие от  $t$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $i = \overline{1, 7}$ .

Предлагаемые решения (3.1) и (3.3) удовлетворяют граничным условиям непротекания (1.4).

Далее решалась задача Коши для уравнений (3.2) или (3.4) при задании конкретного вида функций  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  и задании начальных условий.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013 гг.), гос.контракт №П1122.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булаев С.В., Вельмисов П.А., Крупенников А.В. Об одном классе потенциальных течений газа // Тезисы докладов XXI Всероссийской конференции «Аналитические методы в газовой динамике». – Санкт-Петербург, 2006, с.17-18.
2. Вельмисов П.А., Булаев С.В., Крупенников А.В. Об одном классе безвихревых изэнтропических течений газа // Труды международной конференции КЛИН-2006. Том 4: Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Ульяновск: УлГТУ, 2006, с.108-110.
3. Вельмисов П.А., Крупенников А.В. Применение метода Галеркина для решения одной нелинейной задачи газовой динамики // Труды международной конференции КЛИН-2007. Том 4: Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: синтез, анализ, диагностика. Ульяновск: УлГТУ, 2007. - с.72-76.

# On a nonlinear initial-boundary value problem in the aerohydrodynamics

© P. A. Velmisov<sup>3</sup>, A. V. Krupennikov<sup>4</sup>

**Abstract.** In this paper we study irrotational isentropic flows of an ideal gas which are described by nonlinear partial differential equation for the velocity potential. To this equation it is given the solution set used for describing gas flows between rotating planes. The exact solution to the investigated problem is found in case of several definite laws of plane motion. On arbitrary laws of plane motion it is given the Bubnov-Galerkin method for numerical solution.

**Key Words:** nonlinear initial-boundary value problem, aerohydrodynamics, velocity potential, rotating planes, partial differential equation, the Bubnov-Galerkin method.

---

<sup>3</sup>Head of the High Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

<sup>4</sup>Postgraduate of the High Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; al.krupennikov@mail.ru.

УДК 539.3: 533.6, 517.9

## Математическое моделирование системы «трубопровод - датчик давления»

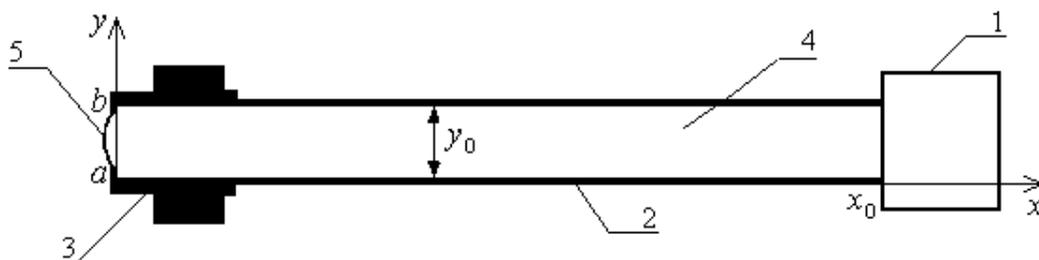
© П. А. Вельмисов,<sup>1</sup> Ю. В. Покладова,<sup>2</sup> Е. С. Серебрянникова<sup>3</sup>

**Аннотация.** Рассматриваются математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления». Датчик закреплен на торцевой стенке трубопровода и предназначен для измерения давления рабочей среды в двигателе, которое изменяется по заданному закону. Предложены линейная и нелинейная модели, в которых динамика чувствительного элемента датчика давления описывается линейным и нелинейным уравнениями соответственно. На основе предложенных моделей проведено исследование динамики упругого элемента датчика.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, упругий элемент, трубопровод, датчик давления, метод Галеркина, метод Фурье.

### 1. Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления»

Рассматривается математическая модель механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик. Аналогичные задачи рассматривались в [1] – [5]. Модель, представленная в этой статье, отличается от ранее исследовавшихся расположением упругого элемента датчика давления и нелинейностью уравнения, описывающего динамику упругого элемента. Датчик закреплен на торцевой стенке трубопровода и предназначен для измерения давления рабочей среды на другом конце трубопровода (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), которое изменяется по заданному закону (Рис.1.1).



Р и с у н о к 1.1

Схема системы «трубопровод - датчик давления»

На рис.1.1: 1 - двигатель, 2 - трубопровод, 3 - датчик, 4 - рабочая среда, 5 - пластина (упругий элемент). Под рабочей средой понимается идеальная несжимаемая жидкость.

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0; \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmiso@ulstu.ru

<sup>2</sup>Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; pokladovau@inbox.ru

<sup>3</sup>Старший преподаватель кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; pokladovau@inbox.ru

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0); \quad (1.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{\omega}(y, t), \quad y \in (a, b); \quad (1.3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0); \quad (1.4)$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, y_0); \quad (1.5)$$

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \quad (1.6)$$

Здесь (1.1) - уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (1.2)-(1.4) - условия непротекания; условие (1.5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (1.6) - уравнение динамики пластины;  $\varphi(x, y, t)$  - потенциал скорости среды;  $\omega(y, t)$  - прогиб упругого элемента;  $P(y, t)$  - закон распределения давления среды в сечении  $x = x_0$  (на выходе из двигателя);  $P_0(y, t)$  - распределенная внешняя нагрузка, действующая на упругий элемент;  $x_0, y_0$  - продольный и поперечный размеры трубопровода;  $a, b$  - координаты концов упругого элемента;  $\tilde{P}$  - давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя;  $\rho$  - плотность среды;  $M$  - погонная масса;  $D$  - изгибная жесткость;  $N$  - сжимающее (растягивающее) усилие;  $\alpha, \beta$  - коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\gamma$  - коэффициент жесткости основания; точка и штрих обозначают частную производную по  $t$  и  $y$ , соответственно.

На основе метода Фурье задача сведена к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. Уравнение связывает закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод и функцию прогиба упругого элемента датчика давления:

$$L(\omega) = P_0(y, t) - \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P(y, t) dy - \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n y) \frac{\text{th}(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \int_a^b \ddot{\omega}(y, t) \cos(\lambda_n y) dy - \\ - \frac{2}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n y)}{\text{ch}(\lambda_n x_0)} \int_0^{y_0} P(y, t) \cos(\lambda_n y) dy - \frac{\rho x_0}{y_0} \int_a^b \ddot{\omega}(y, t) dy. \quad (1.7)$$

где оператор  $L(\omega)$  определяется, согласно (1.6), выражением  $L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega$ .

Постановка задачи (1.1)-(1.6) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями.

Предложим нелинейную модель, которая определяется приведенными выше уравнениями (1.1) - (1.5), при этом в уравнении (1.6), описывающем динамику пластины, интегро-дифференциальный оператор  $L(\omega)$  заменяется следующим

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + \left( \frac{D\omega''}{[1 + (\omega')^2]^{3/2}} \right)'' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \mu\omega^3 + \gamma\omega + \varepsilon\dot{\omega}^3 - \\ - \delta\ddot{\omega}'' - \theta\omega'' \left( \int_a^b \sqrt{1 + (\omega')^2} dy + a - b \right).$$

Полагая прогибы малыми, заменим  $[1 + (\omega')^2]^{-3/2}$  и  $[1 + (\omega')^2]^{1/2}$  на  $[1 - \frac{3}{2}(\omega')^2]$  и  $[1 + \frac{1}{2}(\omega')^2]$  соответственно. Получим

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' - \frac{3}{2}D\omega''''(\omega')^2 - 9D\omega'\omega''\omega''' - 3D(\omega'')^3 + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \\ + \beta\dot{\omega} - \delta\ddot{\omega}'' + \gamma\omega + \mu\omega^3 + \varepsilon\dot{\omega}^3 - \frac{1}{2}\theta\omega'' \int_a^b (\omega')^2 dy. \quad (1.8)$$

Согласно методу Галеркина, решение  $\omega(y, t)$  уравнения (1.7), (1.8) ищется в виде  $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) g_k(y)$ , где  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  - полная на  $[a, b]$  система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязки уравнения (1.7) к системе базисных функций  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  получим систему из  $m$  обыкновенных дифференциальных уравнений.

В частности, для шарнирного закрепления концов пластины ( $\omega = 0, \omega'' = 0$  при  $y = a, y = b$ ) можно положить  $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) \sin \beta_k(y - a)$ , где  $\beta_k = \frac{\pi k}{b-a}$ . В случае двух приближений ( $m = 2$ ) получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} &A_{11}\ddot{\omega}_1(t) + A_{12}\ddot{\omega}_2(t) + B_1\dot{\omega}_1(t) + C_1\dot{\omega}_1(t)\dot{\omega}_2^2(t) + D_1\dot{\omega}_1^3(t) + \\ &+ E_1\omega_1(t) + G_1\omega_1^3(t) + H_1\omega_1(t)\omega_2^2(t) = F_1(t), \\ &A_{21}\ddot{\omega}_1(t) + A_{22}\ddot{\omega}_2(t) + B_2\dot{\omega}_2(t) + C_2\dot{\omega}_1^2(t)\dot{\omega}_2(t) + D_2\dot{\omega}_2^3(t) + \\ &+ E_2\omega_2(t) + G_2\omega_2^3(t) + H_2\omega_1^2(t)\omega_2(t) = F_2(t), \end{aligned}$$

где

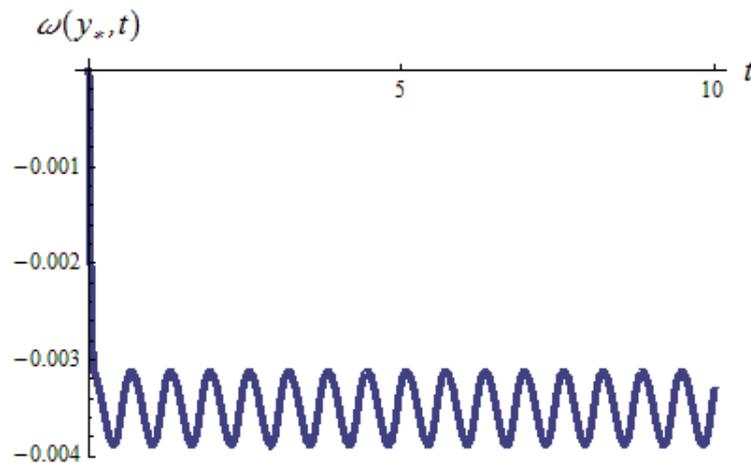
$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{b-a}{2}(M + \delta\beta_1^2) + \frac{4\rho x_0}{y_0\beta_1^2} + \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{th(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \left(\frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \lambda_n^2}\right)^2 (\cos(\lambda_n b) + \cos(\lambda_n a))^2, \\ A_{12} = A_{21} &= -\frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{th(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \lambda_n^2} \frac{\beta_2}{\beta_2^2 - \lambda_n^2} (\cos^2(\lambda_n b) - \cos^2(\lambda_n a)), \\ A_{22} &= \frac{b-a}{2}(M + \delta\beta_2^2) + \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{th(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2^2 - \lambda_n^2}\right)^2 (\cos(\lambda_n b) - \cos(\lambda_n a))^2, \\ B_1 &= (\alpha\beta_1^4 + \beta) \frac{b-a}{2}, \quad B_2 = (\alpha\beta_2^4 + \beta) \frac{b-a}{2}, \\ C_1 = C_2 &= 3\varepsilon \frac{b-a}{4}, \quad D_1 = D_2 = 3\varepsilon \frac{b-a}{8}, \\ E_1 &= (D\beta_1^4 - N\beta_1^2 + \gamma) \frac{b-a}{2}, \quad E_2 = (D\beta_2^4 - N\beta_2^2 + \gamma) \frac{b-a}{2}, \\ G_1 &= (3\mu - 1.5D\beta_1^6 + (b-a)\theta\beta_1^4) \frac{b-a}{8}, \quad G_2 = (3\mu - 1.5D\beta_2^6 + (b-a)\theta\beta_2^4) \frac{b-a}{8}, \\ H_1 &= (3\mu - 1.5D\beta_1^4\beta_2^2 + \frac{b-a}{2}\theta\beta_1^2\beta_2^2) \frac{b-a}{4}, \quad H_2 = (3\mu - 1.5D\beta_2^4\beta_1^2 + \frac{b-a}{2}\theta\beta_1^2\beta_2^2) \frac{b-a}{4}, \\ F_1(t) &= \int_a^b P_0(y, t) \sin \beta_1(y - a) dy - \frac{2}{y_0\beta_1} \int_0^{y_0} P(y, t) dy - \\ &- \frac{2}{y_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ch(\lambda_n x_0)} \frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \lambda_n^2} (\cos(\lambda_n b) + \cos(\lambda_n a)) \int_0^{y_0} P(y, t) \cos(\lambda_n y) dy, \\ F_2(t) &= \int_a^b P_0(y, t) \sin \beta_2(y - a) dy + \\ &+ \frac{2}{y_0} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{1}{ch(\lambda_n x_0)} \frac{\beta_2}{\beta_2^2 - \lambda_n^2} (\cos(\lambda_n b) - \cos(\lambda_n a)) \int_0^{y_0} P(y, t) \cos(\lambda_n y) dy. \end{aligned}$$

## 2. Примеры исследования динамики упругого элемента датчика давления

На основе численного эксперимента с помощью системы Mathematica проведем исследование динамики упругого элемента в зависимости от закона изменения давления  $P(y, t)$  в двигателе.

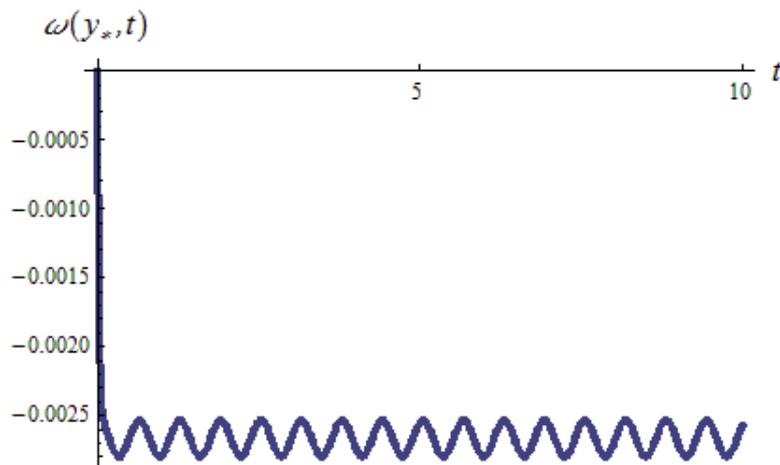
**Пример 2.1.** *Пример исследования динамики упругого элемента датчика давления, предназначенного для определения давления в двигателе.*

Рабочая среда - вода ( $\rho = 10^3$ ), пластина изготовлена из стали ( $E = 2 \cdot 10^{11}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $h = 3 \cdot 10^{-4}$ ). Для значений параметров  $x_0 = 0,3$ ,  $y_0 = 0,015$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0,015$ ,  $M = 2,34$ ,  $D = 0,495$ ,  $N = 10^3$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\gamma = 0,2$ ,  $N1 = 15$ ,  $\delta = 5$ ,  $\theta = 2,2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 4$ ,  $\omega(y, 0) = 0$ ,  $\dot{\omega}(y, 0) = 0$ ,  $P_0(y, t) = 0$ ,  $P(y, t) = 10^5(20 - \cos(10t))$  получены графики функции  $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^2 \omega_k(t) \sin \beta_k(y - a)$  в точке  $y_* = \frac{a+b}{2,5}$  для нелинейной и линейной моделей (рис.2.1, 2.2):



Р и с у н о к 2.1

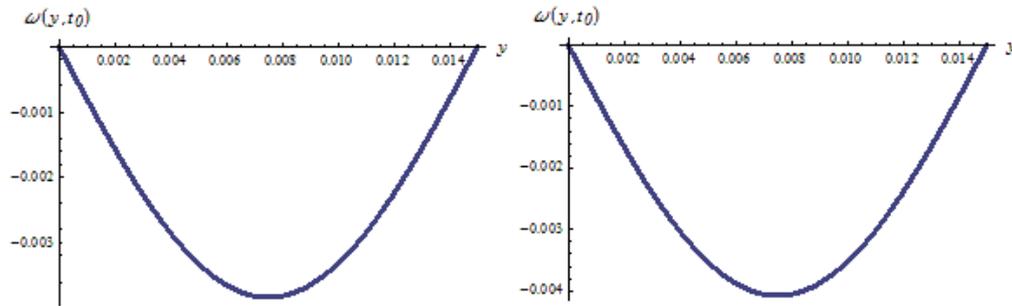
График деформации  $\omega(y_*, t)$  для нелинейной модели



Р и с у н о к 2.2

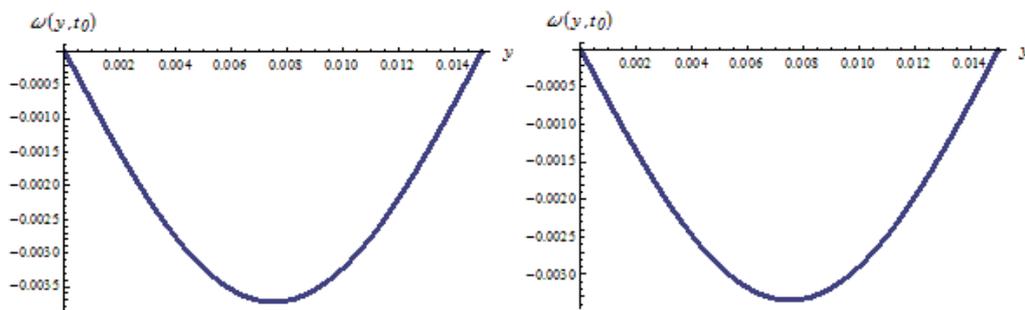
График деформации  $\omega(y_*, t)$  для линейной модели

Прогибы упругого элемента в фиксированные моменты времени  $t = t_0$  для нелинейной и линейной моделей представлены на рис. 2.3-2.6.



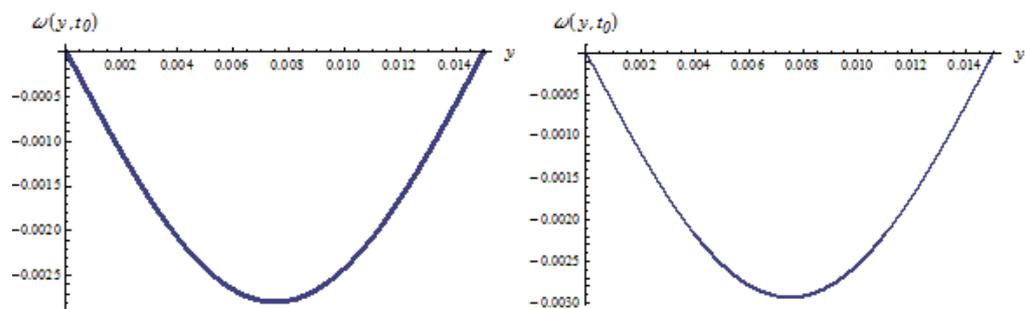
Р и с у н о к 2.3

График деформации  $\omega(y, t_0)$  для нелинейной модели в моменты времени  $t_0 = 0, 5; 1$



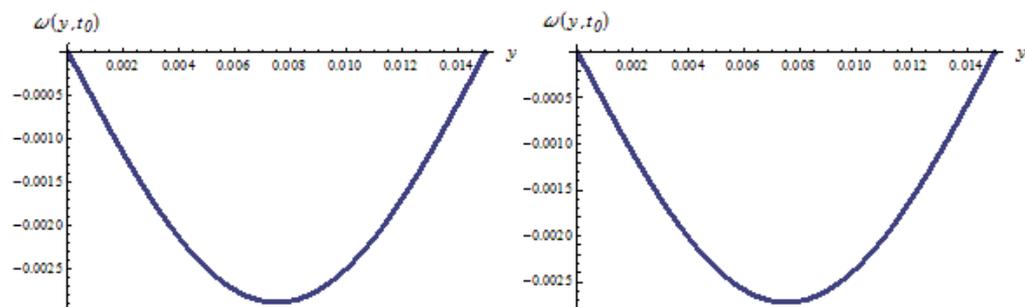
Р и с у н о к 2.4

График деформации  $\omega(y, t_0)$  для нелинейной модели в моменты времени  $t_0 = 1, 5; 2$



Р и с у н о к 2.5

График деформации  $\omega(y, t_0)$  для линейной модели в моменты времени  $t_0 = 0, 5; 1$

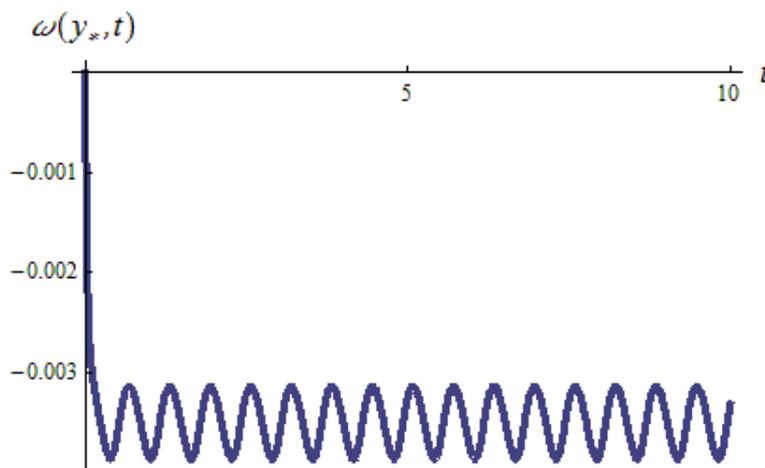


Р и с у н о к 2.6

График деформации  $\omega(y, t_0)$  для линейной модели в моменты времени  $t_0 = 1, 5; 2$

Как видно из рис. 2.3-2.6, графики деформации упругого элемента для линейной и нелинейной модели отличаются. В случае нелинейной модели деформация упругого элемента больше, чем для линейной модели.

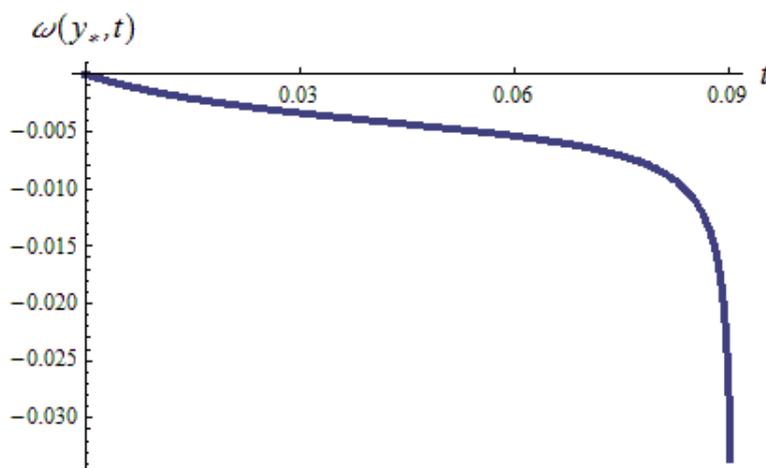
**Пример 2.2.** Для значений параметров  $\delta = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\mu = 0$  (остальные указанные выше параметры оставлены без изменения) получен график деформации  $\omega(y_*, t)$  для нелинейной модели (Рис.2.7):



Р и с у н о к 2.7

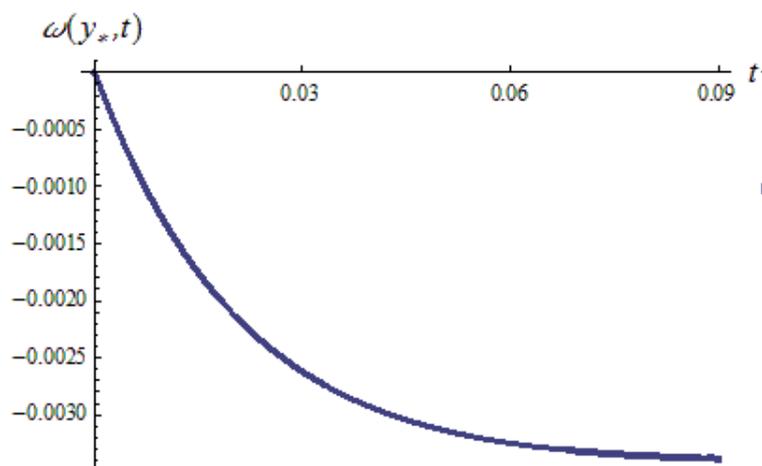
Как видно из рис.2.1, 2.7, графики деформаций упругого элемента мало отличаются, то есть небольшое изменение параметров  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  не приводит к видимым изменениям графика деформации элемента.

**Пример 2.3.** Для указанных выше значений параметров и  $\delta = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\mu = 0$  изменим закон изменения давления (увеличив при этом амплитуду), на выходе из камеры сгорания двигателя:  $P(y, t) = 10^5(30 + \cos(10t))$ . Получим графики деформаций для нелинейной и линейной моделей (рис.2.8-2.10):



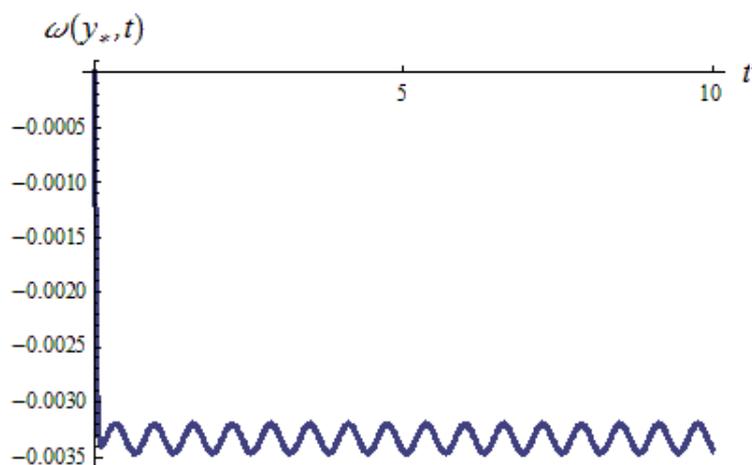
Р и с у н о к 2.8

График деформации  $\omega(y_*, t)$  для нелинейной модели ( $t \in [0, 0.09]$ )



Р и с у н о к 2.9

График деформации  $\omega(y_*, t)$  для линейной модели ( $t \in [0, 0.09]$ )



Р и с у н о к 2.10

График деформации  $\omega(y_*, t)$  для линейной модели ( $t \in [0, 2]$ )

На рис.2.10 представлены результаты расчетов по линейной модели на достаточно большом интервале времени. Как видно из Рис.2.8, 2.9, с увеличением давления возрастает деформация упругого элемента датчика давления, причем для нелинейной модели увеличение давления приводит к разрушению пластины, а в случае линейной модели - к увеличению деформации упругого элемента без его разрушения.

Сравнивая графики деформации упругого элемента датчика давления для нелинейной и линейной моделей, можно сделать вывод, что учет нелинейных членов в уравнении, описывающем динамику пластины, имеет важное значение при исследовании динамики чувствительного элемента. Численный эксперимент показал, что для различных значений параметров системы графики деформаций пластины существенно отличаются.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 г.г. (НК-177П, ГК №П1183).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления» // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2007. – №3. – С.7-14.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления». – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188 с.
3. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математические модели одной гидроупругой системы // Труды Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, №2. – С. 93-98.
4. Решетников Ю.А. О динамике упругого элемента датчика давления // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Труды международной конференции КЛИН. – 2005. –Т. 4. – С.201-204.
5. Velmisov P.A, Pokladova Yu.V. Mathematical models of a mechanical system «Pipeline - Pressure Sensor» // Application of Mathematics in Engineering and Economics. – Bulgaria, Sofia. – 2004. – P. 84-89.

---

## Mathematical modelling of a system «pipeline - pressure sensor»

© P. A. Velmisov,<sup>4</sup> Yu. V. Pokladova,<sup>5</sup> E. S. Serebryannikova<sup>6</sup>

**Abstract.** Consider linear and nonlinear mathematical models of a mechanical system «pipeline - pressure sensor». The dynamics of an elastic element of a sensor, that is the component of the mechanical system are investigated.

**Key Words:** aerohydroelasticity, elastic element, pressure sensor, pipeline, Galerkin's method, Fourier method.

---

<sup>4</sup>Head of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru

<sup>5</sup>Docent of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, pokladovau@inbox.ru

<sup>6</sup>Teacher of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; pokladovau@inbox.ru

УДК 517.977

## Две задачи оптимального быстродействия

© О. В. Видилина<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе рассмотрены задача оптимального быстродействия для магнитоэлектрического силового привода и оптимальное управление температурным полем.

**Ключевые слова:** оптимальное быстродействие, асимптотика точек переключения, магнитоэлектрический силовой привод, температурное поле.

### 1. Задача оптимального быстродействия для магнитоэлектрического силового привода

В инженерных применениях, там, где механизмы должны постоянно работать в цикле с большой скоростью, существенным является оптимальное управление. Также обстоит дело с магнитоэлектрическим силовым приводом с линейной характеристикой [7]. Оптимальное по времени управление требует определение того, что заставляет динамическую систему переходить от одного начального состояния в нужное конечное состояние за минимальное время. Как обычно, входная величина (напряжение, приложенное к приводу) ограничена, и управление является скалярным ( $|u| = 1$ ).

Анализируемая система состоит из магнитоэлектрического силового привода с линейной характеристикой, имитируемого груза, прикрепленного к оптически связанному датчику линейного параметра, источника света и объектива. Привод, имитируемый груз и линейный тахометр установлены на общем закаленном валу (немагнитная нержавеющей сталь), установленном на линейных подшипниках. Груз перемещается горизонтально на укрепленных направляющих с помощью трех роликоподшипников, минимизирующих трение. Поскольку центр масс узла находится около средней линии вала, то движущая сила действует на центр масс всей системы. Это уменьшает наводимый момент, который стремится вызвать колебания в системе. Соленоид содержит кольцевые магниты, с ориентировкой кристаллов по оси, и состоит из двух слоев привода, бифилярно намотанных для снижения индуктивности. С одной стороны катушка опирается на алюминиевую структуру, которая передает силу на движущуюся часть соленоида. Плотность потока, измеренная в рабочем воздушном зазоре, составила 8200 gauss, сопротивление катушек  $R = 1...10$  Ом, а индуктивность  $L = 10^{-3}...10^{-5}$  Гн. Датчик оптического положения, стеклянная решетка с узкими параллельными линиями, попеременно непроницаемая и прозрачная, прикреплена к нагрузке. Датчик установлен между источником света и объективом, с увеличением света в 10 раз и направляющим свет на два фототранзистора. Механизм двигает нагрузку и датчик, пока каждый фототранзистор не совместится наполовину с непрозрачной линией и наполовину с прозрачной линией. Датчик, прикрепленный к противоположной стороне массивной нагрузки, вырабатывает для системы управления соленоидом сигнал обратной связи. Электроника посылает сигналы управления соленоидом и вырабатывает сигнал отрицательной обратной связи пропорциональный ошибкам положения и скорости,

<sup>1</sup>Доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский государственный университет, г. Самара; vidilina\_olga@mail.ru.

предназначенные для управления окончания двухпозиционного режима. Поскольку вся конструкция жесткая и приложенные силы проходят через центр масс, то для практических целей она может рассматриваться как частица с одной степенью свободы. Полагается, что формируется вязкое трение.

Индуктивность изменяется в зависимости от положения катушки относительно постоянного магнита. Пренебрегая, при небольшом перемещении нелинейностью индуктивности, будем считать систему линейной. Тогда уравнения состояния принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu}{m}x_2 + \frac{\alpha_1}{m}y \\ \varepsilon\dot{y} &= -\alpha_2x_2 - Ry + bu, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – электромеханические константы взаимодействия,  $R$  – сопротивление,  $m$  – масса нагрузки, включая катушку и вал,  $\mu$  – коэффициент вязкого трения, роль малого параметра  $\varepsilon$  играет индуктивность,  $u$  – оптимальное управление,  $|u| \leq 1$ . Требуется перевести данную систему из начального положения  $(x_1^0, x_2^0, y^0)$  в начало координат за минимальное время  $t_3$ .

С помощью преобразования  $x = v + \varepsilon Hz, y = z + Px$  разделим переменные в (1.1) [4]. В этом случае матрицы  $P(\varepsilon), H(\varepsilon)$  примут следующий вид

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_2}{R} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mu\alpha_2}{mR^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{mR^3} \end{pmatrix} + \dots \\ H(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha_1}{mR} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu\alpha_2}{mR^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{mR^3} \end{pmatrix} + \dots, \end{aligned}$$

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= Kv_2 - \frac{\alpha_1 b}{mR}u, \\ \varepsilon\dot{z}_1 &= (-R + \varepsilon\frac{\alpha_1\alpha_2}{mR})z_1 + bu, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $K = K_0 + \varepsilon K_1 = -\frac{\mu}{m} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{mR} - \varepsilon(\frac{\mu\alpha_2}{mR^2} + \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{mR^3})$ .

Приведем медленную подсистему в (1.2) к диагональному виду при помощи матрицы перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -K_0 + \varepsilon K_1 \end{pmatrix}.$$

В результате получим систему

$$\dot{v} = Av + Du, \quad \varepsilon\dot{z} = (-R + \varepsilon\frac{\alpha_1\alpha_2}{mR})z + bu, \tag{1.3}$$

где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_1 \end{pmatrix}$ ,  $D = d_0 + \varepsilon d_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 b}{mRK_0} \\ \frac{\alpha_1 b}{mRK_0} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 b K_1}{mRK_0^2} \\ \frac{\alpha_1 b K_1}{mRK_0^2} \end{pmatrix}$ .

Точки переключения оптимального управления для рассматриваемой задачи делятся на две группы. Первая группа содержит точку переключения, близкую к соответствующей

точке переключения в вырожденной задаче (при  $\varepsilon = 0$ ):  $t_1(\varepsilon)$ . Вторая группа состоит из точки переключения  $t_2(\varepsilon)$  управления вблизи начала координат, то есть она отстоит от  $t_3$  на величину порядка  $O(\varepsilon)$  [5]:

$$t_1 = t_{10} + \varepsilon t_{11} + \dots, \quad t_2 = t_{20} + \varepsilon t_{21} + \dots, \quad t_3 = t_{30} + \varepsilon t_{31} + \dots.$$

Отличие данной задачи быстродействия от рассмотренной в [3] заключается в том, что имеется нулевое собственное значение, что не мешает воспользоваться предложенным в этой статье методом нахождения асимптотики точек переключения для линейной задачи быстродействия, где все собственные значения матрицы системы отличны от нуля, а напротив, упрощает некоторые уравнения. Так системы для нахождения асимптотики точек переключения выглядят следующим образом

$$t_{10} - \frac{1}{2}t_{20} = -\frac{v_{10}^0}{2d_1^0}, \quad e^{K_0 t_{10}} - \frac{1}{2}e^{K_0 t_{20}} = \frac{1}{2} - \frac{v_{20}^0 K_0}{2d_2^0},$$

$$t_{31} - t_{21} = \frac{\ln 2}{R}, \quad e^{K_0 t_{10}} t_{11} - \frac{1}{2}e^{K_0 t_{20}} t_{21} = \frac{K_1}{K_0} \left( \frac{v_{20}^0}{2d_2^0} + t_{10} - \frac{1}{2}t_{20} \right) - e^{K_0 t_{20}} \frac{\ln 2}{R}.$$

**Пример 1.** Пусть  $\mu = 0.1$ ,  $m = 30$  г,  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $R = 1$  Ом,  $b = 18$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . Тогда система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{300}x_2 + \frac{1}{60}y, \\ \varepsilon \dot{y} &= -x_2 - y + 18u. \end{aligned}$$

Матрицы  $P(\varepsilon)$ ,  $H(\varepsilon)$  в данном случае такие

$$P(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -0.02 \end{pmatrix} + \dots, \quad H(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02 \end{pmatrix} + \dots,$$

тогда после разделения движений получим систему

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= K v_2 - 0.3u, \\ \varepsilon \dot{z}_1 &= (-1 + 0.02\varepsilon)z_1 + 18u, \end{aligned}$$

где  $K = K_0 + \varepsilon K_1 = -0.02 - 0.02\varepsilon$ . И наконец, после приведения медленной подсистемы к диагональному виду получаем

$$\dot{v} = Av + Du, \quad \varepsilon \dot{z} = (-1 + 0.02\varepsilon)z + 18u,$$

где

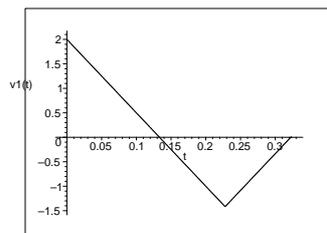
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.02 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.02 \end{pmatrix}, \quad D = d_1 + \varepsilon d_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -0.2417 \\ -0.0583 \end{pmatrix}.$$

Системы для нахождения асимптотики точек переключения  $t_1$ ,  $t_2$  и оптимального времени перехода  $t_3$  выглядят так

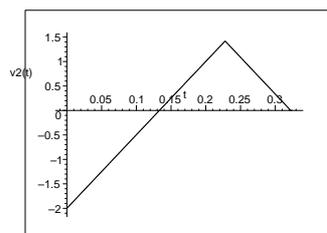
$$t_{10} - \frac{1}{2}t_{20} = 0.07, \quad e^{0.02t_{10}} - \frac{1}{2}e^{0.02t_{20}} = 0.5, \quad t_{31} - t_{21} = 0.693,$$

$$t_{11} - t_{21} + \frac{1}{2}t_{31} = 0.001, \quad e^{0.02t_{10}} t_{11} - \frac{1}{2}e^{0.02t_{20}} t_{21} = -0.348,$$

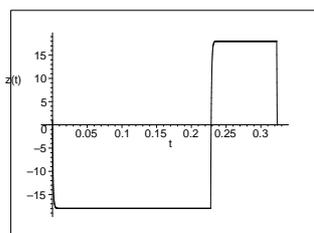
откуда  $t_{10} = 0.227$ ,  $t_{20} = 0.322$ ,  $t_{11} = 0.297$ ,  $t_{21} = 1.284$ ,  $t_{31} = 1.977$ , а следовательно  $t_1 = 0.228$ ,  $t_2 = 0.323$ ,  $t_3 = 0.324$ . Решения системы представлены на рис. (1.1) – (1.3).



Р и с у н о к 1.1



Р и с у н о к 1.2



Р и с у н о к 1.3

## 2. Оптимальное управление температурным полем

Интересной задачей, имеющей большое прикладное значение, является задача об оптимальном управлении нагревом тел. С этой задачей имеют дело во всех основных отраслях тяжелой индустрии, поэтому внедрение методов оптимизации тепловых процессов дает большой экономический эффект.

Рассмотрим задачу управления температурным полем в бесконечной однородной пластине фиксированной толщины  $2s$  путем изменения температуры окружающей среды [1], [6]. Между поверхностью пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона, т. е. количество тепла, передаваемое в единицу времени через единицу поверхности из окружающей среды к телу, прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой. Выберем начало координат в середине пластины, так как теплообмен между поверхностями и окружающей средой происходит одинаково (симметрическая задача).

Обозначим температуру окружающей среды через  $\tilde{u}(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_0$ ). Эта функция и будет нашим управляющим воздействием. Подчиним  $\tilde{u}(\tau)$  следующему ограничению:

$$A_1 \leq \tilde{u}(\tau) \leq A_2, \quad (2.1)$$

где  $A_2, A_1$  – соответственно максимально и минимально возможные температуры нагрева.

Распределение температуры по сечению тела в точке  $\xi$  в момент времени  $\tau$  будем обозначать через  $\theta = \theta(\xi, \tau)$ . Далее будем считать, что в начальный момент времени температура в каждой точке пластины постоянна и равна

$$\theta_0(\xi, 0) = \theta_0 = \text{const.}$$

Распределение температур в теле, которое требуется получить в результате нагревания, считаем также равномерным по сечению тела и равным заданной температуре  $\theta_3(\xi) = C$ .

Процесс нагревания пластины будет описываться уравнением теплопроводности со следующими начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \quad (2.2)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0, \quad (2.3)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \alpha [\tilde{u}(\tau)] - \theta(\xi, \tau) = 0, \quad (\xi = \pm s, \tau > 0), \quad (2.4)$$

где  $\tilde{u}(\tau)$  – произвольная кусочно-непрерывная функция времени,  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи. Коэффициенты  $a$  и  $\lambda$  связаны соотношением  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ , где  $\rho$  – плотность,  $c$  – теплоемкость. Температуры  $A_1, A_2, \theta_0, C$  удовлетворяют следующим очевидным неравенствам:  $A_2 > A_1, C > \theta_0$  (задача нагрева пластины). Кроме того, считаем выполненным следующее неравенство:

$$A_1 < C < A_2. \quad (2.5)$$

Перепишем задачу в безразмерном виде. Для этого в (2.2)–(2.4) произведем замену переменных, вводя следующие принятые в теплотехнике координаты:

$$t = \frac{a\tau}{s^2} \text{ – безразмерное время (критерий Фурье } F_0);$$

$$x = \frac{\xi}{s} \text{ – безразмерная толщина } (-1 \leq x \leq +1);$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha s}{\lambda} \text{ – критерий Био};$$

$$Q_0 = \frac{2(C - \theta_0)}{A_2 - A_1} \text{ – критерий начального условия};$$

$$\chi = \frac{A_2 + A_1 - 2C}{A_2 - A_1} \text{ – критерий не симметрии нагрева (из (2.5) видно, что } \chi < 1).$$

Далее считаем, что  $\chi = 0$ . Новую безразмерную температуру обозначим

$$Q(x, t) = \frac{2(\theta(sx, \frac{s^2}{a}t))}{A_2 - A_1}.$$

Новое управление

$$u(t) = \frac{2[\tilde{u} - C]}{A_2 - A_1}.$$

Произведем сдвиг начала координат на оси температур в точку  $\frac{2C}{A_2 - A_1}$ . Следовательно, целью нагрева будет нулевое распределение температур в пластине  $Q(x) = 0$ . Сделав все упомянутые выше замены переменных, получим безразмерную задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, |x| \leq 1,$$

$$\pm \frac{\partial Q}{\partial x} = \varepsilon[u(t) - Q(x, t)], \quad x = \pm 1,$$

$$Q(x, 0) = Q_0.$$

Как и в [6], представим  $Q(x, t)$  в виде ряда

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) X_n(x).$$

Здесь  $X_n(x) = c_n \cos \mu_n x$ , где  $\mu_n$  – корни уравнения

$$\mu_n \sin \mu_n = \varepsilon \cos \mu_n,$$

а  $c_n$  – нормирующие коэффициенты

$$(-1)^n \left( 1 + \frac{\sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Имеют место асимптотические разложения

$$\mu_0 = \sqrt{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{6} \right) + \varepsilon^2 + \dots, \quad \mu_n = \pi n + \frac{\varepsilon}{\pi n} + \varepsilon^2 + \dots, \quad n \geq 1,$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{6} \right) + \varepsilon^2 + \dots, \quad c_n = (-1)^n \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2(\pi n)^2} \right) + \varepsilon^2 + \dots, \quad n \geq 1.$$

Для  $y_n$ , применяя двукратное интегрирование по частям и используя граничное условие, получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon y_n' = -\mu_n^2 y_n + (2\varepsilon c_n \cos \mu_n) u, \quad n = 0, 1, \dots$$

Используя асимптотическое представление для  $\mu_0$ , представим эту систему в следующем виде:

$$\dot{y}_0 = A_1 y_0 + B_1 u, \quad \varepsilon \dot{y} = A_4 y + B_2 u, \quad (2.6)$$

$$A_1 = -\varepsilon^{-1} \mu_0^2, \quad A_4 = \text{diag}(-\mu_n^2), n \geq 1, \quad B_1 = 2c_0 \cos \mu_0, \quad B_2 = \varepsilon \text{colon}(2c_n \cos \mu_n), n \geq 1.$$

Нетрудно убедиться, что справедливы представления:

$$A_{10} = -1, \quad A_{11} = \frac{1}{3}, \quad B_{10} = \sqrt{2}, \quad B_{11} = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad B_{20} = (0, 0, \dots, 0, \dots)^T, \quad B_{21} = (2, 2, \dots, 2, \dots)^T.$$

$$A_{40} = \begin{pmatrix} -\pi^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4\pi^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -9\pi^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -n^2\pi^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad A_{41} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

Оптимальное управление  $u$  имеет вид кусочно-постоянной функции, принимающей поочередно лишь два значения -1 и +1. Особенность оптимального управления этой

задачи состоит в том, что число интервалов знакопостоянства функции  $u$  бесконечно, хотя общее время оптимального процесса есть определенная конечная величина  $T$ . То есть оптимальное управление на конечном отрезке времени  $[0, T]$  имеет счетное число точек переключения, причем точки переключения довольно быстро накапливаются лишь к концу отрезка  $[0, T]$ , т. е. к точке  $t = T$ . Основное время переходного процесса занимают лишь первые два-три интервала знакопостоянства (что составляют более 99% всего времени). Это явление объясняется более быстрым убыванием функции  $e^{-\mu_n^2 t/\varepsilon}$  во времени при возрастании  $n$  и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  по сравнению с первыми двумя-тремя функциями  $e^{-\mu_1^2 t/\varepsilon}, e^{-\mu_2^2 t/\varepsilon}, e^{-\mu_3^2 t/\varepsilon}$ , что используется для приближенного определения оптимального управления  $u$ , дающего высокую точность приближения истинного распределения температуры в теле к заданному равномерному распределению в конце переходного процесса. Этот переход тем более разумен из-за того, что технически реализовать систему управления с бесконечным числом переключений невозможно из-за наличия множества неучтенных промежуточных звеньев с малыми параметрами (по отношению к основному объекту – телу нагрева).

Таким образом, для нахождения асимптотики точек переключения оптимального управления можно воспользоваться способом, описанным в [2],[3]. Для данной задачи быстродействия точки переключения имеют следующий вид [5]:

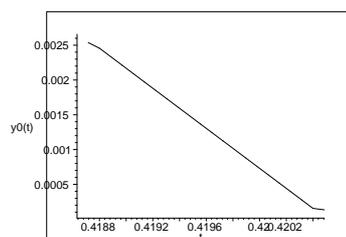
$$t_1 = t_{10} + \varepsilon t_{11} + \dots, \quad t_j = t_{10} + \varepsilon t_{j1} + \dots, \quad j = 2, 3, \dots$$

Рассмотрим случаи, когда имеются 1 медленная и 2 быстрые переменные; 1 медленная и 4 быстрые переменные.

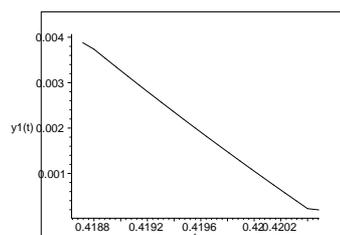
**Пример 2.1.** Пусть  $\varepsilon = 0.1$ , начальная точка  $(\sqrt{2}/2, 0, 0)$  и

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= (-1 + \varepsilon/3)y_0 + (\sqrt{2} + \varepsilon\sqrt{2}/6)u \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= (-\pi^2 + 2\varepsilon)y_1 + 2\varepsilon u, \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= (-4\pi^2 + 2\varepsilon)y_2 + 2\varepsilon u \end{aligned}$$

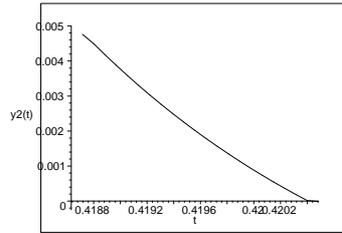
В данном случае две точки переключения  $t_1 = 0.41, t_2 = 0.418$  и оптимальное время перехода  $t_3 = 0.42$ . Решения (на последнем временном интервале) изображены на рисунках (2.1) – (2.3).



Р и с у н о к 2.1



Р и с у н о к 2.2



Р и с у н о к 2.3

**Пример 2.2** Пусть  $\varepsilon = 0.1$ , начальная точка  $(\sqrt{2}/2, 0, 0, 0, 0)$  и

$$y_0 = (-1 + \varepsilon/3)y_0 + (\sqrt{2} + \varepsilon\sqrt{2}/6)u$$

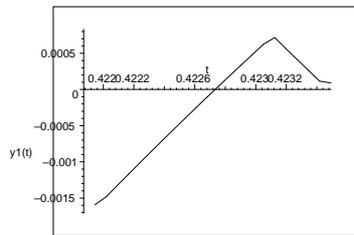
$$\varepsilon y_1 = (-\pi^2 + 2\varepsilon)y_1 + 2\varepsilon u,$$

$$\varepsilon y_2 = (-4\pi^2 + 2\varepsilon)y_2 + 2\varepsilon u,$$

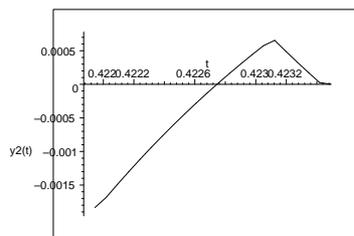
$$\varepsilon y_3 = (-9\pi^2 + 2\varepsilon)y_3 + 2\varepsilon u,$$

$$\varepsilon y_4 = (-16\pi^2 + 2\varepsilon)y_4 + 2\varepsilon u.$$

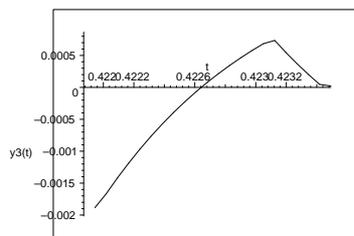
В данном случае две точки переключения  $t_1 = 0.409, t_2 = 0.419, t_3 = 0.422, t_4 = 0.4231$  и оптимальное время перехода  $t_5 = 0.4234$ . Решения системы (на последнем интервале времени) изображены на рисунке (2.4) – (2.7).



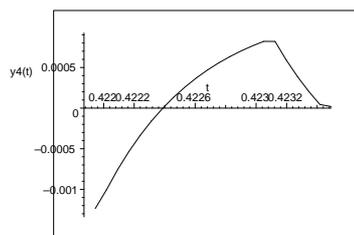
Р и с у н о к 2.4



Р и с у н о к 2.5



Р и с у н о к 2.6



Р и с у н о к 2.7

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-08-00154А.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г. Управление нагревом металла / А. Г. Бутковский, С. А. Малый, Ю. Н. Андреев; М.: Металлургия. – 1981.
2. Видилина О. В. Понижение порядка задачи оптимального быстродействия с сингулярными возмущениями / О. В. Видилина // Известия РАЕН серия МММИУ. – 1999. – Т.3, № 2. – С. 117-127.
3. Видилина О. В. Декомпозиция задач оптимального быстродействия с сингулярными возмущениями / О. В. Видилина // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – № 8. – С. 16-23.
4. Воропаева Н. В. Декомпозиция многотемповых систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев; Самара: СМС. – 2000.
5. Калинин А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем / А. И. Калинин; Мн.: "Экоперспектива". – 2000.
6. Фельдбаум А. А. Методы теории автоматического управления / А. А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский; М.: Наука. – 1974.
7. Brown C. J. Time-optimal Control of a Moving-Coil Linear Actuator / C. J. Brown, J. T. Mo // IBM J. Re S. Develop. – 1968. p. 372 – 379.

## Two optimal-time control problems.

© O. V. Vidilina<sup>2</sup>

**Abstract.** In the paper two control problems are studied: the optimal-time control problem for electromagnetic actuator and the optimal control of temperature field.

**Key Words:** optimal-time control, asymptotic of switching points, electromagnetic actuator, thermal field.

---

<sup>2</sup>Assistant professor of the department of differential equations and control theory, Samara State University, Samara, vidilina\_olga@mail.ru.

УДК 541.64.11+519.91

## О решении прямой кинетической задачи для процессов сополимеризации на катализаторах Циглера-Натта

© Э. Р. Гиззатова<sup>1</sup>, С. И. Спивак<sup>2</sup>, В. З. Мингалеев<sup>3</sup>, Ю. Б. Монаков<sup>4</sup>

**Аннотация.** В работе предложена кинетическая схема процесса сополимеризации диенов на катализаторах Циглера-Натта. Представлена методика решения прямой кинетической задачи поиска средних молекулярных масс и построения молекулярно-массового распределения образующегося сополимера.

**Ключевые слова:** сополимеризация, катализаторы Циглера-Натта, математическое моделирование, системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

### 1. Введение

За последние полвека процессы получения синтетических каучуков были достаточно подробно изучены и широко представлены в ряде работ [1]-[4]. Интересующие ученых вопросы касались как проблемы получения каучуков с заранее известными свойствами [1], [2], так и нахождению оптимальных условий для управления процессами в целом [3], [4]. Соответствие каучука требуемым характеристикам является актуальной технологической задачей, которая может быть решена экспериментально или путем замены химического процесса его аналогом – моделью. Исследование реакций в лабораторных условиях имеет как преимущества, так и недостатки. Наблюдение за экспериментом является неотъемлемой частью объективного понимания механизма протекающих реакций, при этом отмечая лишь внешние проявления, внутренние взаимосвязи и этапы превращения веществ остаются недоступными. При моделировании же, наоборот, прослеживаются все возможные закономерности, связывающие реагенты процесса, однако понять, насколько допустимы задаваемые условия или границы параметров процесса, практически невозможно. В связи с этим изучение сложных химических процессов должно затрагивать как теоретические (моделирование), так и практические (эксперимент) аспекты.

В работе проводится математическое исследование процессов сополимеризации диенов на титаносодержащих каталитических системах. Построение математических моделей для процессов полимеризации диенов на ванадиевых, неодимовых и титановых каталитических комплексах Циглера-Натта с участием одного мономера (гомополимеризация) рассмотрены в работах последних лет [4], [5]. В отличие от гомополимеризации, процессы сополимеризации слабо изучены и почти не отражены в литературе. Поэтому целью данной работы явилось: представить возможную кинетическую схему процесса и предложить методику решения прямой кинетической задачи.

<sup>1</sup>Доцент кафедры физической химии и химической экологии, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; makella@rambler.ru.

<sup>2</sup>Заведующий кафедрой математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

<sup>3</sup>Научный сотрудник лаборатории стереорегулярных полимеров, Учреждение РАН Институт органической химии УНЦ РАН, г. Уфа; mingaleevvz@rambler.ru.

<sup>4</sup>Заведующий лабораторией стереорегулярных полимеров, Учреждение РАН Институт органической химии УНЦ РАН, г. Уфа; monakov@anrb.ru.

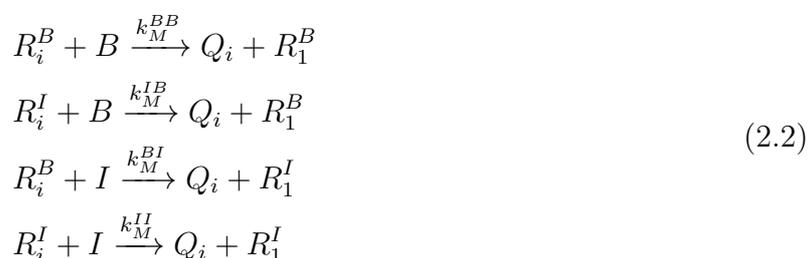
## 2. Постановка прямой кинетической задачи

Рассмотрим процесс сополимеризации бутадиена и изопрена на титансодержащей каталитической системе с образованием одного типа активного центра. Полагаем, что процесс имеет три элементарные стадии:

Рост сополимерной цепи



Передача цепи на мономер



Передача цепи на алюминийорганическое соединение



здесь  $R_i^B$  и  $R_i^I$  – активные цепи длиной  $i$  с концевыми звеньями бутадиена и изопрена соответственно;  $Q_i$  – неактивная сополимерная цепь длины  $i$  с произвольным концевым звеном;  $B$  и  $I$  – мономеры бутадиена и изопрена соответственно;  $A$  – алюминийорганическое соединение (АОС).

Следует отметить, что для данной каталитической системы характерно, во-первых, отсутствие стадии инициирования активных центров и, во-вторых, равенство констант скоростей стадий роста присоединения к сополимерной цепи с произвольным концевым звеном одной молекулы бутадиена или изопрена.

Зная кинетическую схему процесса (2.1) – (2.3) и значения констант скоростей всех элементарных стадий, можно поставить прямую кинетическую задачу: определить средние молекулярные характеристики сополимера и построить молекулярно-массовое распределение.

Используя законы химической кинетики и применяя математическое моделирование, опишем процесс в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых характеризует скорость изменения отдельного реагента:

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dt} &= -k_p^B BC_a^B - k_p^B BC_a^I - k_M^{BB} B \sum_{i=2}^{\infty} R_i^B - k_M^{IB} B \sum_{i=2}^{\infty} R_i^I \\
\frac{dI}{dt} &= -k_p^I IC_a^I - k_p^I IC_a^B - k_M^{II} I \sum_{i=2}^{\infty} R_i^I - k_M^{BI} I \sum_{i=2}^{\infty} R_i^B \\
\frac{dA}{dt} &= -k_A^B BC_a^B - k_A^I IC_a^I \\
\frac{dR_1^B}{dt} &= -k_p^B B(R_1^I + R_1^B) - k_M^{BI} IR_1^B + k_M^{IB} BC_a^I + (k_M^{BB} B + k_A^B A) \sum_{i=2}^{\infty} R_i^B \\
\frac{dR_1^I}{dt} &= -k_p^I I(R_1^I + R_1^B) - k_M^{IB} BR_1^I + k_M^{BI} IC_a^B + (k_M^{II} I + k_A^I A) \sum_{i=2}^{\infty} R_i^I \\
\frac{dR_i^B}{dt} &= k_p^B B(R_{i-1}^I - R_i^B) - k_p^I IR_i^B + k_p^B BR_i^I - k_M^{BI} IR_i^B - k_M^{BB} BR_i^B - k_A^B AR_i^B \\
\frac{dR_i^I}{dt} &= k_p^I I(R_{i-1}^I - R_i^I) - k_p^B BR_i^I + k_p^I IR_i^B - k_M^{IB} BR_i^I - k_M^{II} IR_i^I - k_A^I AR_i^I, i = 2, 3, \dots \\
\frac{dQ_i}{dt} &= k_M^{BB} BR_i^I + k_M^{BI} IR_i^B + k_M^{IB} BR_i^I + k_M^{II} IR_i^I + k_A^B AR_i^B + k_A^I IR_i^I, i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Начальные данные для нее имеют вид:

$$\begin{aligned}
B(0) &= B^{(0)}, I(0) = I^{(0)}, A(0) = A^{(0)}, R_1^B(0) = C_a^B(0), \\
R_1^I(0) &= C_a^I(0), Q_1(0) = 0, R_i^B(0) = R_i^I(0) = Q_i(0) = 0, i = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда прямая кинетическая задача будет перефразирована следующим образом: решить систему дифференциальных уравнений (2.4) с начальными данными (2.5) и известными значениями констант скоростей элементарных стадий.

### 3. Методика решения прямой кинетической задачи

Уравнения в системе (2.4) имеют нелинейный вид, что не дает возможности решить их аналитическими методами, поэтому решение системы можно найти одним из численных методов. В данной работе был использован метод Рунге-Кутты 4-го порядка. В результате получаем распределение концентраций активных и неактивных сополимерных цепей в любой момент времени по длине и концевому звену.

Однако решение системы не позволяет рассчитать средние молекулярные массы сополимера, которые выражены следующими формулами:

$$M_n = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^i C_i^{Bj} M^{Bj} + C_i^{I^{i-j}} M^{I^{i-j}} \right)}{\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^i C_i^{Bj} + C_i^{I^{i-j}} \right)} \tag{3.1}$$

$$M_w = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^i C_i^{Bj} (M^{Bj})^2 + C_i^{I^{i-j}} (M^{I^{i-j}})^2 \right)}{\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^i C_i^{Bj} M^{Bj} + C_i^{I^{i-j}} M^{I^{i-j}} \right)} \tag{3.2}$$

в которых  $C_i^{Bj}$  и  $C_i^{I^{i-j}}$  есть суммарные концентрации бутадиеновых и изопреновых звеньев длины  $j$  и  $(i - j)$ , содержащихся во всех цепях длины  $i$ , соответственно,  $M^{Bj}$  – молекулярная масса  $j$  звеньев бутадиена,  $M^{I^{i-j}}$  – молекулярная масса  $(i - j)$  звеньев изопрена.

В отличие от гомополимера [5], формулы для средних молекулярных масс (3.1) и (3.2) громоздки и предполагают знание количества звеньев каждого мономера в отдельной молекуле. В литературе [6] рассматриваются полимераналогичные процессы, для которых получены аналитические выражения вероятности появления  $j$  звеньев одного мономера в сополимерных цепях длины  $i$  ( $i$  – небольшое число). Предлагаемые расчетные формулы требуют решения дополнительных систем дифференциальных уравнений.

В рассматриваемом процессе длина сополимерной цепи подчинена закону и зависит от времени:

$$i_{max} = t \cdot (k_p^B B(0) + k_p^I I(0)) \quad (3.3)$$

то есть, увеличивая время полимеризации, мы увеличиваем размерность системы (2.4) и, следовательно, предлагаемые методы расчета ограниченного числа звеньев неприменительны к данному процессу.

Для количественного расчета концентраций бутадиена и изопрена в макромолекуле конкретной длины, была применена формула расчета вероятности появления  $k$  звеньев одного мономера в цепи длины  $n$  ( $n$  – велико) [7]:

$$p_n^k = \frac{\exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)}{\sqrt{2\pi npq}} \quad (3.4)$$

где  $p$  – вероятность появления одного звена бутадиена,  $q = 1 - p$ .

Значение вероятности  $p$  можно рассчитать как отношение сумм скоростей стадий, в которых может быть получено одно звено бутадиена, на общую сумму скоростей всех стадий:

$$p = \frac{W_M^{BB} + W_M^{IB} + W_A^B}{W_p^B + W_p^I + W_M^{BB} + W_M^{IB} + W_A^B + W_M^{II} + W_M^{BI} + W_A^I} \quad (3.5)$$

Используя формулы (3.4) и (3.5) можно определить массу сополимерной цепи  $i$ , которая содержит  $j$  звеньев бутадиена и  $(i - j)$  звеньев изопрена :

$$M_i^{Bj} = C_i \cdot p_i^j \cdot M^{Bj} + C_i \cdot (1 - p_i^j) \cdot M^{I^{i-j}} \quad (3.6)$$

Применяя выражение (3.6) для подсчета всех возможных масс цепей в полученном сополимерном продукте, будем иметь распределение молекул по массам.

На основе предложенной методики решения прямой кинетической задачи для процесса сополимеризации бутадиена и изопрена на титансодержащем каталитическом комплексе, был составлен алгоритм и создана программа.

Таким образом, в работе предложена кинетическая схема процесса сополимеризации диенов на катализаторе Циглера-Натта и показана методика решения прямой кинетической задачи поиска средних молекулярных характеристик и построения молекулярно-массового распределения образующегося сополимера.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновации России» на 2009-2013 г.г. ГК № 02.740.11.0648 от 29.03.2010.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Б. Монаков, С. Р. Рафиков, Н. Х. Минченкова, И. Р. Муллағалиев, К. С. Минскер Исследование 1,4-транс-полимеризации изопрена // Доклады АН СССР. – 1981. – Т.258, №4. – С. 892–894.
2. Л. А. Нехаева, И. Ф. Гавриленко, С. В. Рыков, В. Л. Ходжаева, Е. М. Антипов, Б. А. Кренцель, В. М. Фролов, Н. А. Коноваленко, И. А. Тихомирова Синтез, структура и свойства полидиенов, полученных с помощью каталитических систем на основе соединений ванадия и алкилалюмоксанов // Высокомолек. соед. Сер. Б. – 1996. – Т. 38, №4. – С. 594–600.
3. В. Г. Козлов, В. П. Будтов, К. В. Нефедьев, Ю. Б. Монаков Определение некоторых кинетических параметров процесса полимеризации диенов на катализаторах Циглера-Натта // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 297, №2. – С.411–414.
4. Т. С. Усманов, Э. Р. Максютлова, С. И. Спивак Математическое моделирование процесса полимеризации бутадиена на лантанидсодержащих катализаторах // Доклады АН. – 2002. – Т. 387, №6. – С. 793–796.
5. Э. Р. Максютлова, Т. С. Усманов, С. И. Спивак, Ю. Б. Монаков, С. А. Мустафина Обратные задачи кинетики ионно-координационной полимеризации // Обозр. прикл. и пром. математики. – 2001. – Т. 8, вып. 1. – С. 403.
6. О.В. Ноа, А.Л. Тоом, Н.Б. Васильев, А.Д. Литманович, Н.А. Платэ Распределение звеньев в продуктах полимераналогичных реакций // Высокомолек. соед. Сер.А – 1973. – Т. 15, №4. – С. 877–888.
7. В.Е. Гмурман Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., стер. – М.:Высш.шк., 2002. – 479 с.

## About decision of the direct kinetic problem for sopolymerization process on Zigler-Natta catalysts.

© E. R. Gizzatova<sup>5</sup>, S. I. Spivak<sup>6</sup>, V. Z. Mingaleev<sup>7</sup>, Yu. B. Monakov<sup>8</sup>

**Abstract.** In work is offered kinetic scheme of the sopolymerization process of diene on Zigler-Natta catalysts. Presented methods of the decision of the direct kinetic problem which searchings the average-weight masses and buildings molecular-weight distribution.

**Key Words:** sopolymerization, Zigler-Natta catalysts, mathematical modelling, ODE systems.

---

<sup>5</sup>An assistant professor of Physical chemistry and chemical ecologies Chair, Bashkir State University, Ufa; makella@rambler.ru.

<sup>6</sup>Head of Mathematical modelling Chair, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

<sup>7</sup>Science employee of Stereoreguliar polymer Laboratory, Institute of organic chemistry, Ufa; mingaleevvz@rambler.ru.

<sup>8</sup>Head of Stereoreguliar polymer Laboratory, Institute of organic chemistry, Ufa; monakov@anrb.ru

УДК 519.642.7

## Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями

© И.Е. Дергунов<sup>1</sup>, И.В. Лутошкин<sup>2</sup>

**Аннотация.** Метод параметризации решения задач оптимального управления специфицируется для вариационных задач, содержащих интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра. Приближённое решение является вариационным сплайном.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальные уравнения, оптимизация, метод параметризации.

### 1. Введение

Многие модели управляемых динамических систем описываются при помощи интегро-дифференциальных уравнений, которые наиболее адекватно отражают эффект реакции системы с запаздыванием на внешнее воздействие. Примеры моделей физических, экономических систем приведены, в частности, в [5], [6], [7], [13]. При этом встает вопрос о развитии эффективных численных методов. На данный момент основные методы решения подобных проблем основаны на использовании принципа максимума [5], [8]: построении краевой интегро-дифференциальной задачи с сопряженными переменными и применение соответствующих методов её решения. Второй подход основан на прямых методах решения [9], [14], заключающихся в полной дискретизации исходной вариационной проблемы и последующем решении полученной задачи нелинейного программирования (НП). Последний способ применим для задач невысокой размерности.

В.К. Горбуновым в 1978г. был предложен метод параметризации [2] для задач оптимального управления, который получил дальнейшее развитие в работах [4], [10], [11], [12]. Метод параметризации заключается в произвольном разбиении временного промежутка и представлении искомой функции управления на каждом из промежутков в виде конечно параметризованной функции, например, константы или полинома. Такое кусочно-аналитическое управление можно считать обобщенным сплайном с переменными узлами. Функционалы исходной задачи становятся функциями конечного числа параметров, включая узлы разбиения, и исходная вариационная задача сводится к конечномерной задаче НП. Проблема численного интегрирования исходной и сопряженных систем в методе параметризации разделена с оптимизацией управления. Это позволяет решать задачу более гибко, чем при конечно-разностной аппроксимации исходной задачи, и, как правило, иметь аппроксимирующую задачу НП небольшой размерности. В настоящей работе данный метод развивается для задач, записанных в терминах интегро-дифференциальных уравнений.

---

<sup>1</sup>Аспирант кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский Государственный Университет, г. Ульяновск; comm3@yandex.ru.

<sup>2</sup>Доцент кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский Государственный Университет, г. Ульяновск; LutoshkinIV@ulsu.ru.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, описываемой интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра: минимизировать функционал

$$J = g(x(T)) \rightarrow \inf \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds, \\ x(t_0) = x^0; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Фазовая переменная  $x \in R^n$ , вектор параметров управления  $u \in R^r$ , множество  $U$  замкнуто в  $R^r$ . Функции  $\varphi : R^{1+n+r} \rightarrow R^n$ ,  $f : R^{2+n+r} \rightarrow R^n$  и  $g : R^n \rightarrow R$  будем считать непрерывными по всем переменным и непрерывно-дифференцируемыми по переменным  $x$ ,  $u$  в некоторых областях соответствующих пространств. При этом область дифференцируемости  $\varphi(t, x, u)$  и  $f(t, s, x, u)$  должна охватывать множество допустимых процессов  $\{u(t), x(t)\}$ . Предполагается, что задача (2.1)-(2.3) разрешима в классе кусочно непрерывных функций  $u(t)$ .

## 3. Параметризация задачи

Метод [3] заключается во введении произвольного разбиения промежутка  $[t_0, T]$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad (3.1)$$

и закреплении структуры управления на промежутках  $[t_{k-1}, t_k)$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r. \quad (3.2)$$

Функции  $u^k(t; v^k)$  определены и непрерывны на отрезках  $[t_{k-1}, t_k]$  и принимают значения в  $U$ , параметры  $v_\mu^k \in R^d$ , соответственно,  $v^k = (v_1^k, v_2^k, \dots, v_r^k) \in R^{rd}$ .

При подстановке параметризованного управления (3.2) в (2.2) получается траектория  $x(t)$ , зависящая от параметров управления  $w^k = (t_k, v^k)$ . Координаты полного вектора параметров будем обозначать  $w_{00}^k = t_k$ ,  $w_{\mu\alpha}^k = v_{\mu\alpha}^k$ ,  $1 \leq \mu \leq r$ ,  $1 \leq \alpha \leq d$ . Всего параметров управления при переменном  $T$  будет  $(rd+1)N$ . Отвечающую им траекторию представим в виде

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \quad (3.3)$$

Функция  $z(t; v^1, \dots, t_k, v^{k+1})$  определяется на промежутках  $[t_k, t_{k+1})$  интегральными соотношениями, эквивалентными в совокупности задаче Коши (2.2). Класс параметризованных управлений (3.2) является сужением допустимого класса. Предположим, что его функции определены для любых наборов параметров  $\{w^k\}$  из ограниченного множества

$$W = \{(w^1, \dots, w^N) : (3.1), u^k(t; v^k) \in U, k = 1, \dots, N\}.$$

Введем функцию от управляющих параметров  $\{w^k\}$ :

$$\psi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)). \quad (3.4)$$

В терминах этих функций задача (2.1)-(2.3) принимает форму задачи нелинейного программирования:

$$\psi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min \quad (3.5)$$

при условиях (2.2), (3.2),  $(w^1, \dots, w^N) \in W$ .

Для решения полученной конечномерной задачи можно применять методы, использующие первые производные целевого функционала. Однако, построение производных представляет собой отдельную проблему, в силу того, что целевой функционал задан опосредованно относительно переменных  $w^1, \dots, w^N$ .

#### 4. Дифференцирование функционала по параметрам

При подстановке условий (3.1), (3.2) в задачу (2.2) решение  $z(t; \cdot)$  будет определяться следующим соотношением:

$$z(t; \cdot) = x^0 + \int_{t_0}^t \left( \varphi(\tau, z(\tau; \cdot), u(\tau)) + \int_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s; \cdot), u(s)) ds \right) d\tau. \quad (4.1)$$

Продифференцируем равенство (3.4) по одному из параметров  $w_{\mu\alpha}^k$ :

$$\frac{\partial \psi(w^1, \dots, w^N)}{\partial w_{\mu\alpha}^k} = \frac{\partial g(z(T; w^1, \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w_{\mu\alpha}^k}. \quad (4.2)$$

Введем функции

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; w^1, \dots, v^j)}{\partial w_{\mu\alpha}^k}, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad 1 \leq k \leq j \leq N. \quad (4.3)$$

Функции (4.3) представляют собой вариации фазовой траектории относительно соответствующих параметров  $w_{\mu\alpha}^k$ . Таким образом, вопрос вычисления градиента целевой функции (3.5) сводится к вычислению значений  $y^{k\mu\alpha}(T)$ ,  $0 \leq \mu \leq r$ ,  $1 \leq \alpha \leq d$ ,  $1 \leq k \leq N$ .

Представим функцию (4.1) для  $t \geq t_k$  в виде

$$\begin{aligned} z(t; \cdot) = & z(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \varphi(\tau, z(\tau; \cdot), u(\tau)) + \int_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s; \cdot), u(s)) ds \right) d\tau + \\ & + \int_{t_k}^t \left( \varphi(\tau, z(\tau; \cdot), u(\tau)) + \int_{t_0}^{t_k} f(\tau, s, z(s; \cdot), u(s)) ds + \int_{t_k}^{\tau} f(\tau, s, z(s; \cdot), u(s)) ds \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Продифференцируем равенство (4.4) по переменной  $t_k$ , тогда для вариации по этой

переменной получаем задачу Коши

$$y^{k00}(t) = \frac{\partial z(t; \dots)}{\partial t_k} = \varphi(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - \varphi(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) + \\ + \int_{t_k}^t \left( \frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x} y^{k00}(\tau) + f(\tau, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - \right. \\ \left. - f(\tau, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) + \int_{t_k}^{\tau} \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds \right) d\tau,$$

которую можно представить в виде

$$\begin{cases} y^{k00}(t_k) = \varphi(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - \varphi(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})), \\ \dot{y}^{k00}(t) = \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) + f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - \\ - f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) + \int_{t_k}^t \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds. \end{cases} \quad (4.5)$$

Для нахождения вариации по параметрам управления продифференцируем равенство (4.4) по переменной  $v_{\mu\alpha}^k$

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \int_{t_{k-1}}^t \left( \frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(\tau) + \frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I(\tau \in [t_{k-1}; t_k]) \right) d\tau + \\ + \int_{t_{k-1}}^t \int_{t_{k-1}}^{\tau} \left( \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I(s \in [t_{k-1}; t_k]) \right) ds d\tau,$$

здесь функция  $I(\cdot)$  является индикатором логического аргумента: возвращает 1, если аргумент – истина, 0 в противном случае. Таким образом, получаем задачу Коши для вариации по переменной  $v_{\mu\alpha}^k$

$$\begin{cases} \dot{y}^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I(t \in [t_{k-1}; t_k]) + \\ + \int_{t_{k-1}}^t \left( \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I(s \in [t_{k-1}; t_k]) \right) ds, \\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Полученные формулы (4.5), (4.6) позволяют найти требуемые значения  $y^{k\mu\alpha}(T)$ , тем самым решить проблему построения градиента целевого функционала (3.5). Однако, данный подход является недостаточно эффективным с точки зрения скорости вычисления градиента, так как для построения градиента кроме задачи Коши (2.2) требуется также вычисление  $N(rd + 1)$  задач Коши (4.5), (4.6).

Пусть  $x(t)$  – решение задачи (2.2), тогда для любой липшицевой функции  $p : R \rightarrow R^n$  имеет место равенство (см. [5]):

$$\langle p(T), x(T) \rangle - \langle p(t_0), x(t_0) \rangle = \int_{t_0}^T \left( \langle \dot{p}(t), x(t) \rangle + \langle p(t), \varphi(t, x(t), u(t)) \rangle + \int_t^T \langle p(s), f(s, t, x(t), u(t)) \rangle ds \right) dt. \quad (4.7)$$

Для задачи (2.1)-(2.3) введем функцию Понтрягина [5]

$$H(t, x, u, p(\cdot)) = \langle p(t), \varphi(t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle p(s), f(s, t, x, u) \rangle ds. \quad (4.8)$$

Здесь функция  $p(t)$  является сопряжённой относительно систем в вариациях (4.5), (4.6) и определяется линейным уравнением

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial H(t, x(t), u(t), p(\cdot))}{\partial x}.$$

С учетом определения (4.8) это интегро-дифференциальное уравнение

$$\dot{p}(t) = - \left[ \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p(t) - \int_t^T \left[ \frac{\partial f(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p(s) ds. \quad (4.9)$$

Для выбора конкретной функции  $p(t)$  введём конечное условие

$$p(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}. \quad (4.10)$$

Для функции  $y^{k00}(t)$  (4.5) воспользуемся соотношением (4.7), подставим (4.9) и найдем выражение

$$\begin{aligned} \langle p(T), y^{k00}(T) \rangle - \langle p(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle &= \int_{t_k}^T \left( \langle \dot{p}(t), y^{k00}(t) \rangle + \int_t^T \left\langle p(s), \frac{\partial f(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) \right\rangle ds \right. \\ &+ \left. \left\langle p(t), \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) + f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \right\rangle \right) dt = \\ &= \int_{t_k}^T \langle p(t), f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя полученное соотношение (4.11), выражения (4.2), (4.3), конечное условие (4.10), начальное (4.5) и определение функции Понтрягина (4.8) нетрудно получить формулу частной производной по переменной  $t_k$  ( $1 \leq k < N$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= \frac{\partial g(z(T; \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w_{\mu\alpha}^k} = \langle p(T), y(T) \rangle = \\ &= \int_{t_k}^T \langle p(t), f(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - f(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})) \rangle dt + \langle p(t_k), y^{k00}(t_k) \rangle = \\ &= H(t_k, x(t_k), u(t_k - 0), p(\cdot)) - H(t_k, x(t_k), u(t_k + 0), p(\cdot)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для вывода производной по переменным  $v_{\mu\alpha}^k$  к функции  $y^{k\mu\alpha}(t)$  (4.6) применим

соотношение (4.7), подставим (4.9) и найдем выражение

$$\begin{aligned}
 \langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T) \rangle - \langle p(t_{k-1}), y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) \rangle &= \int_{t_{k-1}}^T [\langle \dot{p}(t), y^{k\mu\alpha}(t) \rangle + \\
 &+ \langle p(t), \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I(t \in [t_{k-1}; t_k]) \rangle + \\
 &\int_t^T \langle p(s), \frac{\partial f(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \frac{\partial f(s, t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I(t \in [t_{k-1}; t_k]) \rangle ds] dt = \\
 &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \langle p(t), \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} \rangle + \int_t^T \langle p(s), \frac{\partial f(s, t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} \rangle ds \right] dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Используя полученное соотношение (4.13), выражения (4.2), (4.3), конечное условие (4.10), начальное (4.6) и определение функции Понтрягина (4.8), аналогично частной производной по переменной  $t_k$ , найдем частные производные первого порядка по переменным  $v_{\mu\alpha}^k$  ( $0 \leq \mu \leq r, 1 \leq \alpha \leq d, 1 \leq k \leq N$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} &= \frac{\partial g(z(T); \dots, v^N)}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} = \langle p(T), y(T) \rangle = \\
 &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(t, x(t), u(t), p(\cdot))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t, v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Если конечный момент времени  $T$  является подвижным, то вариация фазовой траектории по  $T$  конечна

$$y^{N00}(T) = \varphi(T, x(T), u(T)) + \int_{t_0}^T f(T, s, x(s), u(s)) ds,$$

и производная находится по формуле

$$\frac{\partial \psi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = \langle p(T), \varphi(T, x(T), u(T)) + \int_{t_0}^T f(T, s, x(s), u(s)) ds \rangle.
 \tag{4.15}$$

Теперь для вычисления производных (4.2) требуется решить помимо основной задачи Коши (2.2), (3.2) дополнительно задачу (4.9), (4.10) и определить функцию (4.8). После этого, вычисление градиента сводится к вычислению определенных интегралов (4.14), (4.15), а также значений (4.12). Приведенный алгоритм менее трудоемок по сравнению с прямым вычислением по формулам (4.5), (4.6).

## 5. Пример

Рассмотрим тестовый пример (построен на основе примера из [1]):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + \int_0^t (tu(s) + x_1(s) + 1 - s - t) \exp\{s(t-s)\} ds, \\ \dot{x}_2(t) = (tx_1(t) - u(t) - t^2 + t + 1)^2, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_2(1) \rightarrow \inf. \end{cases}$$

Решение этой задачи известно:  $u(t) = t \exp\{t^2\} + 1$ ,  $x_1(t) = \exp\{t^2\} - 1 + t$ ,  $x_2(t) \equiv 0$ . Следовательно, минимальное значение целевого функционала равно нулю.

Решение строилось на отрезке  $[0; 1]$  в классе кусочно-квадратичных управлений

$$u(t) = v_{0k} + v_{1k}t + v_{2k}t^2, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Для нахождения решения использовался поэтапный алгоритм усложнения параметризации управления:

– на первом этапе решение находилось при  $N = 1$ , т.е. управление параметризовалось в классе квадратичных функций, таким образом, задача НП содержала только три переменные.

– на втором этапе решение строилось при  $N = 2$ . При этом разбиение отрезка  $[0; 1]$  фиксировалось  $t_1 = 0,5$ , и на каждом интервале управление  $u(t)$  параметризовалось квадратичной функцией. Задача НП в этом случае имела 6 переменных, в качестве начального приближения бралось решение полученное на первом этапе.

– третий этап построения решения характеризовался усложнением структуры управления  $N = 3$ . Отрезок  $[0; 1]$  разбивался фиксированными значениями  $t_1 = 0,5$  и  $t_2 = 0,75$ . Увеличение числа переменных задачи НП до 9 требует хорошего начального приближения, поэтому в качестве начального выбиралось решение полученное на предыдущем этапе.

Все задачи НП решались градиентным методом, итерационный процесс останавливался, когда норма градиента становилась меньше  $\varepsilon = 0,001$ .

Численный эксперимент проводился при двух способах вычисления градиента: первый способ основывался на использовании формул (4.14); второй способ основывался на численном дифференцировании – аппроксимации градиента на основе вычисления значений целевой функции (3.5). Решение задач Коши проходило методом Эйлера при фиксированном шаге интегрирования 0,005.

Результаты эксперимента приведены в таблице:

| N | Первый способ        |                |       | Второй способ        |                |       |
|---|----------------------|----------------|-------|----------------------|----------------|-------|
|   | Значение функционала | Число итераций | Время | Значение функционала | Число итераций | Время |
| 1 | 0.00285              | 437            | 4538  | 0.00288              | 443            | 5505  |
| 2 | 0.00112              | 70             | 429   | 0.00102              | 69             | 905   |
| 3 | 0.00061              | 244            | 905   | 0.00051              | 244            | 3025  |

В первом столбце указывается число интервалов разбиения исходного временного отрезка, второй и пятый столбцы содержат значение функционала на полученном решении в соответствующем классе параметризации, третий и шестой – число итераций в градиентном методе соответствующей задачи НП. Временные характеристики работы алгоритма существенно зависят от выбора средств реализации и эксперимента, т.е. языка

программирования и характеристик ЭВМ. Поэтому к значениям в четвертом и седьмом столбцах нужно относиться как к условным временным единицам (например, секунды).

Анализируя данные таблицы, можно отметить, что оба способа вычисления градиента приводят к приемлемому решению и, с точки зрения количества итераций, значения целевого функционала, дают эквивалентные результаты, однако, временная характеристика гораздо быстрее у первого способа, причем эта разница растет по мере увеличения числа параметров при параметризации управления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 7-01-90000 Вьет/а) Авторы благодарны В.К.Горбунову за внимание, оказываемое к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие – Киев, Наукова думка, 1986.
2. Горбунов В.К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т.18. №5. С. 1083-1095.
3. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. №2. С. 292-303.
4. Горбунов В.К., Лутошкин И.В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67-84.
5. Дждеед М. Методы и алгоритмы оптимального управления системами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями. Диссертация на соискание степени канд. физ.-мат. наук. Тверь, 2004, 114 с.
6. Егоров А.И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии. - Фрунзе: Илим, 1990.
7. Максимов В.П. Некоторые проблемы регуляризации переопределенных краевых задач экономической динамики. // Математическое моделирование, 1997, Т.9. №2. С. 57-65.
8. Пустарнакова Ю.А. Оптимизация процесса обучения искусственной нейронной сети, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений. Труды 12 - ой Байкальской международной конференции. «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, 2001, т.2. - с 134-138.
9. Durazzi C. and Galligani E. Nonlinear programming methods for solving optimal control problems // Nonconvex Optimization and Its Applications. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models, 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, pp.71-99.
10. Gorbunov V., Lutoshkin I. The parameterization method in singular differential-algebraic equations. Computational Science- ICCS 2003 / P. Slot et al. (Eds.). LNCS 2658. Springer, 2003.

11. Gorbunov V., Lutoshkin I. The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations. Journal of computational and applied mathematics, Elsevier, 2006, v. 185, iss. 2, p. 377-390.
12. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V., Martynenko Y.V. A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations // Applied Numerical Mathematics (2008), doi:10.1016/j.apnum.2008.03.025. p. 1–17.
13. Kamien M. I., Muller E. Optimal Control with Integral State// Equations The Review of Economic Studies, Vol. 43, No. 3. (Oct., 1976), p. 469-473.
14. Yuan Wei, Tang Tao The Numerical Analysis of Implicit Runge-Kutta Methods for a Certain Nonlinear Integro-Differential Equation // Mathematics of Computation, Vol. 54, No. 189. (Jan., 1990), p. 155-168.

# The parameterization method for optimizing the systems represented by integro-differential equations

© I.Y. Dergunov<sup>3</sup>, I.V. Lutoshkin<sup>4</sup>

**Abstract.** The parameterization method (it was created for solving optimal control problems) is specified for variational problems with Volterra integro-differential equations. The approximation solution is a variational spline.

**Key Words:** integro-differential equations, optimization, the parameterization method.

---

<sup>3</sup>Aspirant of Economic-mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; comm3@yandex.ru.

<sup>4</sup>Docent of Economic-mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; LutoshkinIV@ulsu.ru.

УДК 519.8

## О методе «неполных наказаний» в неантагонистических позиционных дифференциальных играх двух лиц

© А. Н. Джафаров<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе получены почти совпадающие необходимые и достаточные условия существования в неантагонистической позиционной дифференциальной игре равновесных по Нэшу ситуаций. Доказательство основано на построении равновесных позиционных стратегий с помощью стратегий неполного наказания.

**Ключевые слова:** дифференциальная игра, ситуация равновесия по Нэшу, стратегия неполного наказания, множество Нэша.

### 1. Введение

Известно, что анализ горизонтальных взаимодействий элементов ДИС (Динамических иерархических систем) и синтез механизмов этих взаимодействий может быть сведена к решению бескоалиционной позиционной дифференциальной игры многих лиц. При этом в качестве решения указанной игры можно принять ситуацию равновесия по Нэшу, которая достаточно адекватна принятому условию «равноправности» находящихся на одном уровне иерархии элементов. В качестве конкретного примера возможного приложения развиваемой теории можно привести теоретико-игровую модель развития экономики с учетом финансовых взаимоотношений, учитывающую взаимодействия равноправных элементов нижнего уровня в двухуровневой ИС [1].

Дифференциальная игра многих лиц называется позиционной, если выбор управляющего вектора каждого игрока осуществляется по принципу обратной связи, т.е., если при вычислении управляющих воздействий в нужный для игроков момент времени игроки опираются лишь на сведения о реализовавшейся в этот момент времени позиции игры. Основу теории антагонистических позиционных дифференциальных игр составляют работы, выполненные в Свердловске. В ВЦ АН СССР развита теория неантагонистических позиционных дифференциальных игр, которая опирается на результаты этих работ. Этот подход позволяет описать практически все множество решений неантагонистической позиционной дифференциальной игры двух лиц. При этом предложена схема исследования неантагонистических позиционных дифференциальных игр двух лиц, заключающаяся в анализе множества взаимовыгодных траекторий и применении (угрозы применения) стратегий наказания в случае отклонения одного из игроков от намеченной траектории. Такой подход, при распространении на дифференциальные игры 3-х и более игроков встречается ряд трудностей, принципиальная из которых заключается в неопределенности, связанной с необходимостью применения (угрозы применения) стратегий наказания. Необходимо отметить, что под множеством решений указанных игр подразумевается множество равновесных ( $\varepsilon$ -равновесных) по Нэшу наборов позиционных стратегий. Такой подход к решению бескоалиционных позиционных дифференциальных игр многих лиц является одним из распространенных в последнее время подходов. Таким образом в случае  $N > 2$ , где  $N$ -число игроков, наблюдая отклонение текущей позиции от намеченной, игроки

<sup>1</sup>Преподаватель Сумгаитского филиала Азербайджанского Института Учителей, г.Сумгаит; ali19562001@mail.ru.

не могут определить, по чьей вине произошло это отклонение. Но даже, если кто-то из игроков в состоянии определить отклонившегося игрока (по определению равновесия по Нэшу, в каждый момент времени может отклониться один и только один игрок), то в силу бескоалиционной игры, правила которой запрещают любые взаимоотношения игроков как до начала, так и в процессе игры вплоть до ее окончания, такая информированность об отклонившемся игроке, как правило, недостаточна для эффективного применения стратегий наказания.

В то же время [3-11] из самого наличия целого семейства равновесных (по Нэшу) позиционных стратегий следует, что точки равновесия не могут являться, строго говоря, бескоалиционным (несогласованным) решением позиционной дифференциальной игры нескольких лиц. Стало быть, бескоалиционность позиционной дифференциальной игры многих лиц выражается в изолированных действиях игроков в процессе игры вплоть до ее окончания. До начала же игры игрокам разрешается, строго говоря, необходимо, договариваться о выборе определенной траектории из целого семейства таких траекторий.

## 2. Постановка задачи

Итак, рассмотрим следующую игру:

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, T] \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

$$u \in P, \quad v \in Q, \quad (2.3)$$

$$J_1(u, v) = g_1(x(T)), \quad (2.4)$$

$$J_2(u, v) = g_2(x(T)), \quad (2.5)$$

где  $x$  –  $n$ -мерной вектор состояния,  $t$ -время,  $t_0$  и  $T$ -фиксированные моменты времени, характеризующие моменты начала и окончания игры,  $f(t, x, u, v)$ -заданная функция, отражающая динамические свойства системы (2.1)-(2.5).  $u, v$ -векторы управляющих воздействий (управления) игроков, стесненные ограничениями (2.3), где  $P, Q$ -некоторые непустые компакты в евклидовых пространствах  $R^n$ . Интересы всех игроков полностью выражаются в их стремлении к максимизации своих функций выигрыша (2.4) и (2.5). Предполагается, что игроки имеют абсолютно точную информацию о параметрах системы (2.1)-(2.5) до начала и в течение всей игры вплоть до ее окончания, а также о реализуемых позициях во время игры, т.е. каждому игроку известна текущая позиция системы. В каждый момент времени выбор управляющего вектора осуществляется на основе знания позиции  $(t, x(t))$ , т.е. по принципу обратной связи. Иначе говоря, при вычислении управляющих воздействий  $u(t_i)$  и  $v(t_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$  в нужный для игроков момент времени  $t_i, t_j \in [t_0, T]$  на основе так или иначе выбранных законов управления игроки опираются лишь на сведения о реализовавшейся в момент времени  $t = t_j$  позиции игры  $(t_j, x(t_j))$ . Кроме того, предполагается, что игроки действуют изолированно друг от друга в течений всей игры вплоть до ее окончания, в чем и выражается бескоалиционность дифференциальной игры (2.1)-(2.5). Функции  $g_j$  предполагаются непрерывными, а вектор-функция  $f(t, x, u, v)$  удовлетворяет стандартным требованиям, обеспечивающим существование, единственность и продолжимость решения задачи Коши (2.1), (2.2) вплоть до момента окончания игры -  $T$ .

К классу допустимых стратегий игроков отнесем множества программных  $U, V$  и позиционных  $U, \vartheta$  стратегий, элементы которых является измеримыми по Борелю по

всем своим аргументам функциями  $u_t = u(t), v_t = v(t), t \in [t_0, T]$  и  $u_{xt} = u(t, x(t)), v_{xt} = v(t, x(t)), t \in [t_0, T], x \in R^n$  соответственно удовлетворяющими ограничениям (2.3).

Следуя [1-10] через  $X^P [t_0, x_0, u_{xt}, V]$  и  $X^P [t_0, x_0, U, v_{xt}]$  соответственно обозначим множество всех движений, порожденных позиционной стратегией  $u_{xt}$  при любых реализациях управлений второго игрока и позиционной стратегией  $v_{xt}$  при любых реализациях управлений первого игрока. Введем функционалы  $l_1 : [t_0, T] \times R^n \times \vartheta \rightarrow R$  и  $l_2 : [t_0, T] \times R^n \times U \rightarrow R$  следующим образом:  $\forall ((\tau, x_\tau) \in [t_0, T] \times R^n \& u_{xt} \in U \& v_{xt} \in \vartheta)$  положим  $l_1(\tau, x_\tau, v_{xt}) = \max_{X[\tau, x_\tau, U, v_{xt}]} g_1(x(T))$ ,  $l_2(\tau, x_\tau, u_{xt}) = \max_{X[\tau, x_\tau, u_{xt}, V]} g_2(x(T))$ .

Для любых начальных позиций  $(\tau, x_\tau) \in [t_0, T] \times R^n$  очевидны равенства

$$\inf_{u_{xt} \in U} l_2(\tau, x_\tau, u_{xt}) = L_2(\tau, x_\tau), \quad \inf_{v_{xt} \in \vartheta} l_1(\tau, x_\tau, v_{xt}) = L_1(\tau, x_\tau), \quad (2.6)$$

$$l_2(\tau, x_\tau, u_{xt}^{\Pi}) = L_2(\tau, x_\tau), \quad l_1(\tau, x_\tau, v_{xt}^{\Pi}) = L_1(\tau, x_\tau), \quad (2.7)$$

где  $L_i(\cdot), i = 1, 2$  минимаксные выигрыши игроков в соответствующих вспомогательных антагонистических играх (см. [1-10]), а  $u_{xt}^{\Pi}$  и  $v_{xt}^{\Pi}$  стратегии полного наказания, которые, по определению, при любых  $(\tau, x_\tau) \in [t_0, T] \times R^n$  удовлетворяют равенствам  $L_1(\tau, x_\tau) = \max_{X[\tau, x_\tau, U, v_{xt}^{\Pi}]} g_1(x(T))$ ,  $L_2(\tau, x_\tau) = \max_{X[\tau, x_\tau, u_{xt}^{\Pi}, V]} g_2(x(T))$ .

Через  $X^P [t_0, x_0, U, V]$  обозначим множество решений задачи Коши (2.1), (2.2), порожденных всеми подмножества этого множества

$$D(u_{xt}, v_{xt}) = \left\{ x_t \in X^P [t_0, x_0, U, V] / g_1(x(t)) > l_1(t, x(t), v_{xt}), \right. \\ \left. g_2(x(T)) > l_2(t, x(t), u_{xt}) \quad \forall t \in [t_0, T] \right\}, \\ \widehat{D}(u_{xt}, v_{xt}) = \left\{ x_t \in X^P [t_0, x_0, U, V] / g_1(x(t)) \geq l_1(t, x(t), v_{xt}), \right. \\ \left. g_2(x(T)) \geq l_2(t, x(t), u_{xt}) \quad \forall t \in [t_0, T] \right\}.$$

Введем еще множества

$$\Omega = \{(u_{xt}, v_{xt}) \in U \times \vartheta \mid D(u_{xt}, v_{xt}) \neq \emptyset\}, \quad \widehat{\Omega} = \{(u_{xt}, v_{xt}) \in U \times \vartheta \mid \widehat{D}(u_{xt}, v_{xt}) \neq \emptyset\}.$$

Содержательный смысл этих множеств очевиден. Например, множество  $\Omega$  состоит из всех пар позиционных стратегий таких, что существует траектория  $x_t$ , порожденная программными стратегиями, для которой в каждый момент времени  $t \in [t_0, T]$  значения функционалов  $l_i(t, x(t), \cdot)$  (соответствующих фиксированной паре из  $\Omega$ ) на этой траектории соответственно меньше значений этих же функционалов в момент окончания игры  $T$ .

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Набор позиционных стратегий  $(u_{xt}^0, v_{xt}^0)$  образует в игре (2.1)-(2.5) ситуацию равновесия по Нэшу, если:

а) набор  $(u_{xt}^0, v_{xt}^0)$  порождает единственное решение  $x_t^0$  задачи Коши (2.1), (2.2), которое является и единственным движением, т.е.  $\forall t \in [t_0, T]$  имеет место равенство

$$\{x^0(\tau), \tau \in [t, T]\} = X[t, x^0(t), u_{xt}^0, v_{xt}^0];$$

б)  $\forall t \in [t_0, T]$  выполняются равенства

$$\max_{X[t, x^0(t), U, v_{xt}^0]} g_1(x(T)) = g_1(x^0(T)),$$

$$\max_{X[t, x^0(t), u_{xt}^0, V]} g_2(x(T)) = g_2(x^0(T))$$

**О п р е д е л е н и е 2.2.** В игре (2.1)-(2.4) существует ситуация  $\varepsilon$ -равновесия по Нэшу, если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется набор позиционных стратегий  $(u_{xt}^\varepsilon, v_{xt}^\varepsilon)$  такой, что:

а) существует единственное решение  $x_t^\varepsilon$  задачи Коши (2.1), (2.2), которое является и единственным движением, т.е. при всех  $t \in [t_0, T]$  выполняется равенство

$$\{x^\varepsilon(\tau), \tau \in [t, T]\} = X[t, x^\varepsilon(t), u_{xt}^\varepsilon, v_{xt}^\varepsilon];$$

б)  $\forall t \in [t_0, T]$  справедливы неравенства

$$\max_{X[t, x(t), u_{xt}^\varepsilon, V]} g_2(x(T)) \leq g_2(x^\varepsilon(T)) + \varepsilon$$

$$\max_{X[t, x^\varepsilon(t), U, v_{xt}^\varepsilon]} g_1(x(T)) \leq g_1(x^\varepsilon(T)) + \varepsilon$$

Поскольку изложение полученных результатов проводится в форме описания множества равновесных по Нэшу решений игры (2.1)-(2.5), кажется целесообразным введение самого термина «множество Нэша». Так, множество всех равновесных в смысле определения 1 решений игры (2.1)-(2.5) назовем множеством Нэша, множество всех  $\varepsilon$ -равновесных в смысле определения 2 решений-  $\varepsilon$ -множеством Нэша.

### 3. Результаты

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть выполняется соотношение  $\Omega \neq \emptyset$ .

Тогда в игре (2.1)-(2.5) существует ситуация равновесия по Нэшу на классе позиционных стратегий.

Доказательство следует из равенств (2.6)-(2.7) и аналогичной теоремы из [2,3].

**Т е о р е м а 3.2.** Пусть в игре (2.1)-(2.5) существует ситуация равновесия по Нэшу на классе позиционных стратегий. Тогда имеет место неравенство  $\hat{\Omega} \neq \emptyset$ .

Доказательство непосредственно следует из определения.

**Т е о р е м а 3.3.** Неравенства  $\hat{\Omega} \neq \emptyset$  необходимо и достаточно для существования в игре (2.1)-(2.5) ситуации  $\varepsilon$ -равновесия по Нэшу в позиционных стратегиях.

Обозначив через  $U^n$  множество всех пар стратегий полного наказания, введем следующее

**О п р е д е л е н и е 3.1.** Элемент непустого множества  $\hat{\Omega} \setminus U^n$  назовем парой стратегий неполного наказания.

Стратегии полного и неполного наказания объединим под общим названием стратегий наказания.

**С л е д с т в и е 3.1.** *В игре (2.1)-(2.5) существует ситуация  $\varepsilon$ -равновесия тогда и только тогда, когда существует пара стратегий наказания.*

Таким образом, понятия «пара стратегий наказания» и «ситуация  $\varepsilon$ -равновесия» в известном смысле эквивалентны. Более того, любая пара равновесных стратегий суть пара стратегий наказания. Обратное, вообще говоря, не верно (см. Пример 1.1 из [6]).

В заключение следует отметить вытекающий из данной работы вывод о том, что оказывается, предложенная в ВЦ АН СССР теория неантагонистических позиционных дифференциальных игр обходится и без основ теории антагонистических позиционных дифференциальных игр.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982, – 144 с.
2. Джафаров А.Н. О формализации и редукции коалиционных игр с объединением ресурсов // Докл. АН Азерб. ССР. – 1985. – Т. 41. – С. 7-9.
3. Джафаров А.Н., Кононенко А.Ф. Об одном методе редукции дифференциальных игр, I // Изв. АН Азерб. ССР, Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1985. – Т. 41, №1. – С. 103-106.
4. Джафаров А.Н., Кононенко А.Ф. Об одном методе редукции дифференциальных игр, I // Изв. АН Азерб. ССР, Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1985. – Т. 41, №2. – С. 100-103.
5. Джафаров А.Н. Об одном семействе достаточных условий существования равновесных позиционных стратегий в дифференциальных играх нескольких игроков // Тр. конф. молод. Уч. АН Азерб. ССР, Баку. – 1987. – С. 19-20.
6. Джафаров А.Н. Структура и свойства множества Нэша дифференциальных игр  $N$  лиц / Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. кан. физ.-мат. наук, – М.: М. ВЦ АН СССР, 1988.
7. Джафаров А.Н. О стратегиях «Неполного наказания» в неантагонистических дифференциальных играх двух лиц // Кибернетика. – 1989. – №1 – С. 134-137.
8. Джафаров А.Н. Некоторые условия существования равновесных по Нэшу позиционных стратегий в бескоалиционных линейно-квадратичных играх многих лиц // Изв. ВУЗ. Математика. – 1991. – №4 – С. 80-82.
9. Джафаров А.Н. Об одном классе бескоалиционных дифференциальных игр трёх лиц // Автоматика и Телемеханика. – 1992. – №1 – С. 24-29.
10. Djafarov A. N. On a reduction of non-antagonistic positional differential games to a pair of parametric extremal problems. Multiple criteria and game problems under uncertainty. – The 4th International Workshop (8-14 September, 1996), Moscow. – 1996. – p. 40.
11. Джафаров А.Н. Редукция неантагонистических позиционных дифференциальных игр к параметрическим задачам оптимизации. Спектральная теория и ее приложения / Тезисы Международной конференции, посвященной 80-летию юбилею академика Ф. Г. Максудова. Ваку. – 2010. – С. 158-159.

## About the method of «incomplete punishments» in nonantagonistic item differential games of two persons.

© A. N. Djafarov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the work almost conterminous necessary and sufficient living conditions in nonantagonistic item differential game of equilibrium situations on Nash are obtained. The proof is based on construction of equilibrium item strategy by means of strategy of incomplete punishment.

**Key Words:** differential game, a balance situation on Nash, strategy of incomplete punishment, Nash's set.

---

<sup>2</sup>The teacher of Sumgait branch of the Azerbaijan Institute of Teachers, Sumgait; ali19562001@mail.ru.

УДК 517.9

## Решение модельной задачи для уравнения диффузионного типа многосеточным методом на нерегулярной сетке

© Р. В. Жалнин<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе представлены результаты применения многосеточный метода решения уравнений диффузионного типа на нерегулярной сетке из ячеек Дирихле для одной модельной задачи.

**Ключевые слова:** многосеточный метод, нерегулярная сетка, уравнения диффузионного типа.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 < x, y < 1; \\ u|_{\Gamma} &= 0, \quad \text{где } \Gamma \text{ — граница области;} \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 < x, y < 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Построим равномерную сетку из  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$  узлов, которую будем называть подробной сеткой. Координаты узла  $p_i$  задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_k &= i/N_x, \\ y_k &= j/N_y, \\ \text{где } k &= jN_x + i, 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Также построим равномерную сетку из  $(N_x + 1)/2 \times (N_y + 1)/2$  узлов, которую будем называть грубой сеткой. Координаты узла  $\bar{p}_i$  задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= 2 * i/N_x, \\ \bar{y}_k &= 2 * j/N_y, \\ \text{где } k &= jN_x/2 + i, 0 \leq i \leq N_x/2, 0 \leq j \leq N_y/2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее произведем триангуляцию Делоне области по вычисленным узлам сетки и построим ячейки Дирихле, соответствующие построенной триангуляции.

Затем произведем адаптацию сеток к особенностям начальных данных – решим систему уравнений [1]:

$$\sum_{j \in \Theta_i} w_{ij}(p_i - p_j) S_{ij} = 0, \quad (1.4)$$

для сетки (1.2), где  $\Theta_i$  – множество номеров соседних узлов для  $p_i$ ,  $S_{ij}$  – площадь треугольника, образованного узлом  $p_i$  и ребром между ячейками с номерами  $i$  и  $j$ ;  $w_{ij} = \theta_0 + \theta_1 |u_i - u_j|$ . Узлы грубой сетки перемещаются вместе с соответствующими узлами подробной сетки. При необходимости производится перераспределение ячеек Дирихле для адаптированных сеток.

<sup>1</sup>Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@hpc.mrsu.ru.

|  |           |
|--|-----------|
| $N_x$  | 40        |
| $N_y$  | 40        |
| $\theta_0$                                     | 100       |
| $\theta_1$                                     | 2000      |
| $\tau$   | $10^{-4}$ |
| Шаг метода простой итерации на подробной сетке | $10^{-5}$ |
| Шаг метода простой итерации на грубой сетке    | $10^{-5}$ |

Таблица 1: Параметры расчета

Построим разностную схему, пользуясь интегро-интерполяционным методом:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} &= \frac{1}{S_i} \sum_{j \in \Theta_i} \frac{u_j^{k+1} - u_i^{k+1}}{h_{ij}} l_{ij}, \\ u_i^k &= 0, i \in \Gamma_h, \\ u_j^0 &= \sin(\pi x_i) \sin(\pi y_i), \end{aligned} \quad (1.5)$$

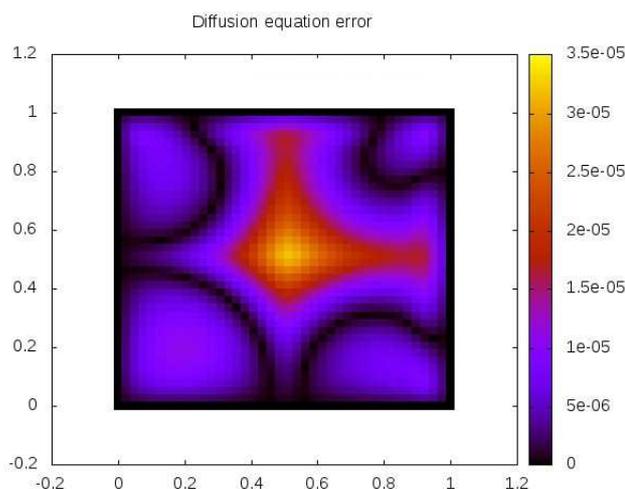
где  $\Gamma_h$  – множество номеров ячеек, пересечение, которых с границей  $\Gamma$  является непустым множеством,  $l_{ij}$  – длина грани между  $i$ -й и  $j$ -й ячейками,  $h_{ij}$  – расстояние между центрами  $i$ -й и  $j$ -й ячеек,  $S_i$  – площадь  $i$ -й ячейки. Далее это сеточное уравнение будем записывать в виде  $Au_h^k = f_h$

Полученное сеточное уравнение решается (алгоритм предложен в [2]) методом простой итерации, причем делается одна итерация и вычисляется невязка  $r_h = f_h - A\tilde{u}_h^k$ , здесь  $\tilde{u}_h^k$  – решение полученное в ходе этой итерации. Далее производится проекция невязки на грубую сетку:

$$\bar{R}_{\bar{i}} = r_i, \quad (1.6)$$

где  $\bar{i}$  – номер ячейки грубой сетки соответствующей  $i$ -й ячейке на подробной сетке (они совпадают при данном построении сеток).

Далее на грубой сетке решается уравнение для погрешности  $A\Delta_h = R_h$ .



Р и с у н о к 1.1

Далее производится интерполяция погрешности на подробную сетку (если узел подробной сетки совпадает с узлом грубой, то значение копируется, если они не совпадают,

то находится треугольник на грубой сетке внутрь которого попадает узел подробной сетки и значение  $\delta_i^k$  интерполируется по узлам, находящимся на вершинах треугольника).

Далее полагается  $u^k = \tilde{u}^k + \delta^k$  и делается несколько сглаживающих итераций.

Был выполнен расчет с параметрами, представленными в таблице 1.

На рисунке 1.1 представлено распределение ошибки (разности с точным решением модельной задачи). Предложенный метод демонстрирует хорошие результаты для модельной задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неледова А. В., Тишкин В. Ф., Филатов А. Ю. Нерегулярные адаптивные сетки для решения задач математической физики // Математическое моделирование, 1997, Т. 9; № 2, – С. 13–20.
2. Ладонкина М. Е., Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф. Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов // ТСВМО, 2008, Т. 10, № 2, – С. 4–19.

# Solution of the model problem for diffusion equation by multigrid method on an irregular grid

© R. V. Zhalnin<sup>2</sup>

**Abstract.** The paper presents the results of applying the multigrid method for solving diffusion-type equations on an irregular grid of Dirichlet's cells for a model problem.

**Key Words:** multigrid method, irregular grid, the equations of diffusion type.

---

<sup>2</sup>Senior lecturer of applied mathematics chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhrv@hpc.mrsu.ru.

УДК 519.633.6

## Анализ эффективности итерационно-интерполяционного метода

© Л. Ю. Катаева<sup>1</sup>, Д. А. Масленников<sup>2</sup>, М. В. Прокофьева<sup>3</sup>

**Аннотация.** Рассмотрена схема итерационно-интерполяционного метода и оценена её эффективность при решении нелинейных уравнений мелкой воды.

**Ключевые слова:** Итерационно-интерполяционный метод, вычислительная математика, схемы высокого порядка точности.

### 1. Введение

Вычислительная математика основана на сочетании интеллекта человека и скорости вычислительной машины. Если задача простая, а компьютер мощный, то даже плохой (в смысле эффективности) алгоритм даст хороший результат. Однако для решения современных научных задач требуется использовать максимум, как скорости компьютера, так и эффективности алгоритма. Одним из эффективных методов решения краевых задач является итерационно-интерполяционный метод.

### 2. Схемы итерационно-интерполяционного метода и их свойства

Рассмотрим дифференциальное уравнение в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = C(t, x, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}) + \Phi(t, x, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.1)$$

Согласно [1], [2] разностная схема для него имеет следующий вид:

$$\frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{h_{i+1}} - \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{h_i} = \frac{1}{6}(C_{i+1}(h_{i+1}) + C_i(2h_{i+1} + 2h_i) + C_{i-1}(h_i)) + (\Phi_{i+1} + 2\Phi_i)\theta_{i+1} + (2\Phi_i + \Phi_{i-1})\theta_{i-1} \quad (2.2)$$

Итерационно-интерполяционный метод обеспечивает высокий порядок точности по пространству, при этом оставляя свободу выбора схемы дискретизации по времени. Однако схемы итерационно-интерполяционного метода являются компактными, поэтому следует использовать неявные или явно-неявные дискретизации по времени. Также целесообразно использовать схемы высокого порядка точности по времени, чтобы обеспечить соответствие порядку точности по пространству.

<sup>1</sup>Профессор кафедры «Прикладная математика и информатика», Нижегородский Государственный Технический Университет имени Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород; kataeval@rambler.ru.

<sup>2</sup>Аспирант, Нижегородский Государственный Технический Университет имени Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород; dmitrymaslennikov@rambler.ru.

<sup>3</sup>Магистр, Нижегородский Государственный Технический Университет имени Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород; marlen1406@yandex.ru.

### 3. Анализ эффективности

Рассмотрим двумерные нелинейные уравнения мелкой воды.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(UH)}{\partial x} + \frac{\partial(VH)}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

Будем сравнивать схему, полученную на основе итерационно-интерполяционного метода и дискретизации по времени методом Кранка-Николсона со схемой №18 [3]. В качестве начальных условий выберем гауссово распределение. Критерии оценки эффективности:

- 1 Время работы вычислительного алгоритма
- 2 Погрешность (выбор метода оценки погрешности неочевиден, например можно оценивать максимальную, среднюю или среднеквадратическую погрешность)
- 3 Сложность вывода и реализации схемы

Как правило, эти критерии противоречивы. Поэтому выбор метода зависит от решаемой задачи. Будем использовать алгоритм оценки погрешности, основанный на вычислении максимума погрешности и на правиле Рунге. По результатам экспериментов, время вычислений итерационно-интерполяционным методом в 10-13 раз больше за счёт использования итераций и метода прогонки вместо схемы бегущего счёта. В Таблице 2 показаны оценки погрешности. Прочерком отмечены соотношения шагов, при которых схема разрушается из-за невыполнения соотношения Куранта. Эффективность

Таблица 2: Отношение погрешности схемы 18 к погрешности итерационно-интерполяционного метода.

| Размер шага по пространству, км | Размер шага по времени, сек |    |    |     |
|---------------------------------|-----------------------------|----|----|-----|
|                                 | 4                           | 2  | 1  | 0,5 |
| 4                               | 8                           | 6  | 5  | 4   |
| 2                               | 34                          | 19 | 14 | 11  |
| 1                               | 96                          | 61 | 62 | 63  |
| 0,5                             | -                           | -  | 74 | 68  |

итерационно-интерполяционного метода зависит от гладкости решения. Если же решение разрывное или сильно меняющееся в некоторых областях, то чтобы сохранить точность можно ввести более мелкую сетку в этой области.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК N1122

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Катаева Л.Ю. Постановка и проведение вычислительного эксперимента по исследованию аэро- и гидродинамических процессов в аварийных ситуациях природного и техногенного характера. Монография. М.: Изд-во РГОТУПС, 2007. 218 с.
2. Гришин А.М., Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Субботин А.Н., Якимов А.С. Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 318 с
3. Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами // М.: Наука, 1983 г. – 267 с.

---

# Analysis of the effectiveness of an iteration-interpolation method

© L. Yu. Kataeva<sup>4</sup>, D. A. Maslennikov<sup>5</sup>, M. V. Prokofieva<sup>6</sup>

**Abstract.** The scheme of iteration-interpolation method are considered and evaluated its effectiveness in solving nonlinear equations of shallow water.

**Key Words:** iteration-interpolation method, Computational Mathematics, schemes of high accuracy.

---

<sup>4</sup>Professor of Applied Mathematics and Informatics Char, Nizhny Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod; kataeval@rambler.ru.

<sup>5</sup>Postgraduate student, Nizhny Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod; dmitrymaslennikov@rambler.ru.

<sup>6</sup>Graduate student, Nizhny Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod; marlen1406@yandex.ru.

УДК 519.63

## О способе вычисления потенциальных физических полей в кусочно-анизотропных средах

© В. Н. Кризский<sup>1</sup>, Н. В. Трегубов<sup>2</sup>, Р. Р. Яматов<sup>3</sup>

**Аннотация.** На основе процедуры пересчета функции Грина одной среды в функцию Грина другой среды строятся рекуррентные алгоритмы решения прямых трехмерных задач о распространении потенциальных физических полей в кусочно-анизотропных средах. Способ вычисления, применимый к задачам с дифференциальными уравнениями эллиптического, параболического, гиперболического и смешанного типов, позволяет комплексировать физические методы исследований. Алгоритмы допускают распараллеливание и могут быть реализованы на вычислительных кластерах и многопроцессорных комплексах.

**Ключевые слова:** потенциальное поле, краевая задача, метод интегральных представлений и интегральных преобразований, функция Грина, кусочно-анизотропная среда.

### 1. Введение

Математическая модель распространения ряда практически значимых физических полей в анизотропной области исследования  $\Omega \subset R^3$  описывается краевыми или начально-краевыми задачами для дифференциальных уравнений математической физики вида:

$$\operatorname{div}(\sigma(P) \cdot \nabla U(P, t)) - a(P)U(P, t) - b^2(P) \frac{\partial U(P, t)}{\partial t} - c^2(P) \frac{\partial^2 U(P, t)}{\partial t^2} = -f(P, t). \quad (1.1)$$

Здесь  $f(P, t)$  - функция интенсивности источников/стоков поля;  $\sigma(P)$  - симметричный положительно определенный тензор, описывающий физические свойства среды;  $a(P)$  - комплекснозначная функция,  $b(P)$  и  $c(P)$  - действительные функциональные коэффициенты, зависящие от т.  $P = (x, y, z) \in \Omega$ ;  $U(P, t)$  - искомая скалярная функция поля; переменная  $t \geq 0$  - время.

Будем считать в дальнейшем встречающиеся в задаче функции достаточно гладкими для использования формул интегральных представлений и интегральных уравнений, а так же имеющими необходимый порядок затухания на бесконечности для обеспечения применимости интегрального преобразования Лапласа.

Осуществим разбиение области  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$  на подобласти  $\Omega_i$  с достаточно гладкими границами  $S_i$  так, чтобы в каждой из подобластей  $\Omega_i$  тензор  $\sigma(P)$  и функции  $a(P)$ ,  $b(P)$ ,  $c(P)$  можно было бы с некоторой степенью точности принять постоянными:  $\sigma(P) = \sigma_i = (\sigma_{kl}^i)_{3 \times 3}$ ,  $\sigma_{kl}^i = \sigma_{lk}^i$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $l = \overline{1, 3}$ ,  $a(P) = a_i$ ,  $b(P) = b_i$ ,  $c(P) = c_i$ . Количество подобластей  $N$  будет определяться задаваемой точностью аппроксимации.

В подобластях  $\Omega_i$  уравнение (1.1) преобразуется к виду:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P, t)) - a_i U_i(P, t) - b_i^2 \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial t} - c_i^2 \frac{\partial^2 U_i(P, t)}{\partial t^2} = -f_i(P, t). \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой программирования и экономической информатики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; Krizsky@bsunet.ru

<sup>2</sup>Ассистент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; nikolay\_fmfm@mail.ru

<sup>3</sup>Ассистент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; yamatovRim@yandex.ru

При  $c_i \neq 0$  в подобласти  $\Omega_i$  имеем уравнение гиперболического типа. Частными случаями такого типа уравнений являются: волновое уравнение /при  $a_i = 0$ ,  $b_i = 0$ /, описывающее распространение сейсмических, акустических волн или электромагнитных полей (ЭМП) в изоляторе; телеграфное уравнение / $a_i = 0$ ,  $b_i \neq 0$ /, моделирующее ЭМП в области однородности среды.

При  $c_i = 0$  и  $b_i \neq 0$  получим уравнения параболического типа. К таким уравнениям приводят задачи диффузии, теплопроводности, распределения квазистационарных ЭМП.

При  $c_i = 0$  и  $b_i = 0$  будем иметь уравнения эллиптического типа. Его частными случаями являются: уравнение Гельмгольца / $\sigma_i \in R$ ,  $a_i \neq 0$ /, описывающее монохроматические электромагнитные поля (ЭМП); уравнение Пуассона или Лапласа / $\sigma_i \in R$ ,  $a_i = 0$ /, к которым приводят задачи гравиметрии, электростатики, описываются распределения постоянных электрических и магнитных полей.

На участках  $\Gamma_j$  внешней границы  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^M \Gamma_j$  области  $\Omega$  зададим граничные условия, в общем случае, третьего рода:  $\alpha_j(P)(\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n}) - \beta_j(P) U_j(P, t)|_{P \in \Gamma_j} = \psi_j(P, t)$ ,  $|\alpha_j(P)| + |\beta_j(P)| \neq 0$ , которые при  $\alpha_j(P) = 0$ ,  $\beta_j(P) \neq 0$  образуют условия первого, а при  $\alpha_j(P) \neq 0$ ,  $\beta_j(P) = 0$  - второго рода. Здесь  $(\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n})$  - скалярное произведение - проекция вектора градиента функции, измененного тензором анизотропии поля,  $\sigma_j \nabla U_j(P, t)$  на направление внешнего вектора нормали к поверхности -  $\mathbf{n}$  (т.е. плотность потока поля через границу).

На бесконечно удаленной границе неограниченной подобласти  $\Omega_j$  определим граничные условия - условия регулярности - в виде:  $U_j(P, t) \rightarrow 0$ , при  $P \rightarrow \infty$ .

На границе контакта сред  $S_i \cap S_j$  различных постоянных значений тензора  $\sigma(P)$  зададим общие условия сопряжения четвертого рода:

$$U_i(P, t) - U_j(P, t)|_{P \in S_i \cap S_j} = \varphi_i(P, t); (\sigma_i \nabla U_i(P, t), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n})|_{P \in S_i \cap S_j} = \tilde{\varphi}_i(P, t)$$

со скачком поля и плотности потока. Если поле и плотность потока непрерывны на  $S_i \cap S_j$ , то следует положить  $\varphi_i(P, t) = 0$  и  $\tilde{\varphi}_i(P, t) = 0$ .

Стремление описать среду в кусочно-анизотропном приближении детальнее влечет рост количества подобластей (величины  $N$ ) и, следовательно, ведет к возрастанию сложности геометрии исследуемой области  $\Omega$  в математической модели. Это, как правило, осложняет решение задачи и на практике приводит к моделированию полей в упрощенных по геометрии областях, не отражающих в полной мере среды реальные и процессы в них протекающие.

Опишем рекуррентный алгоритм пересчета функции Грина одной задачи в функцию Грина другой задачи с меньшим количеством подобластей  $N$ . В [1] аналогичный способ использовался для решения прямых задач в изотропных кусочно-однородных средах.

В данной работе подход реализуется для стационарных эллиптических краевых задач и для нестационарных задач параболического и гиперболического типов в кусочно-анизотропных средах с симметричными положительно определенными тензорами  $\sigma_i$  в подобластях, интегральным преобразованием Лапласа приводимых к задачам эллиптического типа.

Способ вычисления полей теоретически обоснован В.Н. Кризским, программная реализация алгоритма, его апробация на задачах-примерах осуществлены Н.В. Трегубовым и Р.Р. Яматовым.

## 2. Стационарное поле в кусочно-анизотропной среде

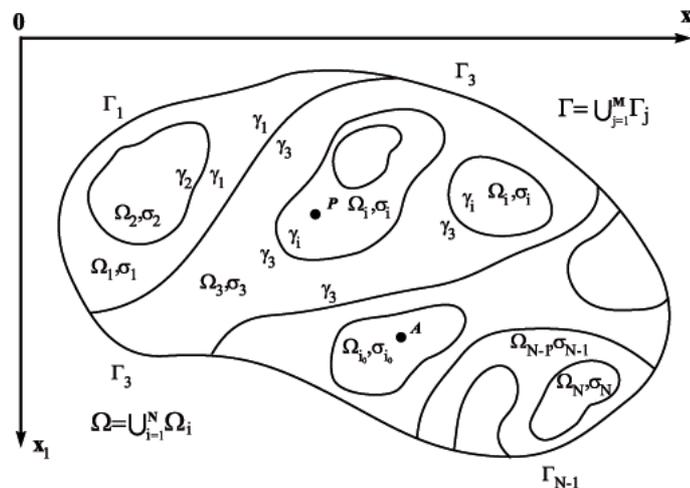
Рассмотрим кусочно-анизотропную область  $\Omega$  с внешней границей  $\Gamma$ , состоящую из подобластей  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , заполненных однородными проводящими поле объемами с постоянными симметричными положительно определенными тензорами проводимости  $\sigma_i$  (рис.2.1). Пусть  $S_i$  – граница области  $\Omega_i$ .  $S_i = \gamma_i \cup \Gamma_i$ , где  $\Gamma_i = S_i \cap \Gamma$  – внешняя часть границы, и  $\gamma_i = S_i \setminus \Gamma_i$  – внутренняя часть границы. Если область  $\Omega_i$  не имеет контакта с внешней границей  $\Gamma$ , то  $\Gamma_i = \emptyset$  и  $S_i \equiv \gamma_i$ . Математическая модель распределения поля  $U(P)$ ,  $P(x, y, z)$  имеет вид:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla U_i(P)) - a_i U_i(P) = -f_i(P), P \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \quad (2.1)$$

$$U_i(P) - U_j(P)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \varphi_i(P), (\sigma_i \nabla U_i(P), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla U_j(P), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \tilde{\varphi}_i(P), \\ i = \overline{1, N}, j \in J_i = \left\{ j \mid j = \overline{1, i-1}; \gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset \right\}; \quad (2.2)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \nabla U_i(P), \mathbf{n}) - \beta_i(P) U_i(P)|_{P \in \Gamma_i} = \psi_i(P), |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_k, k \leq N; \quad (2.3)$$

$$U_m(P) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_n, n \leq N. \quad (2.4)$$



Р и с у н о к 2.1

Кусочно-анизотропная среда в  $R^3$

Здесь  $J_i$  – множество номеров подобластей  $\Omega_j$ , граничащих с подобластью  $\Omega_i$ , и имеющих меньшие номера, чем  $i$ ;  $i_1, i_2, \dots, i_k$  – номера подобластей  $\Omega_i$ , участки границ которых являются частью внешней границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ ,  $m_1, m_2, \dots, m_N$  – номера подобластей с участками границ, уходящими в бесконечность,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе области.

Рассмотрим вспомогательную задачу с меньшим или равным, чем в исходной задаче числом кусочно-анизотропных подобластей  $N_1 \leq N$  и с точечным источником единичной интенсивности, находящемся в произвольной точке  $Q(x_q, y_q, z_q)$  области  $\Omega$ :

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q)) - \kappa_i G_i^1(P, Q) = -\delta(P - Q), P(x, y, z) \in \Omega_i, i = \overline{1, N_1}, N_1 \leq N; \quad (2.5)$$

$$G_i^1(P, Q) - G_j^1(P, Q)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, (\sigma_i \bar{\nabla} G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_j \bar{\nabla} G_j^1(P, Q), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, \\ i = \overline{1, N_1}, j \in J_i; \quad (2.6)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \bar{\nabla} G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - \beta_i(P) G_i^1(P, Q)|_{P \in \Gamma_i} = 0, |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_{k_1}, k_1 \leq k \leq N_1; \quad (2.7)$$

$$G_m^1(P, Q) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_{n_1}, n_1 \leq n \leq N_1. \quad (2.8)$$

Краевая задача (2.5)–(2.8) определяет функцию Грина в области  $\Omega$  для задачи с уравнениями эллиптического типа с оператором

$$H[U_i(P)] \equiv \operatorname{div}(\sigma_i \bar{\nabla} U_i(P)) - \kappa_i U_i(P), \kappa_i = a_i.$$

Без ограничения общности рассуждений будем считать, что функция Грина  $G^1(P, Q)$  определяется в среде, состоящей из первых  $N_1$  подобластей  $\Omega_i$ .

Если  $N_1 = N$ , то решение задачи (2.1)–(2.4) имеет вид:

$$U(P) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \sum_{i=1, j \in J_i}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) - \tilde{\varphi}_i(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \\ + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q},$$

где  $l_1$  – номера участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия второго или третьего рода при  $\alpha_{l_1}(P) \neq 0$ , а  $l_2$  – номера участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия первого рода (при  $\alpha_{l_2}(P) = 0, \beta_{l_2}(P) \neq 0$ ).

Если  $N_1 < N$ , то рассмотрим для каждой подобласти  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  формулу Остроградского, справедливую для симметричных тензоров  $\sigma_i$ :

$$\int_{\Omega_i} (V(Q)H[U_i(Q)] - U_i(Q)H[V(Q)]) d\Omega_{iQ} = \\ = \int_{S_i} (V(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} U_i(Q), \mathbf{n}) - U_i(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} V(Q), \mathbf{n})) dS_{iQ}. \quad (2.9)$$

Подставив в (2.9) вместо функции  $V(Q)$  функцию Грина  $G^1(P, Q)$ , определяемую решением граничной задачи (2.5)–(2.8), получим интегральное представление Грина решения краевой задачи (2.1)–(2.4) в области  $\Omega_i$ :

$$\nu_i U_i(P) = \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ + \int_{\gamma_i} (G^1(P, Q)(\sigma_i \bar{\nabla} U_i(Q), \mathbf{n}) - U_i(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n})) d\gamma_{iQ} + \\ + \begin{cases} \int_{\Gamma_i} \frac{\psi_i(Q)}{\alpha_i(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{iQ}, & \alpha_i(Q) \neq 0 \\ \int_{\Gamma_i} \frac{\psi_i(Q)}{\beta_i(Q)} (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{iQ}, & \alpha_i(Q) = 0 \end{cases}, \nu_i = \begin{cases} 1, & P \in \Omega_i \setminus S_i, \\ 1/2, & P \in S_i, \\ 0, & P \notin \Omega_i \cup S_i. \end{cases} \quad (2.10)$$

Если же  $\Gamma_i = \emptyset$ , то последнее слагаемое в формуле (2.10) отсутствует. Если  $\Gamma_i$  – есть участок бесконечно удаленной внешней границы, то из условий (2.4), (2.8) интегралы равны нулю.

Просуммировав формулы (2.10) по  $i$  от 1 до  $N$ , с учетом граничных условий (2.2) и (2.6), получим интегральное представление решения задачи (2.1)–(2.4):

$$\begin{aligned} \nu U(P) = & \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_{i\gamma_i \cap \gamma_j}} \int U_i(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \\ & + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}, \nu = \begin{cases} 1, & P \in \Omega \setminus \Gamma, \\ 1/2, & P \in \Gamma, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

из которого следует, что решение исходной задачи (2.1)–(2.4) может быть получено в любой точке  $P$  кусочно-анизотропной области  $\Omega$ , если будет определено решение задачи (2.5)–(2.8) – функция Грина  $G^1(P, Q)$  – и будут известны граничные значения функции на внутренних границах подобластей, не вошедших в задачу для функции Грина. Здесь  $\mathbf{n}_Q$  – вектор внешней нормали в точке  $Q$ , направленный на внутренних границах  $\gamma_i$  в среду с меньшим, чем  $i$  номером.

Опуская в (2.11) точку  $P$  на каждую из таких границ и учитывая первое условие (2.2), получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных граничных значений вида:

$$\begin{aligned} U_i(P) - & \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_{i\gamma_i \cap \gamma_j}} \int U_i(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} = \\ = & -\frac{1}{2} \varphi_i(P) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \\ & + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь  $P \in \gamma_l, l \in J_k, k = \overline{N_1+1, N}, Q \in \gamma_j, j \in J_i, i = \overline{N_1+1, N}$ .

Отметим, что задача (2.5)–(2.8) для функции Грина аналогична исходной задаче, но имеет более простой вид. В ней граничные условия – однородны, а число кусочно-однородных подобластей  $N_1$  меньше, чем в исходной задаче ( $N_1 < N$ ). Следовательно, для решения задачи (2.5)–(2.8) снова может быть применен описанный выше метод интегральных представлений и интегральных уравнений, в котором вторая функция Грина будет строиться для области с количеством подобластей  $N_2 < N_1$ , а расчетные формулы, с учетом однородности задачи, также будут вида (2.11), (2.12). Обобщая,

получим расчетные формулы для функции Грина на рекуррентном шаге с номером  $n$ :

$$G^n(P, Q) = \sum_{i=N_{n+1}+1}^{N_n} \sum_{j \in J_{i\gamma_i \cap \gamma_j}} \int G_i^n(\tilde{Q}, Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \nabla G^{n+1}(P, \tilde{Q}), \mathbf{n}_{\tilde{Q}}) d\gamma_{i\tilde{Q}} + G^{n+1}(P, Q); \quad (2.13)$$

$$G^n(P, Q) - \sum_{i=N_{n+1}+1}^{N_n} \sum_{j \in J_{i\gamma_i \cap \gamma_j}} \int G_i^n(\tilde{Q}, Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \nabla G^{n+1}(P, \tilde{Q}), \mathbf{n}_{\tilde{Q}}) d\gamma_{i\tilde{Q}} = G^{n+1}(P, Q); \quad (2.14)$$

$$P \in \gamma_l, l \in J_k, k = \overline{N_{n+1} + 1, N_n}, \tilde{Q} \in \gamma_j, j \in J_i, i = \overline{N_{n+1} + 1, N_n}.$$

Таким образом, алгоритм позволяет варьировать вмещающее пространство от исходного сложно-построенного ( $N_1 = N$ ) до однородного ( $N_1 = 1$ ). Понижение возможно осуществить до такого  $N_r$  ( $N_r < \dots < N_2 < N_1 < N$ ), для которого задача для функции Грина будет иметь решение аналитическое или программно реализованное численное.

В прямом ходе алгоритма на каждом рекуррентном шаге:

1. производится выбор подобластей, которые будут считаться включениями (по внутренним границам которых будут сформированы интегральные уравнения);

2. формулируется вспомогательная (более простого вида) задача для функции Грина во вмещающем пространстве без включений;

3. строится интегральное представление вида (2.11) на нулевом шаге или вида (2.13) – на последующих шагах;

4. формируется система интегральных уравнений вида (2.12) на нулевом шаге, для на последующих шагов – вида (2.14).

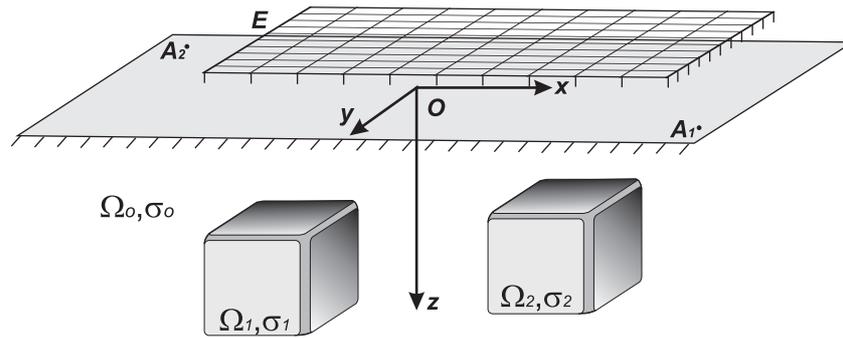
Обратный ход алгоритма заключается в вычислении искомой функции.

С другой стороны, предложенный выше алгоритм позволяет усложнять математическую модель, так как область, для которой получено решение прямой задачи, может быть принята за вмещающее пространство более сложной области, т.е. математическая модель может быть дополнена новым включением (новой подобластью  $\Omega_{N+1}$ ) со своими физическими параметрами и, следовательно, своими  $\sigma_{N+1}$ ,  $a_{N+1}$ . К новой задаче применимы аналогичные интегральные формулы.

Формулы (2.11), (2.12) упрощаются для ряда частных случаев: при наличии однородных граничных условий вида (2.2), когда  $\varphi_i(P) = 0$  и  $\tilde{\varphi}_i(P) = 0$ , и/или (2.3), при  $\psi_i(P) = 0$ ; при точечном источнике поля в точке  $A \in \Omega$  постоянной интенсивности  $I = const$ , т.е. когда  $f(P) = I \cdot \delta(P - A)$ .

Расчетные формулы (2.11), (2.12) остаются верными и для задач с операторами  $div(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P))$ . Для этого в задаче (2.1)-(2.4) следует положить  $a_i = 0, i = \overline{1, N}$ . Более того, если это необходимо для исследователя, в ряде подобластей поле может подчиняться уравнениям с оператором  $div(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P)) - a_i U_i(P)$ , а в остальных – уравнениям с оператором  $div(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P))$ .

Если предположить, что тензоры – есть матрицы диагональные с одинаковыми значениями компонент диагонали, т.е. что среда кусочно-однородна, то формулы (2.11), (2.12) порождают соответствующие формулы работы [1].

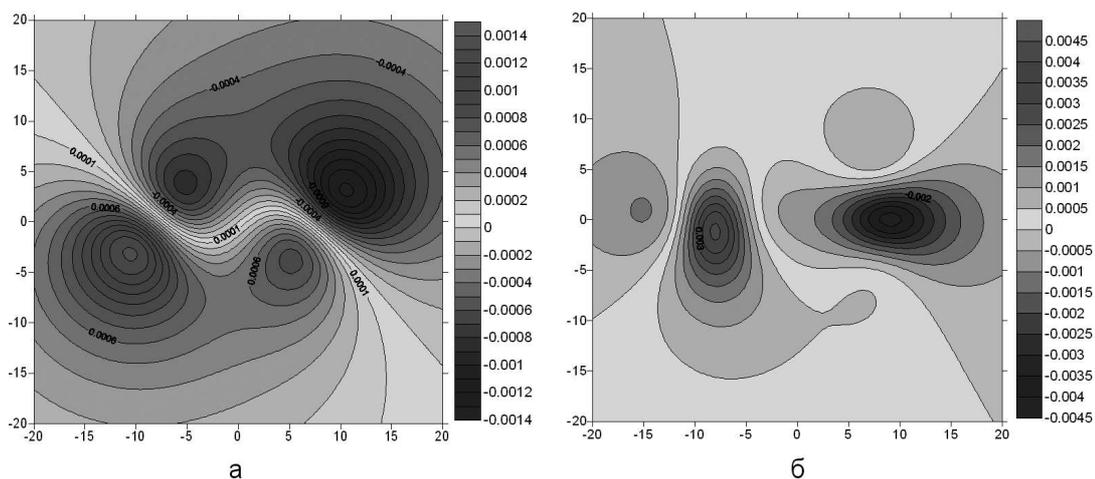


Р и с у н о к 2.2

Полупространство с кубическими включениями

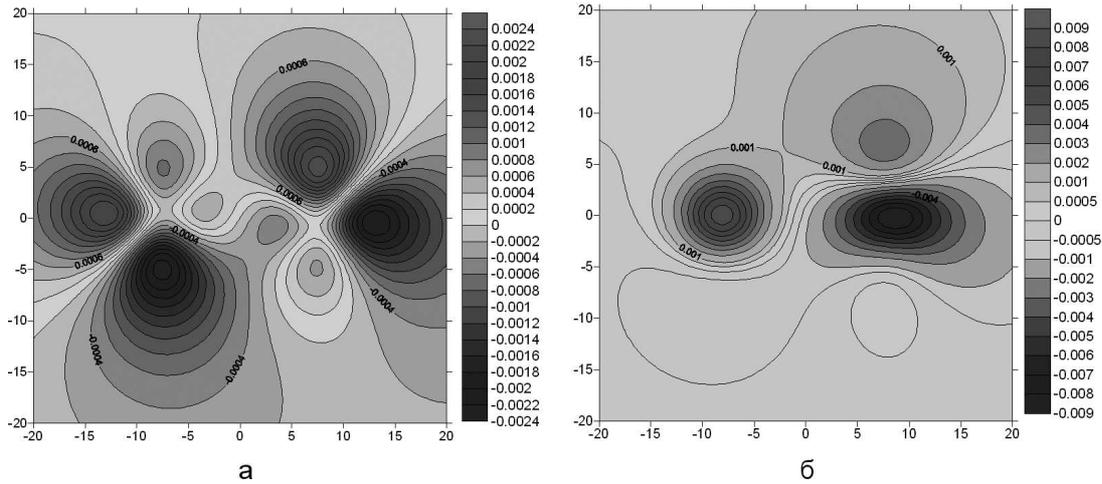
Алгоритм, изложенный выше, программно реализован. На рис.2.3а приведены изолинии аномального потенциала постоянного электрического тока от двух точечных источников силы  $I_1 = +1$  А,  $I_2 = -1$  А с координатами  $A_1(40, 40, 0)$  и  $A_2(-40, -40, 0)$  соответственно, вычисленного по алгоритму, изложенному выше, на площадке  $E = \{x \in (-20, 20), y \in (-20, 20), z = 0\}$  «дневной» поверхности *однородного* полупространства удельной электрической проводимости  $\sigma_0 = 0.01$  См/м в присутствии двух *однородных* тел – кубов со стороной 4 м с координатами центров  $O_1(-8, 0, 6)$  м,  $O_2(8, 0, 6)$  м, гранями, параллельными координатным плоскостям и одинаковыми удельными электрическими проводимостями  $\sigma^1 = 0.02$  См/м и  $\sigma^2 = 0.02$  См/м (см. рис.2.2). Сравнение с данными ЦГЭМИ ИФЗ РАН (П.Н. Александров) и результатами вычислений с использованием программного комплекса, реализующего алгоритмы в [1], показало эффективность предлагаемого способа (относительная погрешность менее 1%).

На рис.2.3б показано аномальное поле, когда кубические включения в *однородном* полупространстве анизотропны, с ненулевыми коэффициентами проводимости вдоль осей системы координат ( $\sigma_{11}^1 = 4\sigma_{22}^1 = 4\sigma_{33}^1 = \sigma_{22}^2 = 0.02$  См/м,  $\sigma_{33}^2 = \sigma_{33}^1 = 0.03$  См/м).



Р и с у н о к 2.3

Аномальное поле диполя над кубическими включениями в однородном полупространстве, В.  
 а) однородные включения, б) анизотропные включения.



Р и с у н о к 2.4

Аномальное поле диполя над кубическими включениями в анизотропном полупространстве, В.  
 а) однородные включения, б) анизотропные включения.

На рис.2.4 для геометрически такой же среды демонстрируются аномальные поля в случае *однородных* (рис.2.4а) и *анизотропных* (рис.2.4б) кубических включений с проводимостями  $\sigma^1 = 0.02$  См/м и  $\sigma^2 = 0.02$  См/м и  $\sigma_{11}^1 = 4\sigma_{22}^1 = 4\sigma_{33}^1 = \sigma_{22}^2 = 0.02$  См/м,  $\sigma_{33}^1 = \sigma_{33}^2 = 0.03$  См/м соответственно в *анизотропном* полупространстве с тензором проводимости вида  $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{pmatrix}$ .

### 3. Нестационарное поле в кусочно-анизотропной среде

Рассмотрим, как более общий, случай, когда математическая модель распространения поля представлена начально-краевой задачей для уравнений гиперболического типа. Математическая модель распределения поля  $U(P, t)$ ,  $P(x, y, z)$  имеет вид:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla U_i(P, t)) - a_i U_i(P, t) - b_i^2 \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial t} - c_i^2 \frac{\partial^2 U_i(P, t)}{\partial t^2} = -f_i(P, t), P \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \quad (3.1)$$

$$U_i(P, t) - U_j(P, t)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \varphi_i(P, t), (\sigma_i \nabla U_i(P, t), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \tilde{\varphi}_i(P, t), \\ i = \overline{1, N}, j \in J_i = \{j | j = \overline{1, i-1}; \gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset\}; \quad (3.2)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \nabla U_i(P, t), \mathbf{n}) - \beta_i(P) U_i(P, t)|_{P \in \Gamma_i} = \psi_i(P, t), |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_k, k \leq N; \quad (3.3)$$

$$U_m(P, t) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_n, n \leq N; \quad (3.4)$$

$$U_i(P, 0) = \tau_i(P), \frac{\partial U_i(P, 0)}{\partial t} = \mu_i(P), i = \overline{1, N}; \quad (3.5)$$

Здесь сохранены обозначения раздела 2.

Применим интегральное преобразование Лапласа [2]  $U^\omega(P) = \int_0^\infty U(P, t)e^{-\omega t} dt$  к задаче (3.1)-(3.5) с формулой обращения

$$U(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_0 - i\infty}^{\omega_0 + i\infty} U^\omega(P) e^{\omega t} d\omega, \operatorname{Re} \omega = \omega_0 > 0. \quad (3.6)$$

Контуром интегрирования в (3.6) является прямая  $\operatorname{Re} \omega = \omega_0 > 0$ , параллельная мнимой оси.

Умножая (3.1)-(3.5) на  $e^{-\omega t}$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получим однопараметрическое (по  $\omega$ ) семейство эллиптических краевых задач:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P)) - \kappa_i U_i^\omega(P) = -\Phi_i^\omega(P), i = \overline{1, N}; \quad (3.7)$$

$$U_i^\omega(P) - U_j^\omega(P)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \varphi_i^\omega(P), (\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P), \mathbf{n}) - (\sigma_j \bar{\nabla} U_j^\omega(P), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \tilde{\varphi}_i^\omega(P), \\ i = \overline{1, N}, j \in J_i; \quad (3.8)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P), \mathbf{n}) - \beta_i(P) U_i^\omega(P)|_{P \in \Gamma_i} = \psi_i^\omega(P), |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_k, k \leq N; \quad (3.9)$$

$$U_m^\omega(P) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_n, n \leq N \quad (3.10)$$

с операторами  $H[U_i^\omega(P)] \equiv \operatorname{div}(\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P)) - \kappa_i U_i^\omega(P)$ ,  $\kappa_i = a_i + \omega b_i^2 + \omega^2 c_i^2$  и функциями  $\Phi_i^\omega(P) = (b_i^2 + \omega c_i^2)\tau_i(P) + c_i^2 \mu_i(P) + f_i^\omega(P)$  в подобластях  $\Omega_i$ .

Для такого типа задач, применяя подход, описанный выше, в части 2 статьи, может быть получено интегральное представление решения:

$$\nu U^\omega(P) = \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_{\gamma_i \cap \gamma_j}} \int U_i^\omega(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \Phi_i^\omega(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i^\omega(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i^\omega(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \quad (3.11) \\ + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}^\omega(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}^\omega(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}, \nu = \begin{cases} 1, & P \in \Omega \setminus \Gamma, \\ 1/2, & P \in \Gamma. \end{cases}$$

Граничные значения функции  $U_i^\omega(Q)$  находятся как решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$U_i^\omega(P) - \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_{\gamma_i \cap \gamma_j}} \int U_i^\omega(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} = -\frac{1}{2} \varphi_i^\omega(P) + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \Phi_i^\omega(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i^\omega(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i^\omega(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \\ + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}^\omega(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}^\omega(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}, \quad (3.12)$$

где  $P \in \gamma_l, l \in J_k, k = \overline{N_1 + 1, N}, Q \in \gamma_j, j \in J_i, i = \overline{N_1 + 1, N}$ .

Функция Грина вместиющего пространства - есть решение задачи с меньшим, чем  $N$  числом  $N_1$  кусочно-анизотропных подобластей:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q)) - \kappa_i G_i^1(P, Q) = -\delta(P - Q), P(x, y, z) \in \Omega_i, i = \overline{1, N_1}, N_1 \leq N, \quad \kappa_i = a_i + \omega b_i^2 + \omega^2 c_i^2; \quad (3.13)$$

$$G_i^1(P, Q) - G_j^1(P, Q)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, (\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla G_j^1(P, Q), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, \quad i = \overline{1, N_1}, j \in J_i; \quad (3.14)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - \beta_i(P) G_i^1(P, Q)|_{P \in \Gamma_i} = 0, |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_{k_1}, k_1 \leq k \leq N_1; \quad (3.15)$$

$$G_m^1(P, Q) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_{n_1}, n_1 \leq n \leq N_1. \quad (3.16)$$

К задаче (3.1)-(3.5) в пространстве образов преобразования Лапласа может быть применен алгоритм пересчета функций Грина с уменьшением количества подобластей, как и в стационарном случае. Алгоритм описан в части 2.

Восстановление решения исходной задачи (3.1)-(3.5) производится по формуле обращения (3.6) преобразования Лапласа. Квадратурные узлы и квадратурные коэффициенты формулы численного обращения приведены в [3].

Часто задачу (3.1)-(3.5) формулируют для возмущений поля - отклонений поля от заданного распределения, полагая нулевыми начальные возмущения ( $\tau_i(P) = 0, \mu_i(P) = 0$ ) и однородными граничные условия (3.2)-(3.3) ( $\varphi_i(P, t) = 0, \tilde{\varphi}_i(P, t) = 0, \psi_i(P, t) = 0$ ). Это упрощает расчетные формулы (3.11) и (3.12) - в них будут отсутствовать объемные интегралы по областям  $\Omega_i$  и граничные интегралы по участкам внешней границы  $\Gamma$ .

Для прямых задач о распространении физических полей в кусочно-анизотропных средах, математическая модель которых задается начально-краевой задачей параболического типа, алгоритм и расчетные формулы (3.11) и (3.12) будут иметь место. В них следует положить коэффициенты  $c_i = 0, i = \overline{1, N}$ . Это изменит функции  $\Phi_i^\omega(P) = b_i^2 \tau_i(P) + f^\omega(P)$  - в них исчезнет зависимость от скорости физической величины в начальный момент времени - функции  $\mu_i(P)$ . Коэффициенты  $\kappa_i$  в подобластях  $\Omega_i$  в задачах (3.1)-(3.5) и (3.7)-(3.10) при этом будут иметь вид  $\kappa_i = a_i + \omega b_i^2$ .

Как частный случай могут быть получены формулы расчета стационарных полей в кусочно-анизотропных средах, выведенные в ч.2 статьи, если в формулах (3.11) и (3.12) положить  $b_i = 0, c_i = 0, i = \overline{1, N}$ .

Более того, если математическая модель задачи распространения физического поля в кусочно-анизотропной среде с симметричными положительно определенными тензорами представлена начально-краевой задачей смешанного типа, т.е. когда расчетная область  $\Omega$  разбивается на три группы подобластей, в первой из которых тип уравнений эллиптический, во второй - параболический, а в третьей - гиперболический, то приведенные выше алгоритм и расчетные формулы остаются верными. В этом случае в расчетных формулах в каждой подобласти необходимо обнулить свой набор коэффициентов  $a_i, b_i, c_i$ .

#### 4. Выводы

Рассмотрен класс математических моделей с кусочно-постоянными функциональными коэффициентами в уравнениях эллиптического, параболического, гиперболического и смешанного типов, описывающих различные по своей природе поля в кусочно-анизотропных средах, широко используемые в физике. Для решения задач предложен единый подход, основанный на методах интегральных представлений и интегральных уравнений, допускающий построение рекуррентных алгоритмов и рекурсивных процедур пересчета функций Грина с уменьшением количества подобластей разбиения исследуемой области. Единство подхода к решению разных по типу задач позволяет использовать единый программный комплекс вычисления физических полей различной природы. При комплексировании физических методов это позволит сократить затраты на вычисления.

Алгоритмы распараллеливаются, что существенно при решении прямых и особенно обратных вариационных (на основе прямых) задач высокой вычислительной трудоемкости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кризский В.Н. О способе вычисления геофизических полей в кусочно-однородных средах // Физика Земли. 2009. №10. – 25-37 с.
2. Дёч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука. 1971. – 288 с.
3. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука. 1966. –370 с.

---

# Method of Calculation of Potential Physical Fields in Piecewise Anisotropic Media

© V .N. Krizsky<sup>4</sup>, N. V. Tregubov<sup>5</sup>, R. R. Yamatov<sup>6</sup>

**Abstract.** On the base of recalculation of Green function to another more simple one recurrent algorithms for solution 3D problem for potential physical fields in piecewise anisotropic media were build. The method for problem with different equations of elliptic, parabolic, hyperbolic, and mixed type allows us to complex different physical investigations. Algorithms can be vectorize and realize for multiprocess system.

**Key Words:** potential physical field, boundary problem, integral presentation and integral transformation method, Green function.

---

<sup>4</sup>Head of programming and economic informatics Chair, Bashkortostan State University, Ufa; krizsky@bsunet.ru

<sup>5</sup>Assistant Chair of mathematical modelling, Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak; nikolay\_fmfm@mail.ru

<sup>6</sup>Assistant Chair of mathematical modelling, Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak; yamatovRim@yandex.ru

УДК 539.192

## Методы высокоточной оптимизации базисных функций в расчётах аналитических ХФ-орбиталей атомов с открытыми оболочками одинаковой симметрии

© Ю. Б. Малыханов<sup>1</sup>, И. Н. Ерёмкин<sup>2</sup>, С. В. Евсеев<sup>3</sup>

**Аннотация.** Предложенный ранее алгоритм высокоточной оптимизации базисных функций в расчётах аналитических хартри-фоковских орбиталей атомов с открытыми оболочками обобщен на случай систем с открытыми оболочками одинаковой симметрии. С использованием орбитальных экспонент атомных орбиталей слэтеровского типа, оптимизированных с высокой точностью методами минимизации первого и второго порядков, выполнены расчёты энергий атомов с двумя открытыми  $s$ -оболочками одинаковой симметрии в рамках атомной теории Рутана—Хартри—Фока.

**Ключевые слова:** атомная орбиталь, метод Хартри—Фока, энергия, атом, открытая оболочка.

### 1. Введение

В расчётах электронных оболочек атомов с несколькими открытыми оболочками различной симметрии наибольшее распространение получила атомная теория Рутана—Хартри—Фока (метод Рутана—Багуса) [1]. Уравнения этого метода выводятся на основе формулы для энергии атома, записанной в терминах параметров Слэтера—Кондона. Радиальные функции ищутся в аналитическом виде в форме разложения по функциям заданного вида — атомным орбиталям (АО). Решение уравнений самосогласованного поля (ССП) в этом случае сводится к решению двух взаимосвязанных задач: непосредственно решению уравнений СПП для орбитальных коэффициентов на основе того или иного итерационного метода и нахождению оптимального базисного набора АО, позволяющего получить хартри-фоковский предел рассчитываемых характеристик атома. В работах [2]—[4] показано, что метод Рутана—Багуса, изначально сформулированный для расчёта атомов с несколькими открытыми оболочками различной симметрии [1], удаётся переформулировать для расчёта атомов с открытыми оболочками одинаковой симметрии (на примере триплетного  $^3S$ -терма атомов в конфигурации  $ns^1n's^1$ ). Данная в работе [4] формулировка метода Рутана—Багуса допускает дальнейшее обобщения на другие конфигурации открытых оболочек одинаковой симметрии. Такие конфигурации для ряда атомов отвечают возбуждённым состояниям и представляют большой практический интерес.

<sup>1</sup>Профессор кафедры физики и МОФ, Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск; malukhanov@mail.ru

<sup>2</sup>Старший преподаватель кафедры физики и МОФ, Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск; eryomkin@mail.ru

<sup>3</sup>Аспирант кафедры физики и МОФ, Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск; evsey2006@ya.ru

## 2. Уравнения самосогласованного поля Хартри—Фока для атомов с открытыми оболочками одинаковой симметрии

Энергию атома в одноэлектронном приближении для произвольной конфигурации можно представить в виде [3]

$$\begin{aligned}
 E = E_{co} + E_o = & \sum_{i\lambda}^{c+o} N_{i\lambda} I(i\lambda) + \frac{1}{2} \sum_{i\lambda, j\mu}^{c+o} N_{i\lambda} N_{j\mu} \left\{ F^0(i\lambda, j\mu) - \frac{1}{2} \sum_{k=|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} A_{\lambda\mu k} G^k(i\lambda, j\mu) \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i\lambda, j\mu}^o \left\{ \sum_{k=|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} \left[ \frac{1}{2} N_{i\lambda} N_{j\mu} A_{\lambda\mu k} + g_k(i\lambda, j\mu) \right] G^k(i\lambda, j\mu) + \sum_{k>0}^{2(\lambda, \mu) <} f_k(i\lambda, j\mu) F^k(i\lambda, j\mu) \right\} + \\
 & + \sum_{i\lambda}^o \left\{ \frac{1}{2} N_{i\lambda} \left( \frac{1}{2} N_{i\lambda} A_{\lambda\lambda 0} - 1 \right) F^0(i\lambda, i\lambda) + \sum_{k>0}^{2\lambda} \left[ \frac{1}{4} N_{i\lambda}^2 A_{\lambda\lambda k} + f_k(i\lambda, i\lambda) \right] F^k(i\lambda, i\lambda) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Это выражение является самым общим. На его основе можно рассмотреть различные частные случаи конфигураций с открытыми оболочками. Случай открытых оболочек различной симметрии детально рассмотрен в [2],[3]. В работе [4] рассмотрен случай открытых оболочек одинаковой симметрии.

Если в конфигурации атома содержатся открытые оболочки одинаковой симметрии, то в методе Рутана—Багуса вместо коэффициентов векторной связи  $J_{\lambda\mu k}$  и  $K_{\lambda\mu k}$  [1]—[3] в энергии открытых оболочек  $E_o$  необходимо ввести коэффициенты более сложного вида  $J_{i\lambda, j\mu}^\nu$  и  $K_{i\lambda, j\mu}^\nu$ , предложенные в [4], где индексы  $i$  и  $j$  можно трактовать как номера оболочек типа  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно

$$E_o = - \sum_{i\lambda, j\mu} \frac{1}{2} N_{i\lambda} N_{j\mu} \left[ \sum_{\nu=0}^{2(\lambda, \mu) <} J_{i\lambda, j\mu}^\nu F^\nu(i\lambda, j\mu) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} K_{i\lambda, j\mu}^\nu G^\nu(i\lambda, j\mu) \right]. \tag{2.2}$$

С учётом этого выражение для энергии в методе Рутана—Багуса в алгебраическом приближении в терминах орбитальных коэффициентов  $C_{pi}^\lambda$  будет

$$\begin{aligned}
 E = E_{co} + E_o = & \sum_{\lambda}^{c+o} \sum_i^{n^\lambda} \sum_{p,q} N^{i\lambda} C_{pi}^{\lambda*} C_{qi}^\lambda \left\{ H_{pq}^\lambda + \frac{1}{2} \sum_{\mu}^{c+o} \sum_j^{n^\mu} N^{j\mu} \sum_{r,s} C_{rj}^{\mu*} C_{sj}^\mu \mathcal{P}_{\lambda pq, \mu rs} \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu}^o \sum_i^{n_o^\lambda} \sum_j^{n_o^\mu} N^{i\lambda} N^{j\mu} \sum_{r,s} \sum_{p,q} C_{pi}^{\lambda*} C_{qi}^\lambda \mathcal{Q}_{i\lambda pq, j\mu rs} C_{rj}^{\mu*} C_{sj}^\mu.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для сокращения записи формул здесь использованы суперматрицы, введенные в [1] и [4]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{\lambda pq, \mu rs} = & \mathcal{J}_{\lambda pq, \mu rs}^0 - \frac{1}{2} \sum_{k=|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} A_{k\lambda\mu} \mathcal{K}_{\lambda pq, \mu rs}^k, \\
 \mathcal{Q}_{i\lambda pq, j\mu rs} = & \left\{ \sum_{k=0}^{2(\lambda, \mu) <} J_{i\lambda, j\mu}^k \mathcal{J}_{\lambda pq, \mu rs}^k - \frac{1}{2} \sum_{k=|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} K_{i\lambda, j\mu}^k \mathcal{K}_{\lambda pq, \mu rs}^k \right\}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

( $\lambda$  и  $\mu$  пробегает одни и те же значения). Интегралы от радиальных частей АО  $\mathcal{J}_{\lambda pq, \mu rs}^k$  и  $\mathcal{K}_{\lambda pq, \mu rs}^k$  определены в [1].

Рассмотрим второе слагаемое в (2.3), отвечающее энергии открытых оболочек. Именно видом этого слагаемого и отличается рассматриваемый метод от классического метода Рутана—Багуса [1]. Второе слагаемое в (2.3) является самым общим, но практический интерес представляют конфигурации, содержащие несколько открытых оболочек ( $i = 1, 2, \dots$ ) одного типа ( $\lambda = \mu = L$ ). Тогда в (2.3), независимо от числа заполнения открытых оболочек ( $N_o^{i\lambda}$ ), энергия открытых оболочек одинаковой симметрии ( $\lambda = L$ ) в самом общем виде будет

$$E_o = E_o^L = \frac{1}{4} \sum_{i \subset L}^{n_o^L} \sum_{k=0}^{2L} K_{iL,iL}^k \mathbf{Sp} D_o^{iL} \mathcal{K}_{(L,L)}^k(D_o^{jL}) + \frac{1}{4} \sum_{i,j \subset L}^{n_o^L} {}'K_{iL,jL}^o \mathbf{Sp} D_o^{iL} \mathcal{K}_{(L,L)}^o(D_o^{jL}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j \subset L}^{n_o^L} {}' \sum_{k>0}^{2L} \left\{ J_{iL,jL}^k \mathbf{Sp} D_o^{iL} \mathcal{J}_{(L,L)}^k(D_o^{jL}) - \frac{1}{2} K_{iL,jL}^k \mathbf{Sp} D_o^{iL} \mathcal{K}_{(L,L)}^k(D_o^{jL}) \right\}, \quad (2.5)$$

где  $D_o^{i\lambda} = N_o^{i\lambda} \mathbf{C}_i^{\lambda*} \mathbf{C}_i^\lambda$  — матрицы плотности отдельных орбиталей открытых оболочек. В силу того, что в (2.3)  $E_o$  содержит суперматрицу  $\mathcal{Q}_{i\lambda\rho q, j\mu r s}$ , ввести матрицу плотности открытых оболочек

$$D_o^\lambda = N_o^\lambda \sum_{i \subset \lambda}^{n_o^\lambda} \mathbf{C}_i^{\lambda*} \mathbf{C}_i^\lambda \quad (2.6)$$

в общем виде (как это обычно делалось [1]–[3]) не удаётся, и случай открытых оболочек одинаковой симметрии требует специального рассмотрения для различных типов конфигураций.

В работе [4] рассмотрен один из простейших, но достаточно распространенных случаев конфигураций, содержащих заполненные и две открытые оболочки  $s$ -типа ( $ns^1 n's^1$ ). Получены уравнения для искомых матриц плотности (уравнения ССП), а также вычислены полные первая ( $dE/d\zeta_i$ ) и вторая ( $d^2E/d\zeta_i d\zeta_j$ ) производные энергии по орбитальным экспонентам  $\{\zeta_i\}$  АО, необходимые для формулировки методов высокоточной оптимизации орбитальных экспонент базисных функций.

### 3. Результаты и обсуждение

В качестве иллюстрации работоспособности развиваемого в статье метода расчёта энергии атомов с двумя открытыми оболочками одинаковой симметрии в алгебраическом приближении атомной теории Хартри—Фока нами выполнены расчёты ряда атомов в возбуждённых триплетных состояниях. Решение уравнений ССП циклическим методом выполняется с любой наперед заданной точностью без проблем. Значительно более сложной является задача оптимизации орбитальных экспонент АО слэтеровского типа. Для этих целей использовалась хорошо зарекомендовавшая себя схема: начальные значения орбитальных экспонент, выбранные достаточно произвольно, сначала оптимизировались с невысокой точностью с помощью симплексного метода Нелдера—Мида (метод нулевого порядка). Полученные таким образом орбитальные экспоненты использовались в качестве начального приближения для дальнейшего уточнения с помощью квазиньютоновского метода Муртага—Сарджента, доводя градиент  $dE/d\zeta_i$  до  $10^{-8} - 10^{-9}$ . Далее запускался метод Ньютона, с помощью которого за относительно небольшое число циклов градиент доводился до желаемой точности ( $10^{-14} - 10^{-15}$ ). Вириальное отношение выполняется с такой же точностью.

| Атом | Конфигурация                              | $-E$       | $-E^a$     |
|------|---|------------|------------|
| He   | $1s^1 2s^1$ ( $^3S$ )                     | 2.17425077 | 2.17425078 |
|      | $1s^2$ ( $^1S$ )                          | 2.86167999 | 2.86168000 |
| Be   | $1s^2 2s^1 3s^1$ ( $^3S$ )                | 14.3774923 |            |
|      | $1s^2 2s^2$ ( $^1S$ )                     | 14.5730231 | 14.5730232 |
| Ne   | $1s^2 2s^1 2p^6 3s^1$ ( $^3S$ )           | 126.910211 |            |
|      | $1s^2 2s^2 2p^6$ ( $^1S$ )                | 128.547098 | 128.547098 |
| Mg   | $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1 4s^1$ ( $^3S$ )      | 199.460145 |            |
|      | $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ ( $^1S$ )           | 199.614636 | 199.614636 |
| Ar   | $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1 3p^6 4s^1$ ( $^3S$ ) | 525.741398 |            |
|      | $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ ( $^1S$ )      | 526.817512 | 526.817513 |

Примечание:  $^a$ Энергия, рассчитанная численным решением уравнений ХФ, приводимая в [5].

Таблица 1: Энергия атомов с двумя открытыми оболочками одинаковой симметрии (а.е.)

Результаты расчётов приведены в таблице 1, в которой также приведены энергии рассмотренных атомов в основном состоянии. Последние с высокой точностью согласуются с данными численного решения уравнений Хартри—Фока для радиальных функций [5]. Расчёты показали, что с ростом числа электронов в атоме относительная доля энергии возбуждения резко падает. Как видно из таблицы, полученное нами значение энергии атома He в конфигурации  $1s^1 2s^1$  ( $^3S$ ) близко к значению, полученному путём численного решения уравнений Хартри—Фока [5]. Энергия триплетных состояний других атомов в алгебраическом приближении вычислена впервые.

#### 4. Заключение

В работе предлагается обобщение атомной теории Рутана—Хартри—Фока (метод Рутана—Багуса), на конфигурации, содержащие открытые оболочки одинаковой симметрии. Такого типа конфигурации описывают возбуждённые состояния атомов, свойства которых представляют значительный интерес для целого ряда приложений. Найдено выражение самого общего вида для вклада в энергию атома открытых оболочек одинаковой симметрии, на основе которого можно рассмотреть целый ряд конфигураций.

На примере атомов с двумя открытыми оболочками  $s$ -типа в работе [4] проиллюстрирована техника получения уравнений самосогласованного поля, а также производных энергии атома по нелинейным параметрам атомных орбиталей (орбитальным экспонентам), которые необходимы для оптимизации последних. На основе полученных уравнений выполнен расчёт энергии ряда атомов в возбуждённом триплетном состоянии с двумя открытыми оболочками  $s$ -типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roothaan C. C. J., Bagus P. S. Atomic Self-Consistent Field Calculations by the Expansion Method // Methods in Computational Physics, New York: Academic Press Inc. – 1963. – V. 2. – P. 47-94.

2. Малыханов Ю. Б., Романов С. А. Расчёты энергии возбуждённых состояний атомов с открытыми оболочками в приближении Хартри—Фока // Журн. прикл. спектр. – 2005. – Т. 72, № 3. – С. 292-299.
3. Малыханов Ю. Б., Романов С. А. Применение методов минимизации в расчётах атомов с несколькими открытыми оболочками // Журн. структ. химии. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 214-222.
4. Малыханов Ю. Б., Евсеев С. В., Ерёмкин И. Н. Метод самосогласованного поля Хартри—Фока для атомов с двумя открытыми оболочками одинаковой симметрии // Журн. прикл. спектр. – 2010. – Т. 77, № 6. – С. 805-812.
5. Tatewaki H., Koga T., Thakkar A. J. Numerical Hartree—Fock energies of low-lying excited states of neutral atoms with  $Z \leq 18$  // J. Chem. Phys. – 1994. – V. 101. – P. 4945-4948.

---

# Methods of high-precision optimization of basis functions in calculating the analytical HF-orbitals of atoms with open-shells of identical symmetry

© Yu. B. Malykhanov<sup>4</sup>, I. N. Eryomkin<sup>5</sup>, S. V. Evseev<sup>6</sup>

**Abstract.** The algorithm of high-precision optimization of basis functions suggested previously for calculating the analytical Hartree–Fock orbitals of open-shells atoms is generalized to open-shells systems of identical symmetry. With the use of orbital exponents of Slater-type atomic orbitals optimized with high accuracy by methods of minimization of the first and second orders energy values for atoms with two open shells of  $s$ -type of identical symmetry are calculate within the limits of Roothaan–Hartree–Fock atomic theory.

**Key Words:** atomic orbital, Hartree–Fock method, energy, atom, open shell.

---

<sup>4</sup>Professor, M. E. Evsev'ev Mordovian State Pedagogical Institute, Saransk; malykhanov@mail.ru

<sup>5</sup>Senior teacher, M. E. Evsev'ev Mordovian State Pedagogical Institute, Saransk; eryomkin@mail.ru

<sup>6</sup>Postgraduate student, M. E. Evsev'ev Mordovian State Pedagogical Institute, Saransk; evsey2006@ya.ru

УДК 517.9

## Об исследовании динамических моделей социально-экономических систем на устойчивость по части переменных

© Т. Ф. Мамедова<sup>1</sup>, А. А. Ляпина<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе приведены примеры исследования нелинейных динамических моделей экономических систем на устойчивость и стабилизацию по части переменных

**Ключевые слова:** системы обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотическая устойчивость по части переменных, эталонная функция сравнения, экономическая система.

Математика всегда с успехом применялась и применяется во всех областях хозяйственной деятельности. В экономике она используется не просто для проведения различного рода расчетов, а для изучения экономических закономерностей, получения новых теоретических выводов, нахождения наилучших экономических решений. Задачи, решаемые экономической наукой, делятся в зависимости от учета фактора времени, на статические и динамические. Статика изучает состояния экономических объектов, относящиеся к определенному моменту или периоду времени, без учета изменения их параметров во времени. В динамических задачах отражается не только зависимость переменных, но и их взаимосвязи во времени. Например, динамика инвестиций определяет динамику величин основного капитала, что в свою очередь является важным фактором изменения объема выпуска.

Таким образом, вся экономическая система распадается на взаимосвязанные подсистемы с различными временными взаимодействиями и поэтому, устойчивость всей экономической системы определяется на основе совокупности свойств ее подсистем и природе их взаимодействия.

Основной целью данной работы является исследование нелинейных динамических моделей экономических систем с помощью математического аппарата, разработанного Е.В.Воскресенским [1],[2].

Экономические системы в Хикс-Метцлеровской алгебраической постановке рассматриваются в статье Сильяка [3], и для их исследования используется метод сравнения и вектор функции Ляпунова. В данной работе эта же задача решается методом сравнения Воскресенского, когда эталонная функция сравнения не обязательно является экспоненциальной, чем обеспечивается снятие части ограничений на правую часть уравнения, по сравнению с предыдущим подходом к этому вопросу.

Рассмотрим экономическую систему  $S$ , которая состоит из взаимосвязанных и взаимозависимых между собой в различное время подсистем. Стабильность всей экономической системы определяется на основе совокупности стабильности ее подсистем и природе их взаимодействия.

Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; mamedova@math.mrsu.ru.

<sup>2</sup>Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; lyapina@e-mordovia.ru.

описывает экономическую систему  $S$ , где  $x(t) \in R^n$  - есть состояние экономики,  $f(t, x) \in C^{0,1}(T \times R^n, R^n)$ , и решение  $x(t : t_0, x_0)$  уравнения (1.1) существует для всех начальных условий  $(t_0, x_0) \in T \times R^n$  и  $t \in T_0$ . Здесь  $T$  - интервал времени  $(\tau, +\infty)$ , где  $\tau$  есть число или символ  $-\infty$ , и  $T_0 = [t_0, +\infty)$ . В экономическом анализе обычно предполагают, что состояние  $x$  экономической системы  $S$  является неотрицательным вектором, т.е.  $x \in R_+^n = \{x \in R^n : x \geq 0\}$ . Предположим так же, что уравнение (1.1) имеет решение  $x(t) \equiv 0$  и  $x = 0$  - является единственным состоянием равновесия экономической системы, описываемой дифференциальным уравнением (1.1). Все результаты сформулируем относительно этого решения при  $\overline{M_0} = N$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = A(t)y. \quad (1.2)$$

Пусть для уравнений (1.1) и (1.2) выполнены некоторые основные условия:

$$N = \{1, 2, \dots, n\}, N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N, R_0 = \{x : x \in R^n, x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)\}, x_j = 0, j \neq \overline{M_0}$$

$$|f_j(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \lambda_j(t, |x_{j1}|, \dots, |x_{jq}|), \forall j \subseteq N, \{j_1, \dots, j_q\} \subseteq M_0;$$

$$\lambda_j : [T, +\infty) \times R_+^q \rightarrow R_+^1, R_+^1 = [0, +\infty), \lambda_j \in C([T, +\infty) \times R_+^q),$$

$$\lambda_j(t, r_1, \dots, r_i, \dots, r_q) \leq \lambda_j(t, \overline{r}_1, \dots, \overline{r}_i, \dots, \overline{r}_q), r_i \leq \overline{r}_i, i = \overline{1, q} \text{ при всех } t \in [T, +\infty).$$

$$Y(t) = (y_{ij}(t)), i, j = \overline{1, n}, t_0 [T_0, +\infty), T_0 \geq T, Y^{-1}(t) = (y^{ij}(t)), i, j = \overline{1, n},$$

$$\mu_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1, m_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1, R_+^1 = [0, +\infty),$$

$$\mu_i \geq \max |y_{ij}(t)|, T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty, i \in M_0, \text{ если } N_0 \neq 0, j \in N_0 \text{ и}$$

$$\mu_i(t) \geq 0, \text{ если } N_0 = 0, i \in M_0, m_i(t) \geq \max\{\max |y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\}, T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty, i \in M_0,$$

$$J_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^t \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(r) f_j(r, \varphi(r)) dr - \int_t^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(r) f_j(r, \varphi(r)) dr. \quad (1.3)$$

Тогда справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.1.** Пусть уравнения (1.1) и (1.2) асимптотически эквивалентны по Брауэру, условие (1.3) имеет место равномерно относительно  $0 < c < +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $\frac{J_i(t, c)}{\mu_i(t)} \rightarrow 0$  равномерно по при  $c \rightarrow 0, \mu_i(t) \rightarrow 0, \forall t \in [T, +\infty), \forall i \in M_0$ . Тогда для того, чтобы тривиальное решение уравнения (1.1) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по части переменных, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1.2) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по той же части переменных.

Данная теорема позволяет анализировать структурную устойчивость моделей экономических процессов по части переменных и делать выводы об устойчивости экономических процессов на основе совокупности свойств устойчивости подсистем и природе их взаимодействия.

**Пример 1.1.** Рассмотрим замкнутую экономику, т.е. экономику без внешних обменов, и выделим в ней экономических агентов: производство, население, государство, банковская система. Предполагается, что все экономические агенты находятся в рыночных отношениях совершенной конкуренции. Каждый из них обменивается продуктами и ресурсами посредством купли-продажи на рынках по ценам, которые складываются в результате взаимодействия совокупного спроса и предложения товаров. Ни один экономический агент не в состоянии в одиночку воздействовать на цены, но каждый из агентов по сложившимся ценам может реализовать свое предложение и удовлетворить свой платежеспособный спрос. Таким образом, объем продаж ограничен только совокупным платежеспособным спросом. На всех рынках экономические агенты расплачиваются одними и теми же платежными средствами.

Теперь рассмотрим поведение и отношения экономических агентов подробнее, чтобы замкнуть систему уравнений.

Будем считать, что нет спекулятивного спроса экономических агентов на банкноты, количество наличных банкнот в обращении не изменяется.

Рассмотрим систему балансовых уравнений: уравнение изменения мощностей и уравнение изменения запаса, где  $x_1$  новые мощности, а  $x_2$  поток платежей:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \frac{x_1 |\sin x_1|}{e^t} \end{cases} \quad (1.4)$$

и соответствующую ей систему однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Фундаментальная матрица решений системы (1.5) и обратная к ней имеют вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}; \quad Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix}.$$

Множество  $N = \{1, 2\}$ ,  $\bar{M}_0 = N$ ,  $M_0 = \{1\}$ , так как

$$\|f_2(t, x)\| \leq \frac{x_1 |\sin x_1|}{e^t} \leq \frac{|x_1|}{e^t} = \lambda_2(t, |x_1|),$$

Найдем  $\mu_i$  и  $m_i$ ,  $i \in M_0$ ,  $\mu_1(t) = e^t$ ,  $m_1 = \max\{e^t, e^t\} = e^t$ .

Проверим условие (1.3):  $B = N - M = \{1\}$ ,  $|\varphi_1| \leq cm_1(t)$ ,

$$|J_1(t, \varphi)| \leq \int_{t_0}^t y_{11} y^{11} f_1(s, \varphi(s)) ds + \int_{t_0}^t |y_{11} y^{21}| f_2 ds + \int_t^{+\infty} (|y_{12} y^{12}| f_1 + |y_{12} y^{22}| f_2) ds = 0,$$

$$|J_2(t, \varphi)| \leq \int_{t_0}^{+\infty} |e^{-t} e^s| \frac{ce^{-s}}{e^s} ds;$$

Отсюда видно, что  $J_1, J_2$  существуют и несобственные интегралы сходятся,  $J_2(t, \varphi) = o(\mu_2(t))$ ,  $t \rightarrow +\infty$

Все решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = e^{-t} z,$$

определены  $\forall t_0 \geq 0, z_0 \in R_{+\infty}^1$ .

Поэтому, так как система уравнений (1.5) не устойчива по переменной  $y_1$ , то тривиальное решение системы (1.4) также не устойчиво по переменной  $x_1$ .

**Пример 1.2.** Рассмотрим систему уравнений запаса продукта в торговле. Торговля скупает у производства весь производственный продукт  $x_3$  и продает для личного и общественного потребления населению и государству, соответственно в количестве  $x_2$ , для возмещения выбытия и создания новой мощности производству  $x_1$ .

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_1}{e^t}. \end{cases} \quad (1.6)$$

и соответствующую ей систему однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Фундаментальная матрица имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Множество  $N = \{1, 2, 3\}$ ,  $\bar{M}_0 = N$ ,  $M_0 = \{1\}$ , так как

$$|f_3(t, x)| \leq \left| \frac{x_1}{e^t} \right| \leq \frac{|x_1|}{e^t} = \lambda_3(t, |x_1|).$$

поэтому  $M_0 = 1$ . Эталонные функции сравнения имеют вид  $\mu_1(t) = e^{-t}$ ,  $m_1 = e^{-t}$ .

Условие (1.3) выполняется, так как

$$J_1(t, \varphi) \leq \int_{t_0}^t (|0 * 0| \frac{ce^{-s}}{e^s} + |0 * 1| \frac{ce^{-s}}{e^s}) ds + \int_t^{+\infty} (|e^{-t} * 0| \frac{ce^{-s}}{e^s}) ds = 0,$$

$$J_2(t, \varphi) \leq \int_{t_0}^t (|e^{-t} * 0| \frac{c}{2e^s} + |0 * 1| \frac{c}{2e^s}) ds + \int_t^{+\infty} (|0 * 0| \frac{c}{2e^s}) ds = 0,$$

$$J_3(t, \varphi) \leq \int_{t_0}^t |1 * 1| \frac{ce^{-s}}{e^s} ds.$$

Таким образом, выражение  $J_i(t, \varphi)$  существует  $\forall i \in N, c \in R_+^1$  и  $J_1(t, \varphi) = o(\mu_1(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Несобственные интегралы сходятся равномерно по  $t$  на любом компакте из  $[T; +\infty)$ .

Для уравнения, которое в данном примере имеет вид  $\frac{dz}{dt} = e^{-2t} * z$ , где  $z = c_1 e^{-\frac{1}{ze^{2t}}}$   $\frac{J_1(t, c)}{\mu_1(t)} \rightarrow 0$  при  $c \rightarrow 0$

Таким образом, выполняются все условия Теоремы (0.1) Так как система уравнений (1.7) асимптотически устойчива по переменной  $y_1$ , то тривиальное решение системы уравнений (1.6) обладает этим же свойством по переменной  $x_1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенский Е.В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат.ун-та, Саран.фил., – 1990. – 224 с .
2. Мамедова Т.Ф. Критерий устойчивости решений дифференциальных уравнений по части переменных // Математическое моделирование. М.,РАН. Т.7, №5, – 1995,– С.57.
3. Siljak D.D. Competitive economic systems: stability, decomposition, and aggregation - Proceeding of – 1973, IEEE Conference on Decision and Control. California, –p.265-275.

# On the investigation of dynamic models of socio-economic systems on the stability of some of the variables

© T. F. Mamedova <sup>3</sup>, A.A. Lyapina <sup>4</sup>

**Abstract.** In giving article stability of solution of differential equation to part of the variables are investigate

**Key Words:** stability, differential equation

---

<sup>3</sup>Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; mamedova@math.mrsu.ru.

<sup>4</sup>Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; lyapina@e-mordovia.ru.

УДК 517.926.7

# Условия простоты систем линейных дифференциальных уравнений

© Э. В. Мусафиров<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе получены необходимые, достаточные, а также необходимые и достаточные условия простоты обыкновенных линейных дифференциальных систем. Установлена взаимосвязь свойства простоты линейной дифференциальной системы со свойствами решений системы с удвоенной матрицей коэффициентов.

**Ключевые слова:** система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, отражающая функция, отражающая матрица, простые системы.

## 1. Введение

Многие процессы, происходящие в реальных системах, моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений. Однако, как правило, эти дифференциальные системы не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по виду самих систем. На качественное поведение семейств решений существенное влияние оказывает наличие, количество и расположение периодических решений. При этом для выяснения вопросов о существовании и количестве периодических решений можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Учитывая, что отображение за период определяется через общее решение системы, кажется, что найти явное выражение для отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем невозможно. Однако иногда это можно сделать с помощью отражающей функции (ОФ) Мироненко В.И. (см. [2, 3]).

Далее приведем сведения из теории ОФ, необходимые для дальнейшего изложения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид  $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ .

Для каждой такой системы определяется (см. [2, 3]) *отражающая функция*  $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$ , определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость  $t = 0$ .

Функция  $F(t, x)$  есть ОФ системы (1.1) тогда и только тогда, когда эта  $F$  является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением* (ОС),  $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F(t, x)) = 0$ , с начальным условием  $F(0, x) \equiv x$ .

Любая непрерывно дифференцируемая функция  $F(t, x)$ , удовлетворяющая условию  $F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x$ , является ОФ целого класса систем вида (см. [3])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t, x)) \left( \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} - 2S(t, x) \right) - S(-t, F(t, x)), \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий, Полесский государственный университет, г. Пинск, Беларусь; musafirov@bk.ru.

где  $S(t, x)$  — произвольная вектор-функция, при которой решения системы (1.2) однозначно определяются начальными условиями.

Поэтому все системы вида (1.1) разбиваются на классы эквивалентности вида (1.2) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой *отражающей функцией класса*.

Таким образом, при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Это легко сделать, когда ОФ данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, если система (1.1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта система совпадает с системой  $\dot{x} = X(0, x)$ . Таким образом, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет *простая система* (см. [4, 5]), получающаяся из системы (1.2) при  $S(t, x) \equiv 0$ ,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t, x)) \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t},$$

где  $F(t, x)$  — ОФ этой системы.

Знание свойств простых систем позволяет использовать обширные результаты исследований стационарных систем, полученных в различных областях математического моделирования, для качественного изучения эквивалентных (в смысле совпадения ОФ) нестационарных систем, учитывая, что любая стационарная система является простой.

Для линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

где  $P(t)$  — непрерывная  $n \times n$ -матрица, ОФ также линейна и имеет вид  $F(t, x) \equiv F(t)x$ . Матрица  $F(t)$ , согласно [2], называется отражающей матрицей (ОМ) системы (4). Если  $X(t)$  — фундаментальная матрица решений (ФМ) системы (4), то  $F(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$ . Поэтому для любой ОМ  $F(t)$  справедливы соотношения  $F(-t)F(t) \equiv F(0) = E$ , где  $E$  — единичная  $n \times n$ -матрица. ОС в линейном случае имеет вид  $\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0$ ,  $F(0) = E$ . Всякая линейная система с ОМ  $F(t)$  может быть записана в виде  $\dot{x} = \left( -\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t) + F(-t)R(t) - R(-t)F(t) \right) x$ , где  $R(t)$  — произвольная  $n \times n$ -матрица. При  $R(t) \equiv 0$  получим *простую линейную систему*  $\dot{x} = -\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)x$ .

Заметим, что в одном классе эквивалентности с линейной системой (4) находятся и нелинейные системы обладающие линейной ОФ, поэтому система (4) представляет интерес не только как линейное приближение системы (1.1).

Если матрица  $P(t)$  —  $2\omega$ -периодическая и  $F(t)$  — ОМ системы (1.3), то  $F(-\omega)$  — *матрица монодромии* (см. [6]) этой системы на периоде  $[-\omega; \omega]$ . При этом решения  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  уравнения  $\det(F(-\omega) - \mu E) = 0$  являются *мультипликаторами* (см. [6]) системы (1.3).

## 2. Условия простоты линейных систем

**Л е м м а 2.1.** *Для простоты системы (1.3) с ОМ  $F(t)$  необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t). \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть данная система простая,  $F(t, x)$  — ее ОФ. Тогда по лемме 1 из [4] верно тождество  $F'_x(t, x)P(t)x \equiv P(-t)F(t, x)$ . Так как  $F(t, x) \equiv F(t)x$ , то  $F(t)P(t)x \equiv P(-t)F(t)x$ . Тогда  $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$ .

Достаточность. Пусть выполняется тождество (2.1). Умножим его обе части на  $x$ , получим  $F(t)P(t)x \equiv P(-t)F(t)x$ . Так как  $F(t, x) \equiv F(t)x$ , то последнее тождество можно записать в виде  $F'_x(t, x)P(t)x \equiv P(-t)F(t, x)$ . Тогда по лемме 1 из [4] данная система простая.

**Доказательство закончено.**

Из доказанной леммы вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Система (1.3) проста тогда и только тогда, когда матрицы  $P(t)$  и  $P(-t)$  подобны и существует дифференцируемая матрица подобия  $S(t)$ , для которой  $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$ ,  $S(0) = E$  и  $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть система (1.3) проста, тогда по лемме 2.1.  $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$ , где  $F(t)$  — ОМ системы (1.3). Т.е. матрицы  $P(t)$  и  $P(-t)$  подобны с матрицей подобия  $F(t)$ . Так как  $F(t)$  — ОМ, то она дифференцируемая,  $F(0) = E$  и  $\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) \equiv 0$ . А так как  $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$ , то  $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$ . Т.е. роль  $S(t)$  играет ОМ системы (1.3).

Достаточность. Пусть матрицы  $P(t)$  и  $P(-t)$  подобны с дифференцируемой матрицей подобия  $S(t)$ , причем  $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$ ,  $S(0) = E$  и  $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$ . Тогда  $\dot{S}(t) + S(t)P(t) + P(-t)S(t) \equiv 0$ . Таким образом, для системы (1.3) и дифференцируемой матрицы  $S(t)$  выполнено ОС. Значит,  $S(t)$  — ОМ системы (1.3). А так как для нее  $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$ , то по лемме 2.1. система (1.3) проста.

**Доказательство закончено.**

**Замечание 2.1.** Из доказательства теоремы 2.1. следует, что матрица  $S(t)$  из формулировки теоремы является ОМ системы (1.3).

Теорема 2.1. в некоторых случаях позволяет выяснить: является ли данная система простой. Покажем это на примере.

**Пример 2.1.** Рассмотрим систему (1.3) с матрицей системы

$$P(t) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t) e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t) e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Для этой системы рассмотрим матрицу

$$S(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -e^{-\cos t} \sin t \\ e^{\cos t} \sin t & 1 + \sin t \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что  $S(0) = E$ ,  $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$  и  $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$ . Тогда по теореме 2.1. рассматриваемая система является простой. Заметим также, что  $S(t)$  — ОМ рассматриваемой системы.

Таким образом, если система (1.3) проста, то по теореме 2.1. матрицы  $P(t)$  и  $P(-t)$  подобны. Это позволяет получить следующие утверждения.

**Следствие 2.1.** Если система (1.3) проста, то собственные числа  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$  матрицы  $P(t)$  можно определить так, чтобы функции  $\lambda_i : t \mapsto \lambda_i(t)$  были четными.





**Доказательство.** Следует из леммы 2.4., учитывая, что у многочлена  $\det(\dot{P}(t) - \lambda E)$  коэффициент при  $\lambda^{n-1}$  равен  $(-1)^{n-1} \text{Tr} \dot{P}(t)$ , а коэффициент при  $\lambda^0$  равен  $\det \dot{P}(t)$ .

**Доказательство закончено.**

Аналогичные утверждения можно доказать и для матрицы  $P(t)\dot{P}(t)$ . Так из тождества (2.3) вытекают следующие утверждения.

**Следствие 2.5.** Если система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей  $P(t)$  проста, то собственные числа  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$  матрицы  $P(t)\dot{P}(t)$  можно определить так, чтобы функции  $\lambda_i: t \mapsto \lambda_i(t)$  были нечетными.

**Лемма 2.5.** Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей  $P(t)$  проста. И пусть  $\det(P(t)\dot{P}(t) - \lambda E) \equiv (-1)^n \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n(t)$ . Тогда функции  $a_{2k-1}(t)$ ,  $k = \overline{1, \left[\frac{n+1}{2}\right]}$  — нечетные, а функции  $a_{2k}(t)$ ,  $k = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}$  — четные. ( $[r]$  означает целую часть числа  $r$ ).

**Следствие 2.6.** Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей  $P(t)$  проста, тогда  $\text{Tr} \left( P(t)\dot{P}(t) \right)$  — нечетная функция. Если при этом размерность  $n$  системы — четное число, то  $\det \left( P(t)\dot{P}(t) \right)$  — четная функция, если же размерность системы — нечетное число, то  $\det \left( P(t)\dot{P}(t) \right)$  — нечетная функция.

Может показаться, что совокупность необходимых условий простоты из следствий 2.1., 2.3. и 2.5. является достаточным условием. Следующий пример показывает, что это не так.

**Пример 2.2.** Рассмотрим систему (1.3) с матрицей

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} t^4 & t^2 - t^4 \\ t^4 + t^2 & -t^4 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Собственными значениями матрицы  $P(t)$  являются четные функции  $\pm t^2$ , матрицы  $\dot{P}(t)$  — нечетные функции  $\pm 2t$ , а матрицы  $P(t)\dot{P}(t)$  — нечетные функции  $\nu_{1,2} = 2t^3$ . Тем не менее система (1.3) с матрицей (2.4) не является простой. Докажем это.

Допустим противное. Пусть рассматриваемая система проста и

$$F(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix}$$

— ее отражающая матрица. Тогда по лемме 2.1. и лемме 2.3. имеем  $F(t)P(t) - P(-t)F(t) \equiv 0$ ,  $F(t)\dot{P}(t) + \dot{P}(-t)F(t) \equiv 0$ . Откуда при  $t \neq 0$  получим, что  $f_2(t) \equiv f_3(t) \equiv 0$ ,  $f_1(t) \equiv f_4(t)$ , т.е.

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} f_4(t) & 0 \\ 0 & f_4(t) \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что эта  $F(t)$  не удовлетворяет ОС. Таким образом, получили противоречие с тем, что  $F(t)$  — ОМ рассматриваемой системы.

### 3. Связь с системой с удвоенной правой частью

Покажем связь условия простоты системы (1.3) со свойствами решений системы с удвоенной матрицей коэффициентов

$$\dot{x} = 2P(t)x. \quad (3.1)$$

**Л е м м а 3.1.** *Если система (1.3) проста и  $F(t)$  — ее ОМ, то  $F(-t)$  — ФМ, а  $F^2(t)$  — ОМ системы (3.1).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть система (1.3) проста, тогда из теоремы 2.1. следует, что  $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$ . Умножим это тождество на  $(-1)$  и заменим  $t$  на  $(-t)$ , получим  $-\dot{F}(-t) \equiv 2P(t)F(-t)$ . Таким образом, матрица  $F(-t)$  составлена из столбцов-решений системы (3.1). А так как  $F(0) = E$ , то матрица  $F(-t)$  является ФМ для системы (3.1).

Согласно [2], ОМ системы (3.1)  $\Phi(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$ , где  $X(t)$  — ее ФМ. Т.к.  $F(t)$  — ОМ системы (1.3), то  $F(-t) \equiv F^{-1}(t)$ . Учитывая, что  $X(t) \equiv F(-t)$ , получим  $\Phi(t) \equiv F^2(t)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Доказанную лемму проиллюстрируем следующим примером.

**П р и м е р 3.1.** *Рассмотрим систему (1.3), где*

$$P(t) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t) e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t) e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

В примере 2.1. показано, что эта система простая и ее отражающая матрица

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -e^{-\cos t} \sin t \\ e^{\cos t} \sin t & 1 + \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда по лемме 3.1. общее решение системы  $\dot{x} = (\cos t + \sin^3 t)x + \exp(-\cos t)(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)y$ ,  $\dot{y} = -\exp(\cos t)(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)x - (\cos t + \sin^3 t)y$  имеет вид  $x = c_1(1 + \sin t) + c_2 \exp(-\cos t) \sin t$ ,  $y = -c_1 \exp(\cos t) \sin t + c_2(1 - \sin t)$ .

Аналогично предыдущей лемме можно сформулировать и доказать следующее утверждение.

**Л е м м а 3.2.** *Пусть система (1.3) проста и  $F(t)$  — ее ОМ. Тогда  $F(t)$  — ФМ, а  $F^2(-t)$  — ОМ системы*

$$\dot{x} = -2P(-t)x. \quad (3.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Т.к. система проста, то по лемме 2.1.  $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$  и, следовательно, ОС примет вид  $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$ . Таким образом, матрица  $F(t)$  составлена из столбцов-решений системы (3.2). А так как  $F(0) = E$ , то матрица  $F(t)$  является ФМ для системы (3.2).

По определению ОМ, ОМ системы (3.2)  $\Phi(t) \equiv F(-t)F^{-1}(t)$ . Учитывая, что  $F(-t)F(t) \equiv E$ , имеем  $\Phi(t) \equiv F^2(-t)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Таким образом, зная ОМ простой системы (1.3), мы можем найти ФМ системы с удвоенной правой частью. В связи с этим возникает обратный вопрос: зная ФМ системы с удвоенной правой частью, можно ли найти ОМ системы (1.3) и выяснить, является ли система (1.3) простой? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть  $X(t)$  — ФМ системы (1.3), нормированная при  $t = 0$  (т.е.  $X(0) = E$ ), и для нее справедливо тождество  $X(t)P(-t) \equiv P(t)X(t)$ . Тогда система

$$\dot{x} = \frac{1}{2}P(t)x \quad (3.3)$$

является простой с ОМ  $X(-t)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $X(t)$  — ФМ системы (1.3), тогда  $\dot{X}(t) \equiv P(t)X(t)$ . Умножая полученное тождество на  $-1$  и заменяя  $t$  на  $-t$ , получим  $\frac{d}{dt}(X(-t)) \equiv -P(-t)X(-t)$ . Пусть  $S(t) := X(-t)$ . Т.к.  $X(0) = E$ , то для системы (1.3) выполняются условия теоремы 2.1., следовательно, система (3.3) простая. Проверкой основного соотношения убедимся, что  $X(-t)$  — ее ОФ.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

**П р и м е р 3.2.** Проверкой убедимся, что

$$X(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 + \sin t & e^{-\cos t} \sin t \\ -e^{\cos t} \sin t & 1 - \sin t \end{pmatrix}$$

— ФМ системы (1.3) с матрицей

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t) e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t) e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}$$

и  $X(0) = E$ ,  $X(t)P(-t) \equiv P(t)X(t)$ . Тогда по теореме 3.1. система

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}(\cos t + \sin^3 t)x + \frac{1}{2}(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)\exp(-\cos t)y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)\exp(\cos t)x - \frac{1}{2}(\cos t + \sin^3 t)y \end{cases} \quad (3.4)$$

является простой с ОМ  $X(-t)$ . Эта система  $2\pi$ -периодическая. Ее матрица монодромии на отрезке  $[-\pi; \pi]$  есть  $X(\pi) = E$ . Следовательно, эта простая система устойчива и все ее решения  $2\pi$ -периодические.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 332 с.
2. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. — Минск: Университетское, 1986. — 76 с.
3. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. — 196 с.
4. Мироненко В.И. Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 12. — С. 2109-2114.
5. Мусафиров Э.В. О простоте линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 570-572.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 480 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 491 с.

## Conditions of simplicity of linear differential systems.

© E. V. Musafirov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the work necessary, sufficient, and also necessary and sufficient conditions of simplicity of linear ordinary differential systems are obtained. The interrelation of property of simplicity of linear differential system with properties of solutions of system with the double coefficient matrix is established.

**Key Words:** linear ODE systems, reflective function, reflective matrix, simple systems.

---

<sup>2</sup>Head of Higher Mathematics and Information Technologies Chair, Poleskii State University, Pinsk, Belarus; musafirov@bk.ru.

УДК 517.9

# Математическая модель управления трудовыми ресурсами предприятия

© Ю. В. Напалкова<sup>1</sup>, Т. Ф. Мамедова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе построена математическая модель оптимального управления трудовыми ресурсами предприятия.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, математическая модель, функционал.

## 1. Постановка задачи

Деятельность многих предприятий имеет сезонный характер. Рассмотрим, например, предприятия, работающие в сфере туризма. Одной из наиболее острых проблем в туризме является несоответствие между спросом и предложением, вызванное сезонностью туризма. Сезонная неравномерность, имеет в основном годовой и недельный циклы. В годовом цикле периоды сезонности — отдельные месяцы или кварталы, а в недельном цикле — отдельные дни. Сезонность создает значительные трудности в индустрии туризма, снижая рентабельность туристических предприятий, эффективность использования основных фондов, ухудшая обслуживание туристов и вызывая текучесть кадров вследствие недогрузки предприятий туризма в межсезонный период. В определенный промежуток деятельности в сезоне количество заказов от покупателей резко возрастает, в результате чего, фирме необходимо привлекать новые рабочие кадры. В остальные промежутки на обслуживание заказов хватает постоянного состава.

Поставим задачу прогнозирования численности работников, для обеспечения непрерывного функционирования фирмы с целью достижения максимальной производительности труда. С математической точки зрения это будет задача оптимального управления.

## 2. Создание базы данных

О туристической фирме имеются статистические данные за 5 лет о количестве заказов и о количестве работников в фирме в каждом месяце. Количество заказов и количество работающих в фирме периодически повторяются каждый год, то есть данный вид услуг подчинен сезонности. Исходя из имеющихся данных, известно количество заказов, которое может обслужить один работник. Известны так же средняя заработная плата сотрудника и средняя стоимость одного заказа.

На числовой оси  $R$  рассмотрим сетку

$$S_t = \{t_i : T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_m = T_1\}, \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; jull87@mail.ru.

<sup>2</sup>Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; mamedovaf@yandex.ru.

где  $t_i$  - узлы. Пусть  $x : [T_0, T_1] \rightarrow R$  - функция, которая характеризует прибыль предприятия

$$x(t_i) = C \cdot p(t_i) - M \cdot d(t_i) - K, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.2)$$

$p_i = p(t_i)$  - количество заказов предприятия в  $i$ -том сезоне;

$d_i = d(t_i), i = \overline{1, m}$  - количество сотрудников предприятия в  $i$ -том сезоне;

$C$  - средняя стоимость заказа за  $m$  сезонов;

$M$  - средняя заработная плата работников за  $m$  сезонов;

$K$  - амортизационные расходы, которые считаем постоянными для любого промежутка в сезоне;

Предположим, что  $[T_0, T_1]$  - рассматриваемый сезон, где  $T_1 - T_0 = 12$  месяцев - длина сезона.

Тогда  $x^{(k)}(t_i), k = \overline{0, l}$  - прибыль предприятия в  $k$ -ом сезоне.

На сетке  $S_t$  получим  $l$ -значные базы данных

$$X_{T_0, T_1}^{(k)} = \{x^{(k)}(t_i) : i = \overline{0, m}\}, \quad k = \overline{0, l}, \quad (2.3)$$

отражающие состояние фирмы.

На сетке  $S_t$  рассмотрим разделенные разности

$$\frac{x^{(k)}(t_i) - x^{(k)}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{C(p^{(k)}(t_i) - p^{(k)}(t_{i-1})) - M(d^{(k)}(t_i) - d^{(k)}(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}}, \quad i = \overline{1, m}, k = \overline{0, l}. \quad (2.4)$$

На единичном интервале времени эти величины зависят от количества сотрудников и количества заказов в данном периоде.

Используя подход, изложенный в работе [1], построим методом ломаных функции  $z(t), y(t)$ :

$$z(t) \leq x(t) \leq y(t), \quad (2.5)$$

на промежутке  $[T_0, T_1]$ .

Пусть  $\max \dot{x}(t) = k_m^{(i)}, \quad \min \dot{x}(t) = b_m^{(i)}$ ,

Тогда

$$\frac{dy_m}{dt} = k_m^{(i)}, \quad \frac{dz_m}{dt} = b_m^{(i)}.$$

Отсюда получаем

$$y_m = k_m^{(i)}t + C^{(i)}, \quad z_m = b_m^{(i)}t + C^{(i)},$$

где

$$T_0 + (i-1)\frac{T_1 - T_0}{m} \leq t \leq T_0 + i\frac{T_1 - T_0}{m}, \quad i = \overline{1, n}.$$

### 3. Построение управляемого прогноза

Предположим в момент времени  $T_1$  руководство предприятия решило перейти к активному управлению ресурсами, с целью перераспределения трудовых ресурсов и заказов, таким образом, что бы на каждом временном интервале получить максимальную прибыль.

Так как на стоимость заказов и их количество влияет большое количество факторов и их моделирование достаточно сложно, то на промежутке  $[T_1, T_2]$  руководство фирмы может оказывать влияние на процесс  $x(t)$ , например, управляя количеством работников предприятия.

Для этого на каждом сегменте  $m$ -го разбиения промежутка  $[T_1, T_2]$  введем управляющие параметры  $u = u_m^{(i)}$ , регулирующие количество сотрудников на  $i$ -том промежутке времени  $i = \overline{1, m}$ .

Для обеспечения выполнения неравенства (2.5) на промежутке  $[T_1, T_2]$ , будем искать решение уравнения

$$\frac{dz_m}{dt} = Cp_m^{(i)} - M(d_m^{(i+1)} + u_m^{(i)}), \quad (3.1)$$

где  $d_m^{(i+1)}$  - прогнозируемое значение количества сотрудников на  $i + 1$  промежутке.

Если руководство принимает на работу на  $i$ -том сегменте разбиения работников в количестве  $u_m$ , то компонента  $u_m^{(i)}$  берется со знаком «+» и со знаком «-», если увольняет. Быстро привлекать сотрудников на работу и безболезненно сокращать состав, поможет привлечение на работу студентов (практика, каникулы), заключение контрактов на короткий срок, работа на дому.

Пусть средняя выработка одного сотрудника за 1 месяц определяется функцией

$$W(p(t), d(t)) = \frac{p(t)}{d(t)},$$

которая находится как отношение количества заказов к количеству сотрудников.

Тогда целевой функционал, определяющий «качество» принимаемых кадровых решений на предприятии зададим в виде:

$$J = \int_{T_1}^{T_1+T} W(p(t), d(t)) dt \rightarrow \max. \quad (3.2)$$

Предположим, что  $d(t) + u(t)$  - прогнозируемое количество сотрудников, где  $u(t)$  - вектор управления.

Тогда эффективность принятия, либо увольнения очередного сотрудника на работу будет определяться функционалом

$$J = \int_{T_1}^{T_1+T} \frac{p(t)}{d(t) + u(t)} dt \rightarrow \max. \quad (3.3)$$

Таким образом, построена математическая модель (3.1)-(3.2), которая позволяет прогнозировать финансовое состояние предприятия. Она может быть исследована различными математическими методами. Предполагается в дальнейшем исследовать эту задачу методом, изложенным в работе [1].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенский Е. В. Анализ баз данных и программных движений // Труды СВМО, 2007. — Т. 9, № 1. — с. 11–17.
2. Интриллигатор М. Математические модели оптимизации и экономическая теория // М.: Прогресс, 1975, 607 с.

# Mathematical model of human resource management company

© T. F. Mamedova <sup>3</sup>, J.V. Napalkova <sup>4</sup>

**Abstract.** In giving article the mathematical model of human resource management company are investigate

**Key Words:** optimal control, mathematical model, functional.

---

<sup>3</sup>Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru.

<sup>4</sup>Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; jull87@mail.ru.

УДК 517.9

# Использование унифицированного разложения Тейлора-Ито для системы стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику эпидемии

© Н. И. Овсянникова<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе на основе детерминированной модели эпидемии строится стохастическая модель, где подверженным случайному воздействию считается коэффициент роста заболеваемости  $\beta$ . Для численного решения полученной системы стохастических дифференциальных уравнений используется унифицированный ряд Тейлора-Ито. Прослеживается зависимость отклонений траекторий возмущённой системы от траекторий детерминированной системы от величины возмущённого параметра  $\sigma$ .

**Ключевые слова:** детерминированная и стохастическая модели эпидемии, система стохастических дифференциальных уравнений, ряд Тейлора-Ито, возмущённый параметр.

## 1. Введение

Детерминированная модель эпидемии описывается системой:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\beta x(t)y(t) - \mu x(t) + \Lambda, \\ \dot{y}_i(t) = \beta x(t)y(t) - (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)y(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, t \in [0, T], x(0) = x_0, y(0) = y_0 \quad (1.2)$$

где  $\dot{x}(t)$  — скорость изменения числа подверженных заболеванию;  $\dot{y}_i(t)$  — скорость изменения числа инфицированных;  $\beta x(t)y(t)$  — функция роста заболеваемости (число людей, заражённых в единицу времени);  $\gamma y(t)$  — количество людей, восстановивших своё здоровье в единицу времени без воздействия внешних средств ( $\gamma^{-1}$  — среднее время естественного выздоровления);  $\beta$  — коэффициент роста, характеризующий частоту встреч здоровых людей с инфицированными людьми (в общем случае он может рассматриваться как функция  $\beta(x(t), y(t))$ );  $\mu$  — коэффициент естественной смертности людей;  $\tilde{\mu}$  — коэффициент смертности от данной инфекции;  $\Lambda$  — средняя скорость рождаемости (воспроизводства).

Можно предположить, что значения некоторых коэффициентов системы в момент времени  $t \in [0, T]$  не являются однозначно определёнными, например, вследствие их зависимости от множества непрогнозируемых факторов и их можно рассматривать как случайные процессы, математические ожидания которых известны.

<sup>1</sup>Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Северный арктический федеральный университет; imaginary-aim@hotmail.com

## 2. Постановка задачи

Предположим, что случайную составляющую имеет коэффициент роста  $\beta$ , т.е. он может быть представлен в виде:

$$\beta(t) = m(t) + \sigma \cdot \zeta(t, \omega), \quad (2.1)$$

где  $m(t) = \beta = const$  — математическое ожидание коэффициента  $\beta$ ;  $\zeta(t, \omega)$  — случайный процесс;  $\sigma$  — постоянная, характеризующая степень влияния случайного возмущения на значение коэффициента  $\beta$ . В этом случае математическая модель (1.1)—(1.2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy - \mu x + \Lambda - \sigma xy \zeta(t, \omega), \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - (\mu + \tilde{\mu} + \gamma) y + \sigma xy \zeta(t, \omega), \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x(0, \omega) = x_0(\omega), y(0, \omega) = y_0(\omega) \quad (2.3)$$

При этом состояние системы  $(x(t), y(t))$  уже не является детерминированной вектор-функцией, а представляет собой векторный случайный процесс  $(x(t, \omega), y(t, \omega))$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\zeta(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ .

В общем виде систему (2.2)—(2.3) можно записать:

$$dX(t, \omega) = A(X, t)dt + B(X, t)df(t, \omega) \quad (2.4)$$

$$X(0, \omega) = X_0(\omega), \quad (2.5)$$

где  $A : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $B : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ;  $f(t, \omega)$  — скалярный винеровский процесс;

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; A(X, t) = \begin{pmatrix} -\beta xy - \mu x + \Lambda \\ \beta xy - (\mu + \tilde{\mu} + \gamma) y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;$$

$$B(X, t) = \begin{pmatrix} -\sigma xy \\ \sigma xy \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; \zeta(t, \omega) \in \mathbb{R}^1.$$

Полученное стохастическое дифференциальное уравнение будем решать численно, для этого воспользуемся стохастическим аналогом формулы Тейлора. Применим унифицированное стохастическое разложение Тейлора-Ито по повторным стохастическим интегралам, а также аппроксимацию повторных стохастических интегралов с помощью полиномиальной системы функций [1]. Сформулируем теорему о разложении процесса Ито  $\eta(s) = R(x(s), s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  в унифицированный ряд Тейлора-Ито по повторным стохастическим интегралам  $I_{i_1 \dots i_k}^{l_1 \dots l_k}(s, t)$ .

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть процесс  $\eta(s) = R(x(s), s)$  непрерывно дифференцируем  $r+1$  раз по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (2.4). Тогда при всех  $s, t \in [0, T]$ ,  $s > t$  он разлагается в унифицированный ряд Тейлора-Ито вида:

$$\eta(s) = \sum_{q=0}^r \left( \hat{C}^{D_q} \{ \eta(t) \} \otimes (s \hat{\otimes} t)^{D_q} \right) + H_{r+1}(s, t) \quad (2.6)$$

причём существует такая постоянная  $C_{r+1} < \infty$  такая, что

$$\sqrt{M \{ H_{r+1}(s, t)^2 \}} \leq C_{r+1} (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad r = 0, 1, \dots$$

где

$$H_{r+1}(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \hat{C}\{\eta(\tau)\}^{U_r} \otimes (s \oplus t)^{U_r} \right) + D_{r+1}(s, t) \quad (2.7)$$

$$D_{r+1}(s, t) = \int_t^s (Q^{A_r}\{\eta(\tau)\} dt \otimes (s \oplus t)^{A_r}) + \int_t^s ((H^{A_r}\{\eta(\tau)\} \cdot df(\tau)) \otimes (s \oplus t)^{A_r}), \quad (2.8)$$

$$Q^{A_q}\{\eta(\tau)\} = \{L^{(k)}\hat{C}^{j l_1 \dots l_k} \eta(\tau) : (j l_1 \dots l_k) \in A_q\}, \quad (2.9)$$

$$H^{A_q}\{\eta(\tau)\} = \{({}^{(1)}G_0^{(k)}\hat{C}^{j l_1 \dots l_k} \eta(\tau) : (j l_1 \dots l_k) \in A_q\}, \quad (2.10)$$

$$\hat{C}^{D_q}\{\eta(\tau)\} = \{({}^{(k)}\hat{C}^{j l_1 \dots l_k} \eta(\tau) : (j l_1 \dots l_k) \in D_q\}, \quad (2.11)$$

$$({}^{(k)}\hat{C}^{j l_1 \dots l_k} \{ \cdot \}) = \begin{cases} ({}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \cdot \} & \text{npu } k > 0 \\ L^j \{ \cdot \} & \text{npu } k = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$L^j \{ \cdot \} = \begin{cases} L \dots L \{ \cdot \} & \text{npu } j > 0 \\ \cdot & \text{npu } j = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$({}^{(1)}G_p \{ \cdot \}) = \frac{1}{p} \left( ({}^{(1)}G_{p-1} L \{ \cdot \}) - ({}^{(1)}L G_{p-1} \{ \cdot \}) \right), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

$$L \{ \cdot \} = \frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n b_{lj}(x, t) b_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \{ \cdot \}}{\partial x_l \partial x_i} \quad (2.15)$$

$$G_{0i} \{ \cdot \} = \sum_{j=1}^n b_{ji}(x, t) \frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial x_j}; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.16)$$

$$D_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left( j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}, \quad (2.17)$$

$$U_r = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p \leq r \right\}, \quad (2.18)$$

$$A_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}, \quad (2.19)$$

равенство (2.6) справедливо с вероятностью 1, правые части (2.6) — (2.8) существуют в среднеквадратическом смысле.

Построим унифицированное разложение Тейлора-Ито для компонент решения  $X(t)$  системы (2.2) — (2.3) до малых порядка  $O((s-t)^{5/2})$ , то есть, будем строить разложение для процесса Ито  $\eta(\tau) = X(t)$ :

$$\begin{aligned}
x(s) = & x(t) + (s-t) [(-\beta xy - \mu x + \Lambda) + \sigma xy(\beta(y-x) + \mu)I_1^0(s,t) + \\
& + \sigma^2 xy(\beta(2xy - (x-y)^2) + \mu(x-y))I_{11}^{00}(s,t)] + \frac{(s-t)^2}{2} (2\beta\mu xy + \\
& + \beta^2 xy(y-x) + \mu^2 x - \Lambda\beta y - \Lambda\mu + (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)\beta xy) - \sigma xy I_1^0(s,t) + \\
& + \sigma^2 xy(y-x)I_{11}^{00}(s,t) + \sigma^3 xy(2xy - (x-y)^2)I_{111}^{000}(s,t) + \sigma y(\Lambda - (\mu + \tilde{\mu} + \\
& + \gamma)x)I_1^1(s,t) + \sigma^4 xy(11xy(x-y) - (x^3 - y^3))I_{1111}^{0000}(s,t) - \sigma^2 y(\Lambda(y-x) - \\
& - xy(\mu + \tilde{\mu} + \gamma) + \mu x^2)I_{11}^{10}(s,t) + \sigma^2 xy((\mu + \tilde{\mu} + \gamma)(y-1) + \Lambda)I_{11}^{01}(s,t) + \\
& + H_5^x(s,t),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
y(s) = & y(t) + (s-t) [(\beta xy - (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)y) + \sigma xy(\beta(x-y) - (\mu + \tilde{\mu} + \\
& + \gamma))I_1^0(s,t) + \sigma^2 xy(\beta(-2xy + (x-y)^2) + (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)(y-x)) \times \\
& \times I_{11}^{00}(s,t)] + \frac{1}{2}(s-t)^2 (\beta^2 xy(x-y) - 2\beta xy(\mu + \tilde{\mu} + \gamma) - \beta\mu xy + \\
& + (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)^2 y + \Lambda\beta y) + \sigma xy I_1^0(s,t) + \sigma^2 xy(x-y)I_{11}^{00}(s,t) + \sigma^3 xy \times \\
& \times (2xy - (x-y)^2)I_{111}^{000}(s,t) + \sigma y(\mu x - \Lambda)I_1^1(s,t) - \sigma^4 xy(11xy(x-y) - \\
& - (x^3 - y^3))I_{1111}^{0000}(s,t) + \sigma^2 y(\Lambda(y-x) - xy(\mu + \tilde{\mu} + \gamma) + \mu x^2)I_{11}^{10}(s,t) + \sigma^2 xy \times \\
& \times (\mu(x-y) - \Lambda)I_{11}^{01}(s,t) + H_5^y(s,t),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

### 3. Анализ численного решения

В качестве численного метода для моделирования системы (2.4) – (2.5) выбраны соотношения (2.20) и (2.21) на равномерной дискретной сетке  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ , построенной для отрезка  $[0, T]$ , такой что  $\tau_j = j\Delta$ ,  $\tau_N = N\Delta = T$ . Обозначив  $x(\tau_j) = x_j$ ,  $y(\tau_j) = y_j$ , и положив в разложениях (2.20) – (2.21)  $s = (k+1)\Delta$ ,  $t = k\Delta$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , используя разложения повторных стохастических интегралов  $I_1^0(s,t)$ ,  $I_1^1(s,t), \dots$  по полиномиальному базису, получены следующие выражения для численного метода:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} = & x_k + \Delta ((-\beta xy - \mu x + \Lambda) + \sigma xy(\beta(y-x) + \mu)I_1^0(s,t) + \sigma^2 xy \times \\
& \times (\beta(2xy - (x-y)^2) + \mu(x-y))I_{11}^{00}(s,t)) + \frac{\Delta^2}{2} (\beta^2 xy(y-x) + 2\beta\mu \times \\
& \times xy + \mu^2 x - \Lambda\beta y - \Lambda\mu + (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)\beta xy) - \sigma xy I_1^0(s,t) + \sigma^2 xy(y-x) \times \\
& \times I_{11}^{00}(s,t) + \sigma^3 xy(2xy - (x-y)^2)I_{111}^{000}(s,t) + \sigma y(\Lambda - (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)x) \times \\
& \times I_1^1(s,t) + \sigma^4 xy(11xy(x-y) - (x^3 - y^3))I_{1111}^{0000}(s,t) - \sigma^2 y(\Lambda(y-x) - \\
& - xy(\mu + \tilde{\mu} + \gamma) + \mu x^2)I_{11}^{10}(s,t) + \sigma^2 xy((\mu + \tilde{\mu} + \gamma)(y-1) + \Lambda)I_{11}^{01}(s,t)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
y_{k+1} = & y_k + \Delta [(\beta xy - (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)y) + \sigma xy (\beta(x - y) - (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)) \times \\
& \times I_1^0(s, t) + \sigma^2 xy (\beta(-2xy + (x - y)^2) + (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)(y - x)) I_{11}^{00}(s, t)] + \\
& + \frac{\Delta^2}{2} (\beta^2 xy(x - y) - 2\beta xy(\mu + \tilde{\mu} + \gamma) - \beta\mu xy + \Lambda\beta y + (\mu + \tilde{\mu} + \gamma)^2 y) \\
& + \sigma xy I_1^0(s, t) + \sigma^2 xy(x - y) I_{11}^{00}(s, t) + \sigma^3 xy(2xy - (x - y)^2) I_{111}^{000}(s, t) + \\
& + \sigma y(\mu x - \Lambda) I_1^1(s, t) - \sigma^4 xy(11xy(x - y) - (x^3 - y^3)) I_{1111}^{0000}(s, t) + \sigma^2 y \times \\
& \times (\Lambda(y - x) - xy(\mu + \tilde{\mu} + \gamma) + \mu x^2) I_{11}^{10}(s, t) + \sigma^2 xy(\mu(x - y) - \\
& - \Lambda) I_{11}^{01}(s, t)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1^0(\tau_{k+1}, \tau_k) &= \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)}, \\
I_1^1(\tau_{k+1}, \tau_k) &= -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left[ \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \right], \\
I_{11}^{00}(\tau_{k+1}, \tau_k) &= \frac{\Delta}{2} \left[ \zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\zeta_0^{(1)} \zeta_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(1)}) \right] = \\
&= \frac{\Delta}{2} \cdot [(\zeta_0^{(1)})^2 - 1], \quad I_{111}^{000}(\tau_{k+1}, \tau_k) = \frac{\Delta^{3/2}}{6} [(\zeta_0^{(1)})^3 - 3\zeta_0^{(1)}], \\
I_{1111}^{0000}(\tau_{k+1}, \tau_k) &= \frac{\Delta^2}{24} [(\zeta_0^{(1)})^4 - 6(\zeta_0^{(1)})^2 + 3], \\
I_{11}^{01}(\tau_{k+1}, \tau_k) &= -\frac{\Delta^2}{4} \left[ \frac{4}{3} (\zeta_0^{(1)})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_2^{(1)} - 2 + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(1)} \cdot \zeta_{i+2}^{(1)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} (\zeta_i^{(1)})^2 \right\} \right] \\
I_{11}^{10}(\tau_{k+1}, \tau_k) &= -\frac{\Delta^2}{2} \zeta_0^{(1)} (\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)}) - I_{11}^{01}(\tau_{k+1}, \tau_k) = \\
&- \frac{\Delta^2}{4} \left[ \frac{2}{3} (\zeta_0^{(1)})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_2^{(1)} + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^q \left\{ -\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(1)} \cdot \zeta_{i+2}^{(1)} + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} (\zeta_i^{(1)})^2 \right\} + 2 \right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\{\zeta_i^{(j)}, i = 0, 1, \dots, q+2; j = 1\}$  — система независимых гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, которая генерируется на шаге интегрирования с номером  $k$  и является независимой с аналогичными системами случайных величин, которые генерируются на всех предшествующих шагах интегрирования по отношению к шагу интегрирования с номером  $k$ ;  $\Delta$  — шаг интегрирования численного метода; число  $q$  выбирается из условия:

$$\begin{aligned}
M \left\{ \left( I_{11}^{10}(\tau_{k+1}, \tau_k) - I_{(11)q}^{10}(\tau_{k+1}, \tau_k) \right)^2 \right\} &= \\
= M \left\{ \left( I_{11}^{10}(\tau_{k+1}, \tau_k) - I_{(11)q}^{01}(\tau_{k+1}, \tau_k) \right)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^4}{16} \left( \frac{3}{16} \left( \frac{\pi^4}{90} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^q \frac{1}{i^4} \right) + \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right)^2 \right) \leq C \Delta^5,
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

где постоянная  $C$  должна быть задана. Выберем её для простоты равной единице. При уменьшении величины шага интегрирования возрастает величина  $q$ . Рассмотрим результаты выбора числа  $q$  с помощью соотношения (2.11). Эти результаты приведены в следующей таблице:

|          |       |       |        |
|----------|-------|-------|--------|
| $\Delta$ | 0,004 | 0,001 | 0,0005 |
| $q$      | 1     | 2     | 4      |

Таблица 1: результаты выбора числа  $q$ .

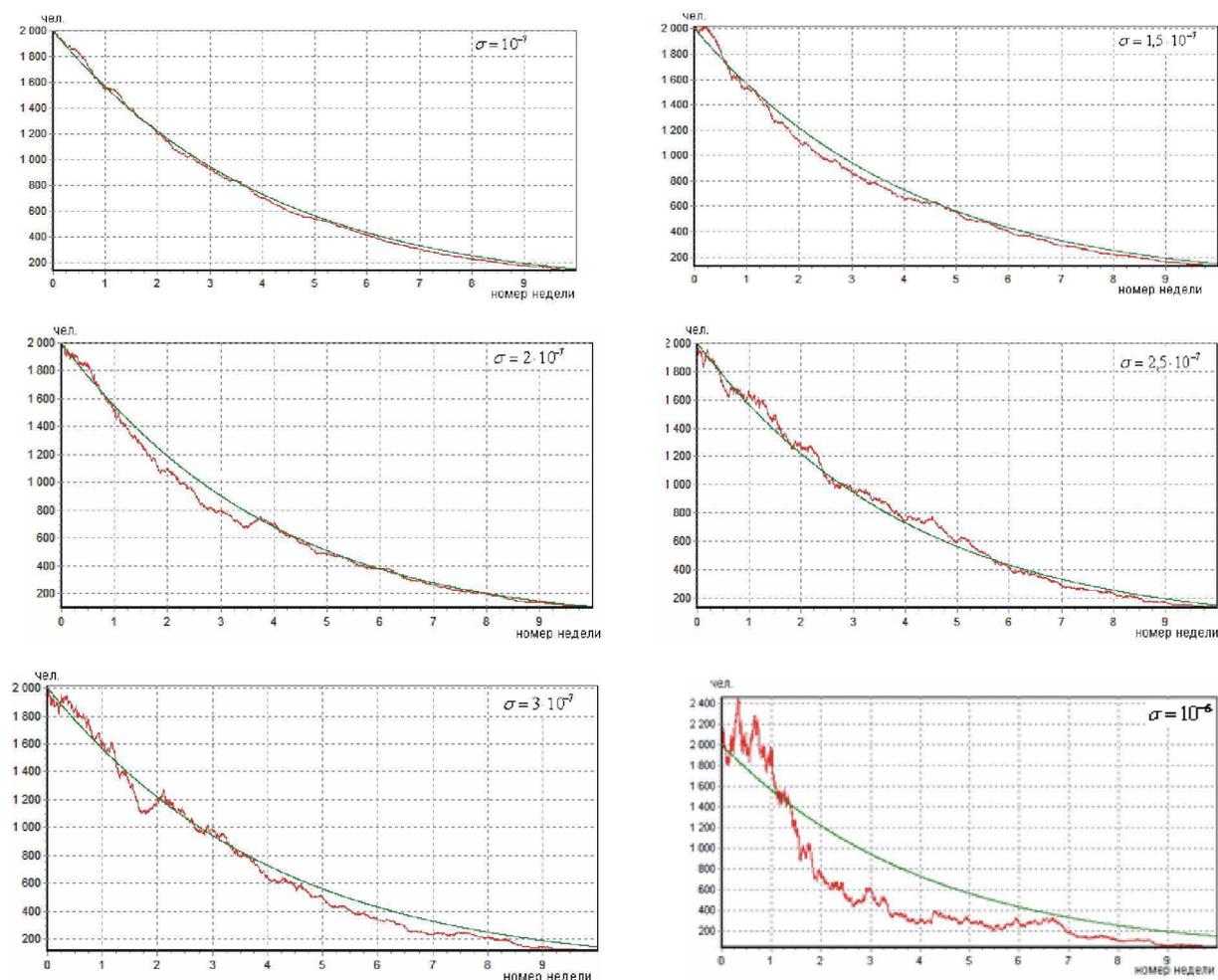
То есть, чтобы  $\Delta$  был равен 0,004, достаточно  $q$  взять равным 1, тогда разложения для  $I_{11}^{10}$  и  $I_{11}^{01}$  примут вид:

$$\begin{aligned}
I_{11}^{01}(\tau_{k+1}, \tau_k) &= -\frac{\Delta^2}{4} \left[ \frac{4}{3}(\zeta_0^{(1)})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_2^{(1)} + \frac{1}{5\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)} \cdot \zeta_3^{(1)} - \frac{1}{5}(\zeta_1^{(1)})^2 - 2 \right] \\
I_{11}^{10}(\tau_{k+1}, \tau_k) &= -\frac{\Delta^2}{4} \left[ \frac{2}{3}(\zeta_0^{(1)})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)} \cdot \zeta_2^{(1)} - \frac{1}{5\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)} \cdot \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{5}(\zeta_1^{(1)})^2 + 2 \right]
\end{aligned}$$

Произведём численное моделирование решения системы (2.4)–(2.5) с помощью соотношений (3.1) и (3.2) при  $\beta = 2 \cdot 10^{-6}$  (Рис. 3.1). Значения максимальных отклонений траекторий возмущённой системы от траекторий детерминированной системы приведены в таблице 2. Хорошо видна прямая зависимость максимальных отклонений решения возмущённой системы от величины возмущённого параметра  $\sigma$ .

| $\sigma$            | Отклонение $X$ , % | Отклонение $Y$ , % |
|---------------------|--------------------|--------------------|
| $10^{-7}$           | Практически нет    | 2,5                |
| $1,5 \cdot 10^{-7}$ | Практически нет    | 3,5                |
| $2 \cdot 10^{-7}$   | 0,01               | 4                  |
| $2,5 \cdot 10^{-7}$ | 0,09               | 5                  |
| $3 \cdot 10^{-7}$   | 0,26               | 10                 |
| $10^{-6}$           | 0,39               | > 50               |

Таблица 2: начения максимальных отклонений траекторий возмущённой системы.

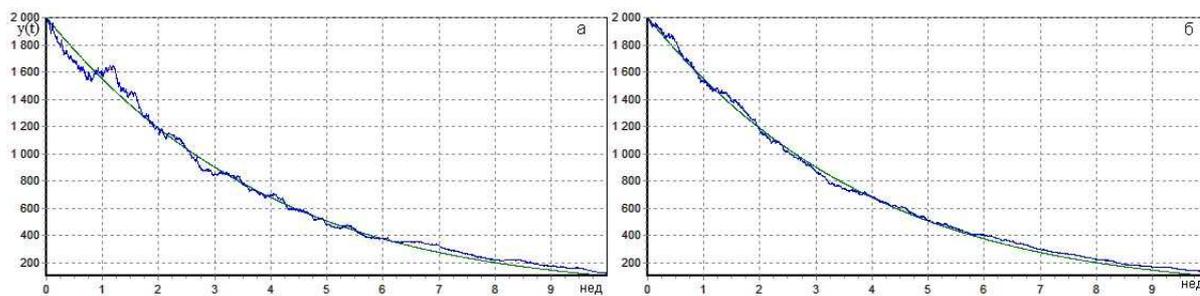


Р и с у н о к 3.1

Динамика  $y(t)$  в детерминированной и стохастической моделях эпидемии в зависимости от величины возмущённого параметра  $\sigma$

При  $\sigma \leq 10^{-7}$  стохастическая модель практически совпадает с детерминированной, следовательно, для описания системы необходимо брать детерминированную модель; при  $\sigma > 3 \cdot 10^{-7}$  стохастическая модель более чем на 10% отклоняется от детерминированной, потому детерминированную модель вместо стохастической использовать, скорее всего, нельзя.

При различных реализациях системы независимых гауссовских величин  $\{\zeta_i^{(j)}, i = 0, 1 \cdot q + 2; j = 1, 2\}$  получаем разные реализации решения системы стохастических дифференциальных уравнений (2.4). Эти траектории при небольших возмущениях лежат внутри некоторой трубки, построенной в малой окрестности решения детерминированной системы (1.1). На рисунке 3.2 показано сравнение математических ожиданий с решением детерминированной системы дифференциальных уравнений (1.1).



Р и с у н о к 3.2

Детерминированная модель и математическое ожидание решения системы (2.4) – (2.5), найденное по пяти (а) и десяти (б) реализациям при  $\sigma = 5 \cdot 10^{-7}$

Таким образом,  $M\{X(t; \omega)\} \rightarrow X(t)$ , где  $X(t) = (x(t), y(t))$  – решение детерминированной системы (1.1), (1.2),  $X(t; \omega) = (x(t; \omega), y(t; \omega))$  – решение стохастической системы (2.2), (2.3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов // С.Петербург: Наука, 1999, 459с.
2. Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988, 225с.

---

# Use of the unified decomposition of Taylor-Ito for system of the stochastic differential equations describing dynamics of epidemic

© N. I. Ovsyannikova<sup>2</sup>

**Abstract.** In work on the basis of the determined model of epidemic the stochastic model where subject it is considered to casual influence factor of growth of disease  $\beta$  is under construction. For the numerical decision of the received system of the stochastic differential equations Taylor-Ito unified number is used. Dependence of deviations of trajectories of the indignant system on trajectories of the determined system on size of the indignant parametre  $\sigma$  is traced.

**Key Words:** the determined and stochastic models of epidemic, system of the stochastic differential equations, Taylor-Ito number, the indignant parametre.

---

<sup>2</sup>The teacher of chair of applied mathematics, Northern Arctic Federal University; imaginary-aim@hotmail.com

УДК УДК 517.948.35

## О вычислении кратных фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций методом ложных возмущений

© Д. Г. Рахимов<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе рассматривается нахождение фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций и соответствующих собственных векторов, для упрощения вычислений, специальным образом строится оператор, для которого исходное кратное собственное значение окажется простым собственным значением. Предлагается также более упрощенный вариант нахождения соответствующих собственных векторов.

**Ключевые слова:** дискретный спектр, метод ложных возмущений, метод Стеффенсена, оператор ложного возмущения.

### 1. Введение

В работах [2], [3] рассматривалась задача уточнения приближенно заданных кратных собственных значений и соответствующих собственных векторов линейных оператор-функций спектрального параметра методом ложных возмущений с последующим применением метода Стеффенсена для кратных корней. Здесь для этой задачи строится возмущенный оператор, для которого искомое кратное собственное значение оказывается простым. Предложен также упрощенный вариант определения соответствующих собственных векторов. Тем самым дано развитие метода ложных возмущений [1].

### 2. Постановка задачи

В 1961 году М.К.Гавурин предложил метод уточнения приближенно заданных собственных чисел и собственных векторов самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве основанный на введении оператора ложного возмущения (ЛВ), такого, что приближения к собственным числам и элементам становились точными для возмущенного оператора. В дальнейшем ЛВ метод получил развитие для операторов и оператор-функций спектрального параметра в банаховых пространствах (см. обзорную статью [8]). В настоящей работе предлагается прием, позволяющий свести задачу определения кратного собственного значения и отвечающих ему собственных элементов к случаю простого собственного значения. Используются терминологии и обозначения [6], [8].

Пусть  $\lambda$  - изолированная фредгольмовская точка дискретного спектра достаточно гладкой по  $t$  в некоторой области  $G \subset C$  оператор-функции  $T(t) \in L(E_1, E_2)$ .  $E_1, E_2$  - некоторые банаховы пространства;  $N(T(\lambda)) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ,  $N(T^*(\lambda)) = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ , причем  $k = \det\|\langle T'(\lambda)\varphi_i, \psi_j \rangle\| \neq 0$ . Пусть известны достаточно хорошие приближения  $\varphi_{i0}, \psi_{i0}$  и  $\Lambda$  к собственным элементам  $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n$  и собственному числу  $\lambda$ , соответственно:

$$\|\varphi_j - \varphi_{j0}\| \leq \varepsilon, \|\psi_j - \psi_{j0}\| \leq \varepsilon, |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon.$$

<sup>1</sup>Ведущий научный сотрудник, Институт математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент; Davtanaka@yandex.ru.

В качестве приближения  $\lambda_0$  выбираем приближенное значение одного из решений уравнения

$$F^0(t - \Lambda) \equiv f^0(t) \equiv \det \|\langle T(t)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| = 0, \tag{2.1}$$

имеющего в окрестности  $\Lambda$   $n$  близких по модулю корней.

Действительно, для функций  $\Phi_{ij}^{(0)} \equiv \langle T(t)(\varphi_{i0} - \varphi_i), \psi_{j0} \rangle - \langle T(t)\varphi_i, \psi_j - \psi_{j0} \rangle$  справедлива оценка  $|\Phi_{ij}^{(0)}(t)| \leq (\|\psi_{j0}\| \|T(t)\| + \|T(t)\varphi_i\|)\varepsilon$ . Применяя неравенство Адамара, определяем постоянную  $C$ , такую, что на некотором контуре  $\Gamma$ , содержащем внутри себя точки  $\lambda$  и  $\Lambda$ , при достаточно малом  $\varepsilon$

$$|\Phi^{(0)}(t)| = \det \|\Phi_{ij}^{(0)}(t)\| = |f^{(0)}(t) - g(t)| \leq \varepsilon C < \mu = \inf_{\Gamma} |g(t)| \leq |g(t)|,$$

где  $g(t) = \det \|\langle T(t)\varphi_i, \psi_j \rangle\|$ . Тогда согласно теореме Руше [5] уравнение (2.1) внутри  $\Gamma$ , имеет столько же корней, сколько функция  $g(t)$ , для которой по условию

$$g^{(i)}(\lambda) = 0, i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad g^{(n)}(\lambda) = k \neq 0.$$

В силу малости  $\varepsilon$

$$k_0 = \det \|\langle T'(\lambda_0)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| \neq 0. \tag{2.2}$$

Поэтому биортогональные системы элементов к  $\{\varphi_{i0}\}_1^n$  и  $\{\psi_{i0}\}_1^n$  можно построить следующим образом:

$$\gamma_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^n K_{ij}^0 T^{*'}(\lambda_0)\psi_{i0}, \quad z_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{s=1}^n K_{sj}^0 T'(\lambda_0)\varphi_{s0},$$

где  $K_{is}^0$  - алгебраическое дополнение элемента  $k_{is}^0 = \langle T'(\lambda_0)\varphi_{s0}, \psi_{i0} \rangle$ . Так как  $k \neq 0$ , найдется номер  $i_0$ , такой что  $k_{i_0 1}^0 = \langle T'(\lambda_0)\varphi_{10}, \psi_{i_0 0} \rangle \neq 0$ .

Целью работы является сведение задачи ложного возмущения для кратного собственного значения к случаю простого собственного значения.

### 3. Сведение к одномерному случаю

Введем оператор-функцию  $\overline{T(t)} = T(t) + \sum_{s=2}^n \langle \cdot, \gamma_{s0} \rangle z_{s0}$ .

**Т е о р е м а 3.1.** *Точное собственное значение  $\lambda$  оператора  $T(t)$  является простой изолированной фредгольмовой точкой дискретного спектра оператора  $\overline{T(t)}$ , причем соответствующие собственный вектор и дефектный функционал имеют вид*

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 + \sum_{s=2}^n c_s \varphi_s, \quad \tilde{\psi} = \psi_{i_0 0} + \sum_{s \neq i_0} d_s \psi_s. \tag{3.1}$$

При этом элементы  $\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}$  оказываются достаточно хорошими приближениями элементов  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\psi}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Фредгольмовость оператора  $\overline{T(\lambda)}$  следует из теоремы С. М. Никольского [6]. Из его определения следует, что  $N(\overline{T(\lambda)}) \subset N(T(\lambda))$  и нули оператора  $\overline{T(\lambda)}$  можно искать в виде (3.1).

Тогда

$$\overline{T(\lambda)} \tilde{\varphi} = \sum_{s=2}^n \langle \varphi_1, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} + \sum_{s=2}^n \sum_{k=2}^n c_k \langle \varphi_k, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} = 0,$$

откуда в силу линейной независимости системы векторов  $\{z_{i0}\}_1^n$  возникает система

$$\sum_{k=2}^n c_k \langle \varphi_k, \gamma_{s0} \rangle = -\langle \varphi_1, \gamma_{s0} \rangle, \quad s = \overline{2, n}, \quad (3.2)$$

решения которой определяются по формулам Крамера. Двойственным образом устанавливается, что дефектный функционал  $\overline{T(\lambda)}$  имеет вид (3.1), где коэффициенты  $d_k$  определяются из системы вида (3.2) по Крамеру. Поскольку при  $j \neq i$   $|\langle \varphi_j, \gamma_{i0} \rangle| = |\langle \varphi_j - \varphi_{j0}, \gamma_{i0} \rangle| \leq \varepsilon \|\gamma_{i0}\|$  и соответственно  $|\langle z_{i0}, \psi_j \rangle| \leq \varepsilon \|z_{i0}\|$ , то из вида решений системы (3.2) следует, что  $|c_k|, |d_k| \leq K\varepsilon, k = \overline{2, n}$ . Элементы  $\varphi_{10}, \psi_{i0}$  являются приближениями  $\tilde{\varphi} \in N(\overline{T(\lambda)})$  и  $\tilde{\psi} \in N(\overline{T^*(\lambda)})$ , так как  $\|\varphi_{10} - \tilde{\varphi}\| \leq (1 + (n-1)K)\varepsilon, \|\psi_{i0} - \tilde{\psi}\| \leq (1 + (n-1)K)\varepsilon$ .

В силу малости коэффициентов  $c_k, d_k, k = \overline{2, n}, \tilde{k} = \langle \overline{T'(\lambda)}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle \neq 0$ .

Для уточнения собственного значения  $\lambda$  применим метод ложных возмущений в одномерном варианте к задаче

$$\overline{T(t)}x = 0. \quad (3.3)$$

с последующим использованием итерационного процесса Эйткена-Стеффенсена [7] к уравнению  $f(t) \equiv \langle \overline{T(t)}\varphi_{10}, \psi_{i0} \rangle = 0$ :

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [f(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{(-1)} f(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \lambda^{(0)} = \Lambda. \quad (3.4)$$

где  $\Phi(t) = t - f(t), f(t', t'') = (f(t') - f(t'')) / (t' - t'')$ .

**Т е о р е м а 3.2.** *Если начальные приближения достаточно хороши, то найдутся числа  $C, C_1, L_1$  и  $K$  такие, что при  $h = C\varepsilon(|k_{i0}| - C_1\varepsilon)^{-1}(1 + L_1)K < 1$  уравнение  $f(t) = 0$  имеет единственный корень, который можно найти с помощью формулы (3.4).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заметим, что  $(\overline{T(t)})' = T'(t), (\overline{T(t)})'' = T''(t)$ .

$$\begin{aligned} a) f(\Lambda) &= \langle \overline{T(\Lambda)}\varphi_{10}, \psi_{i0} \rangle = \langle \overline{T(\Lambda)}\varphi_{10} - \overline{T(\lambda)}\tilde{\varphi}, \psi_{i0} \rangle = \\ &= \langle \overline{T(\Lambda)}(\varphi_{10} - \tilde{\varphi}) + (\overline{T(\Lambda)} - \overline{T(\lambda)})\tilde{\varphi}, \psi_{i0} \rangle, |f(\Lambda)| \leq \varepsilon \left\| \overline{T(\Lambda)} \right\| + \varepsilon \sup_{\theta \in [0;1]} \overline{T'(\Lambda + \theta(\lambda - \Lambda))} = C\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f(t', t'') &= f'(t'') + f''(t'' + \theta(t' - t''))(t' - t'') = f'(\lambda) + \\ &+ f''(\lambda + \theta_1(t'' - \lambda))(t'' - \lambda) + f''(t'' + \theta(t' - t''))(t' - t''), \end{aligned}$$

где  $f'' = (\psi_{i0}, T''(t)\varphi_{10})$ ,

$$\begin{aligned} |f(t', t'')| &\geq |k_{i0}| - |f''(\lambda + \theta_1(t'' - \lambda))||t'' - \lambda| - \\ &- |f''(t'' + \theta(t' - t''))||t' - t''| \geq |k_{i0}| - 3C_1\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $C_1 = \sup_{t \in G_0} T''(t)$ ;

$$c) \Phi(t) = t - f(t), \Phi(t', t'') = 1 - f(t', t''), |\Phi(t', t'')| \leq 1 + |f(t', t'')| \leq 1 + L_1;$$

$$d) |\Phi(t', t'') - \Phi(t'', t''')| = |f(t', t'') - f(t'', t''')| \leq L_2(|t' - t''| + |t'' - t'''|) = K|t' - t'''|.$$

Теперь, если  $h = C\varepsilon(|k_{i0}| - 3C_1\varepsilon)^{-1}(1 + L_1)K < 1$ , то уравнение  $f(t) = 0$  имеет единственный корень, который можно найти методом Эйткена-Стеффенсена (3.4) (см. [7]).

Определим элементы

$$\tilde{\gamma}_0 = 1/k_{i_0 1} \overline{T'^*(\lambda_0)} \psi_{i_0 0} \in E^*, \tilde{z}_0 = 1/k_{i_0 1} \overline{T'(\lambda_0)} \varphi_{10} \in F,$$

биортогональные к  $\varphi_{10}$  и  $\psi_{i_0 0}$  соответственно.

Построим оператор ложного возмущения в виде

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \overline{T(\lambda_0)} \varphi_{10} + \langle x, \overline{T^*(\lambda_0)} \psi_{i_0 0} \rangle \tilde{z}_0.$$

Тогда  $\text{Ker}(\overline{T(\lambda_0)} - D_0) = \{\varphi_{10}\}$ ,  $\text{Ker}(\overline{T^*(\lambda_0)} - D_0^*) = \{\psi_{i_0 0}\}$ .

Применяя лемму Шмидта [6] сводим (3.3) к системе

$$\begin{cases} x = \xi \left[ I + \overline{\Gamma_0} \left( D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)} \right) \right]^{-1} \varphi_{10}, \\ \xi = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь  $\overline{\Gamma_0} = \left[ \overline{T(\lambda^0)} - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0 \right]^{-1}$ .

Подставляя первое уравнение (3.5) во второе, получим уравнение разветвления, простым корнем которого является исходное собственное значение  $\lambda$ :

$$F(t - \lambda^0) \equiv \langle (D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)}) \left[ I + \overline{\Gamma_0} (D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)}) \right]^{-1} \varphi_{10}, \psi_{i_0 0} \rangle = 0. \quad (3.6)$$

**Т е о р е м а 3.3.** *Если начальные приближения достаточно хороши, то к уравнению (3.6) можно применить метод Эйткена-Стеффенсена (3.4).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Проверим условия применимости метода Стеффенсена:

$$a) f(\lambda_0) = \langle D_0 [I + \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_0, \psi_0 \rangle, |f(\lambda_0)| \leq \|D_0\|^2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| \|D_0\|]^{-1} = C_1(\|D_0\|);$$

$$b) |f(t', t'')| \geq |k_0| - C_2(\|D_0\|, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} C_2(\|D_0\|, \varepsilon) = & L_1 \|\Gamma_0\| \|D_0\| [1 - \|\Gamma_0\| \|D_0\|]^{-1} \{1 + [1 - \|\Gamma_0\| \|D_0\|]^{-1}\} + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \{2(L_2 + 2L_1^2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1}) [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1} + \\ & + \varepsilon L_3 + 6L_1 L_2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1} + \\ & + 6L_1^3 \|\Gamma_0\|^2 [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2} [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2}\}; \end{aligned}$$

$$L_1 = \sup_{t \in G} \|T^{(i)}(t)\|, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$c) \Phi(t) = t - g(t), |\Phi(t', t'')| \leq C_3, C_3 = L_1 [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2};$$

$$\begin{aligned} d) |\Phi(t', t'') - \Phi(t'', t''')| = & |f''(t'' + \theta(t' - t''))(t' - t'') - \\ & - f''(t'' + \theta_1(t''' - t''))(t''' - t'')| \leq C_4(\|D_0\|, \varepsilon) (|t' - t''| + |t'' - t'''|) \leq \\ & \leq K |t' - t'''|, t', t'', t''' \in G_0, \end{aligned}$$

$$C_4(\|D_0\|, \varepsilon) = [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2} \{L_2 + 2L_1^2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1}\}.$$

Теперь, если  $h = C_1 C_3 K (|k_0| - C_2)^{-1} < 1$ , то  $\lambda$  можно вычислить из уравнения (3.6) методом Стеффенсена (3.4), для реализации которого требуется решить два линейных уравнения  $\left[ \overline{T(\lambda^{(m)})} + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0 \right] x = \tilde{z}_0$ ,  $\left[ \overline{T(\Phi(\lambda^{(m)}))} + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0 \right] y = \tilde{z}_0$ .

**Теорема 3.4.** Собственные вектора  $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n$  соответствующие собственному значению  $\lambda$  оператора  $T(\lambda)$  являются решениями уравнений

$$\left[ T(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[ T^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** К исходной задаче  $T(\lambda)x = 0$  применяем метод ложных возмущений, для чего вводим оператор ложного возмущения:

$$D_0 = - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle T(\lambda) \varphi_{i0}.$$

Тогда приближения  $\varphi_{i0}, i = 1, 2, \dots, n$  окажутся нулями оператора  $T(\lambda) + D_0$ .

Запишем уравнение  $T(\lambda)x = 0$  в виде

$$\left[ T(\lambda) + D_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = D_0 x + \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}$$

или

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n \xi_i [I - \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_{i0}, \\ \xi_i = \langle x, \gamma_{i0} \rangle, i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где  $\Gamma_0 = [T(\lambda) + D_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}]^{-1}$ . Подставляя первое во второе получим

$$\sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} \equiv \sum_{i=1}^n \xi_i \langle \Gamma_0 D_0 [I - \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_{i0}, \gamma_{j0} \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

По условию эта система имеет  $n$  линейно независимых решений, т.е. ранг матрицы составленной из коэффициентов, равен нулю. Следовательно, система разрешима для любых  $\xi_i$ , и  $\varphi_i$  можно выбрать в виде

$$\varphi_i = [I - \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которые являются решениями уравнения (3.7).

#### 4. Случай кратного собственного значения с ОЖН.

Пусть  $\lambda$  - изолированная фредгольмовская точка дискретного спектра оператор-функции  $T(t) \in L(E_1, E_2)$  - аналитической по  $t$  в некоторой области  $G \subset C$ ,  $Ker T(\lambda) = \{\varphi_i\}_1^n$ ,  $Ker T^*(\lambda) = \{\psi_i\}_1^n, \{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1, n}^{j=2, p_i}, \{\psi_i^{(j)}\}_{i=1, n}^{j=2, p_i}$  соответствующие им присоединенные элементы. Через  $\{\gamma_i\}_1^n$  и  $\{z_j\}_1^n$  обозначим системы векторов, биортогональные к  $\{\varphi_i\}_1^n$  и  $\{\psi_i\}_1^n$  соответственно.

Предполагаются известными некоторые достаточно хорошие приближения:

$$\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)} : |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon, \|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \|\varphi_i^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon.$$

Как и выше введем оператор

$$\overline{T(t)} = T(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}, \quad (4.1)$$

здесь через  $\{\gamma_{i0}\}_1^n$  обозначена система векторов, биортогональных к  $\{\varphi_{i0}\}_1^n$ , а через  $\{z_{i0}\}_1^n$  - биортогональных  $\{\psi_{i0}\}_1^n$ .

Без ограничения общности можно предположить, что  $p_1 = \max_{1 \leq i \leq n} p_i$ . Тогда оператор  $\overline{T(\lambda)}$  имеет один собственный вектор вида

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 + d_2\varphi_2 + \dots + d_n\varphi_n. \quad (4.2)$$

и  $p_1$  присоединенных элементов вида  $\tilde{\varphi}^{(j)} = \varphi_1^{(j)} + \sum_{i=2}^n d_i\varphi_i^{(j)}$ . Доказательство прodelывается аналогично доказательству теоремы 1. Ввиду малости коэффициентов  $d_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в качестве приближений к  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\varphi}^{(j)}$ ,  $j = \overline{2, p_i}$ , можно брать приближения  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{10}^{(j)}$ ,  $j = \overline{2, p_i}$ , соответственно.

Мы находимся в условиях задачи, рассмотренной в работе [8], для оператора  $\overline{T(\lambda)}$ . Как и в [8] применяя к оператору  $\overline{T(\lambda)}$  процесс линеаризации, задачу сводим к линейной задаче, рассмотренной там же. Используя дальше метод ложных возмущений к линеаризованной задаче находим собственное значение  $\lambda$  и соответствующие собственный элемент  $\tilde{\varphi}$  и присоединенные к нему элементы  $\tilde{\varphi}^{(j)}$ ,  $j = \overline{2, p_i}$ .

Определив  $\lambda$  соответствующие собственные элементы  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , находим как решения уравнений:

$$\left[ T(\lambda) + \sum_{i=1}^n (\gamma_{i0}, \cdot) z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Присоединенные элементы определяются из рекуррентной системы:

$$\left[ T(\lambda) + \sum_{i=1}^n (\gamma_{i0}, \cdot) z_{i0} \right] x_s = \sum_{j=1}^s T_j x_{s+1-j}, \quad s = \overline{2, p_i}, \quad x_1 = \varphi_i, \quad x_{s+1} = \varphi_i^{(s)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавурин М. К. О методе ложных возмущений для разыскания собственных значений. ЖВМ и МФ, т.1, № 5, 1961, 757-770.
2. Логинов Б. В., Рахимов Д. Г. О методе ложных возмущений для уточнения приближенно заданных жордановых цепочек. Сб. "Вопросы вычисл. и прикл. математики № 52, «Фан», Ташкент, 1978, 37-39.
3. Рахимов Д. Г. О разыскании собственных чисел и векторов аналитической оператор-функции методом ложных возмущений. Сб. «Дифференц. ур-я с част. произв. и их прилож.», «Фан», Ташкент, 1977, 107- 120.
4. Рахимов Д. Г. Регуляризация в задачах на собственные значения для оператор-функций нелинейно зависящих от спектрального параметра методом линеаризации. Узб. мат. ж., 2009, № 3, с. 163-170.
5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, М., Наука, 1969.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Наука, 1969.
7. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963, 220 с.
8. Loginov B. V., Rakhimov D. G., Sidorov N. A. Development of M. K. Gavurin's Pseudoperturbation Method, Fields Inst. Commun., 2000, v.25, p. 367-381.

## On the calculation of multiple Fredholm's points of discrete spectra of linear operator functions by pseudoperturbation methods.

© D. G. Rakhimov<sup>2</sup>

**Abstract.** In present work considered a problem of finding multiple eigenvalues and corresponding eigenvectors of linear operator functions by pseudoperturbation method, in which process calculations eigenvalues became to finding roots with the same multiplicity of nonlinear equation. For this they apply Stephensen's method. In work for the simplification of calculations, specially constructed operator, for which initial eigenvalue is simple. We also suggest simpler variant for finding corresponding eigenvectors.

**Key Words:** discrete spectra, pseudoperturbation method, Stephensen's method, pseudoperturbation operators.

---

<sup>2</sup>Senior scientist, Institute of Mathematics and information technologies of Academy scientifics of the Republic of Uzbekistan, Tashkent; [davranaka@yandex.ru](mailto:davranaka@yandex.ru)

УДК 534.113

## О задаче сохранения частот осесимметричных колебаний трубы

© Г. Ф. Сафина<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье исследовано влияние жесткостей закреплений на частоты осесимметричных колебаний трубы. Предложен метод, с помощью которого можно определять закрепления трубы, позволяющие сохранять заданные частоты ее колебаний.

**Ключевые слова:** колебания, закрепления, труба, собственные частоты, сохранение частот.

### 1. Введение

Рассматриваемая нами проблема относится к классу задач акустической диагностики. Решение задачи сохранения заданных частот колебаний трубы важно в связи с увеличением техногенных катастроф и опасностями, связанными с изношенностью основных фондов. Исследования подобной проблемы тесно связаны с прямой задачей по влиянию закреплений трубы на частоты ее колебаний и обратной задачей по диагностированию закреплений трубы. Трубы являются важнейшими составляющими топливных конструкций автомобилей, тракторов, судов, самолетов и т.п. Их колебания приводят часто к дребезжанию, вызывающему неприятные ощущения экипажа и пассажиров, что связано с нахождением частот в опасном для здоровья человека диапазоне. Для сохранения безопасных частот колебаний трубопровода не всегда бывает целесообразно менять его длину или же прикреплять сосредоточенные массы. Поэтому возникает задача определения таких закреплений трубы, которые обеспечивали бы заданные частоты ее колебаний. Именно подобной проблеме посвящена представленная работа. Прямые задачи по колебательным процессам в механических системах рассмотрены во многих классических учебниках, таких как [1] – [8]. Обратные задачи акустической диагностики по частотам колебаний закреплений струн, мембран, стержней, пластин, полых труб, труб с жидкостью рассматривались в работах [9] – [16]. В продолжение исследований работ [6], [7], [11] в данной работе проводится исследование зависимости частот осесимметричных колебаний трубы от жесткостей ее закреплений, и решается задача сохранения безопасных частот.

### 2. Прямая задача по осесимметричным колебаниям оболочки

Прямая задача по осесимметричным колебаниям полой трубы известна и сводится к решению краевой задачи с дифференциальным уравнением [6]

$$y^{IV}(x) - \lambda^4 y(x) = 0 \quad (2.1)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} y''(0) = 0; \quad y'''(0) + B_0 l^{-3} y(0) = 0, \\ y''(l) = 0; \quad y'''(l) - B_l l^{-3} y(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Доцент кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал государственного университета, г. Нефтекамск; Safinagf@mail.ru

Здесь

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho h_\Sigma}{D_1} - \frac{E_2 h_2}{D_1 R^2}, \quad (2.3)$$

$R$ ,  $l$ ,  $D$  — радиус, длина, цилиндрическая жесткость трубы;  $E$ ,  $\rho$  — модуль упругости и плотность материала;  $h_\Sigma$  — толщина трубы с учетом каркаса  $\omega_i$  — частота свободных колебаний  $i$ -го тона;  $x$  — осевая координата;  $E I$  — изгибная жесткость краевого ребра, причем величины, характеризующие трубу в осевом направлении, имеют индекс "1" в кольцевом направлении — "2".

В краевых условиях (2.2):  $B$  — относительная жесткость ребер, причем в сечении  $x = 0$  имеем  $B_0$ , в сечении  $x = l$  —  $B_l$ . Поскольку  $\lambda^4 > 0$ , то при двух мнимых и двух действительных корнях характеристического уравнения общее решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \sin \lambda x, \quad (2.4)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные, зависящие от краевых условий.

Частотное уравнение к задаче (2.1), (2.2) найдем стандартным способом, приравнявая к нулю определитель

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}.$$

Здесь  $y_1 = \operatorname{ch} \lambda x$ ,  $y_2 = \cos \lambda x$ ,  $y_3 = \operatorname{sh} \lambda x$ ,  $y_4 = \sin \lambda x$ . Подставляя  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ,  $y_4$  и их производные в уравнение  $\Delta(\omega) = 0$ , получим

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ \frac{B_0}{l^3} & \frac{B_0}{l^3} & \lambda^3 & -\lambda^3 \\ \lambda^2 \operatorname{ch} \lambda l & -\lambda^2 \cos \lambda l & \lambda^2 \operatorname{sh} \lambda l & -\lambda^2 \sin \lambda l \\ \lambda^3 \operatorname{sh} \lambda l + \frac{B_l \operatorname{ch} \lambda l}{l^3} & \lambda^3 \sin \lambda l + \frac{B_l \cos \lambda l}{l^3} & \lambda^3 \operatorname{ch} \lambda l + \frac{B_l \operatorname{sh} \lambda l}{l^3} & -\lambda^3 \cos \lambda l + \frac{B_l \sin \lambda l}{l^3} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая и упрощая определитель, получим следующее частотное уравнение для осесимметричных колебаний трубы

$$\alpha^6(1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha) + \alpha^3(B_0 + B_l)(\operatorname{sh} \alpha \cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha) + 2 B_0 B_l \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha = 0, \quad (2.5)$$

где  $\lambda l = \alpha$  — безразмерный параметр, зависящий от краевых условий.

### 3. Влияние упругих закреплений оболочки на частоты ее осесимметричных колебаний

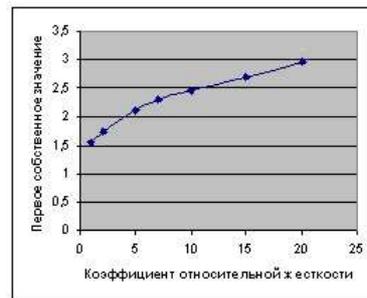
В продолжение исследований работ [6], [7] рассмотрим зависимость собственных частот колебаний трубы от коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  относительных жесткостей ее упругих закреплений.

По результатам решения прямой задачи с дифференциальным уравнением (2.1) и краевыми условиями (2.2) установлено, что при увеличении коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  относительной жесткости краевых ребер оболочки значения собственных частот ее осесимметричных колебаний также увеличиваются.

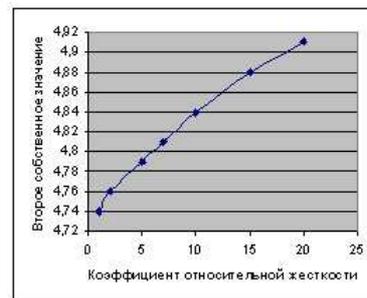
Проведены вычисления собственных значений  $\lambda_k$  при увеличении коэффициента относительной жесткости закрепления на одном конце трубы и фиксированном значении коэффициента на другом ее конце. Например, на рисунке 3.1 для задачи (2.1), (2.2) при параметрах

$$\begin{aligned} \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & h_\Sigma &= 0,05 \text{ м}, & D_1 &= 10^7 \text{ Н/м}, \\ E_2 &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, & h_2 &= 0,03 \text{ м}, & R &= 0,2 \text{ м}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

трубы приведен график зависимости собственного значения  $\lambda_1$  колебаний оболочки от коэффициента  $B_l$  при фиксированном коэффициенте  $B_0 = 1$  краевых условий. На рисунке 3.2 показана подобная зависимость от коэффициента  $B_l$  (при  $B_0 = 1$ ) собственного значения  $\lambda_2$ .



Р и с у н о к 3.1



Р и с у н о к 3.2

Такое изменение касается не только первых собственных значений  $\lambda_k$  (а следовательно и  $\omega_k$ ) рассматриваемой задачи, но и всех последующих частот колебаний трубы. Результаты вычислений, например, первых пяти собственных значений  $\lambda_k$  спектральной задачи (2.1), (2.2) при различных коэффициентах  $B_l$  относительной жесткости упругого закрепления на конце  $x = l$  трубы при фиксированном коэффициенте  $B_0 = 1$  на конце  $x = 0$ , приведены в таблице 1.

Аналогичную зависимость между величинами относительной жесткости и соответствующими собственными значениями спектральной задачи можно получить при одновременном изменении коэффициентов относительной жесткости закреплений трубы. Соответствующие результаты решения прямой задачи (2.1), (2.2) при увеличении обоих коэффициентов относительных жесткостей закреплений трубы представлены рисунке 2 (а), 2 (б) и таблице 2.

Таким образом, по решениям прямой спектральной задачи установлено, что увеличение коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений краев оболочки ведет к увеличению собственных значений спектральной задачи, и соответственно к увеличению собственных частот осесимметричных колебаний трубы.

|                     | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_5$ |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $B_0 = 1, B_l = 1$  | 1,5641      | 4,7488      | 7,8573      | 10,9971     | 14,1378     |
| $B_0 = 1, B_l = 2$  | 1,7501      | 4,7583      | 7,8594      | 10,9978     | 14,1379     |
| $B_0 = 1, B_l = 5$  | 2,1249      | 4,7869      | 7,8656      | 11,0001     | 14,1392     |
| $B_0 = 1, B_l = 7$  | 2,2908      | 4,8062      | 7,8698      | 11,0016     | 14,1400     |
| $B_0 = 1, B_l = 10$ | 2,4779      | 4,8355      | 7,8769      | 11,0039     | 14,1410     |
| $B_0 = 1, B_l = 20$ | 2,8661      | 4,9348      | 7,8975      | 11,0115     | 14,1446     |

Таблица 1: зависимость значений  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) спектральной задачи (2.1), (2.2) от коэффициента  $B_l$  ( $B_0 = 1$ ) краевых условий при параметрах (3.1) трубы

|                      | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_5$ |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $B_0 = 2, B_l = 2$   | 1,8589      | 4,7676      | 7,8614      | 10,9986     | 14,1385     |
| $B_0 = 3, B_l = 3$   | 2,0560      | 4,7862      | 7,8656      | 11,0001     | 14,1392     |
| $B_0 = 5, B_l = 5$   | 2,0560      | 4,8231      | 7,8739      | 11,0031     | 14,1407     |
| $B_0 = 7, B_l = 7$   | 2,5351      | 4,8596      | 7,8822      | 11,0061     | 14,1421     |
| $B_0 = 10, B_l = 10$ | 2,7666      | 4,9133      | 7,8946      | 11,0107     | 14,1442     |
| $B_0 = 20, B_l = 20$ | 2,8961      | 5,0004      | 7,9155      | 11,0182     | 14,1478     |

Таблица 2: зависимость значений  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) задачи (2.1), (2.2) от коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  краевых условий при параметрах (3.1) трубы

Заметим, что такое соответствие между коэффициентами относительной жесткости упругих краевых ребер оболочки и собственными частотами ее осесимметричных колебаний справедливы при любых, отличных от (3.1), физических параметрах трубы.

Проведенное выше исследование влияния краевых условий на значения собственных частот осесимметричных колебаний цилиндрической важно для решения проблемы сохранения заданных частот ее колебаний при изменениях физических параметров оболочки или при изменениях жесткости закрепления на одном из ее краев. Последняя же проблема разрешима при решении обратной задачи к данной прямой задаче.

#### 4. Задача сохранения заданных частот колебаний

В работе [11] поставлена к прямой спектральной задаче обратная: по собственным частотам свободных осесимметричных колебаний трубы найти коэффициенты ее упругих закреплений.

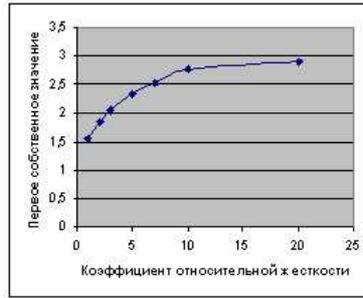
Задача решена по известным двум собственным частотам колебаний. Поскольку учитывается и абсолютно жесткое закрепление, то краевые условия (2.2) задачи записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= y''(0) = 0; \\
 U_2 &= a_1 y'''(0) + a_0 y(0) = 0; \\
 U_3 &= y''(l) = 0; \\
 U_4 &= b_1 y'''(l) - b_0 y(l) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

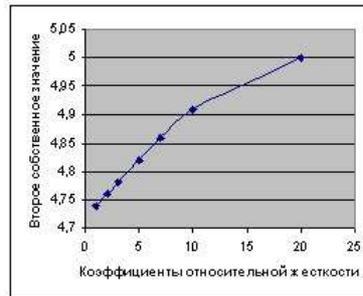
Здесь

$$B_0 l^{-3} = a_0 a_1^{-1}; \quad B_1 l^{-3} = b_0 b_1^{-1}. \tag{4.2}$$

При абсолютно жестком закреплении ребер оболочки в краевых условиях (2.2) остаются только вторые слагаемые. Этому же соответствует случай  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$  в



Р и с у н о к 3.3



Р и с у н о к 3.4

Рис. 2 – Зависимость первого собственного значения  $\lambda_1$  (а), второго собственного значения  $\lambda_2$  (б) задачи (2.1), (2.2) от коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  краевых условий при параметрах (3.1) трубы

краевых условиях (4.1).

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов форм  $U_2$  и  $U_4$  краевых условий (4.1) через:

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

а миноры, составленные из  $i$ -го и  $j$ -го столбцов этой матрицы — через  $M_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 4$ ). Введем также в рассмотрение векторы

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b} = (0, 0, -b_0, b_1)^T, \quad (i = 1; 2).$$

В таких обозначениях задача диагностирования формулируется следующим образом. Известны отличные от нуля собственные значения  $\lambda_i$  задачи (2.1), ранг матрицы  $A$  равен 2, миноры  $M_{12}$  и  $M_{34}$  этой матрицы равны нулю; неизвестны коэффициенты краевых условий (4.1). Требуется восстановить матрицу  $A$  с точностью до линейной эквивалентности.

Частотное уравнение для краевой задачи (2.1), (4.1) находим стандартными методами:

$$M_{13} f_1(\lambda_i) + (M_{14} - M_{23}) f_2(\lambda_i) + M_{24} f_4(\lambda_i) = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (4.4)$$

в котором функции  $f_i(\lambda_i)$  выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_i) &= 2 \operatorname{sh}(\lambda_i l) \sin(\lambda_i l); \\ f_2(\lambda_i) &= \lambda_i^3 (\operatorname{ch}(\lambda_i l) \sin(\lambda_i l) - \operatorname{sh}(\lambda_i l) \cos(\lambda_i l)); \\ f_3(\lambda_i) &= \lambda_i^6 (\operatorname{ch}(\lambda_i l) \cos(\lambda_i l) - 1). \end{aligned}$$

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — два собственных значения спектральной задачи (2.1), (4.1), соответствующие первым двум частотам осесимметричных колебаний трубы. Тогда равенства (4.4) представляют собой систему двух уравнений от трех неизвестных  $M_{13}$ ,  $(M_{14} - M_{23})$ ,  $M_{24}$ . Если ранг матрицы системы уравнений (4.4) равен двум, то система имеет единственное решение с точностью до постоянного множителя. Определив все неизвестные миноры  $M_{ij}$ , можно найти матрицу  $A$  с точностью до линейных эквивалентных матриц, т.е. восстановить краевые условия спектральной задачи.

Применение найденного метода рассмотрим на примере (для определенности примем, что  $l = 1$ ).

Пример 1. Известны собственные значения задачи (2.1), (4.1)  $\lambda_1 = 1,5615$ ,  $\lambda_2 = 4,7488$ , соответствующие первым двум собственным частотам осесимметричных колебаний трубы. Определить коэффициенты относительной жесткости упругих закреплений.

При заданных собственных значениях решение системы уравнений (4.4), найденное с помощью ЭВМ, имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{13} &= -0,5000 C; \\ M_{24} &= -0,5000 C; \\ M_{14} - M_{23} &= C. \end{aligned}$$

Так как  $M_{13} \neq 0$ , то  $a_0 \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$ . Разделим первую и вторую строки матрицы  $A$  соответственно на  $a_0$  и  $b_0$ . После этих преобразований (с точностью до эквивалентных матриц) матрицу  $A$  можно представить в виде:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_1 \end{array} \right\|.$$

Отсюда  $M_{13} = -1$ ,  $M_{14} - M_{23} = 2$ ,  $M_{24} = 1$ . Поскольку  $M_{14} - M_{23} = a_1 + b_1$ ,  $M_{24} = a_1 b_1$ , то из равенств  $a_1 + b_1 = 2$  и  $a_1 b_1 = 1$  по обратной теореме Виета имеем, что  $a_1 = 1$  и  $b_1 = 1$ . Значит

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Далее по формулам (4.2) определим коэффициенты относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки:  $B_0 = 1$ ,  $B_l = 1$ . Заметим, что относительные жесткости упругих краевых ребер определены верно, по-другому, определены верно коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ . Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , приведенные выше, совпадают с первыми двумя корнями частотного уравнения (4.4) при значениях  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$ , т.е. при  $M_{13} = -1$ ,  $M_{14} = 1$ ,  $M_{23} = -1$ ,  $M_{24} = 1$ .

В продолжение исследований поставим и решим задачу сохранения заданных частот колебаний при изменениях в закреплениях трубы.

Пусть по практической надобности необходимо изменить закрепление трубы на одном из ее концов. При этом по исследованиям прямой задачи показано, что частоты осесимметричных колебаний трубы изменятся. Возникает вопрос: как при этом сохранить прежние безопасные частоты колебаний? Эту проблему мы предлагаем решить с помощью изменения коэффициента относительной жесткости на другом конце трубы.

Действительно, если известны первые две собственные частоты колебаний  $\omega_i$ , а значит соответствующие им значения  $\alpha_i$ , то подставляя значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в уравнение (2.5) получим систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_1)x + f_3(\alpha_1)y &= 0, \\ f_1(\alpha_2) + f_2(\alpha_2)x + f_3(\alpha_2)y &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

в которой

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_i) &= \alpha_i^6(1 - \operatorname{ch} \alpha_i \cos \alpha_i), \\ f_2(\alpha_i) &= \alpha_i^3(\operatorname{sh} \alpha_i \cos \alpha_i - \operatorname{ch} \alpha_i \sin \alpha_i), \\ f_3(\alpha_i) &= 2 \sin \alpha_i \operatorname{sh} \alpha_i, \\ x &= B_0 + B_l, y = B_0 B_l, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть определитель матрицы системы уравнений (4.5) отличен от нуля. Тогда по теореме Крамера система имеет решение, определяемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_x &= f_1(\alpha_2) f_3(\alpha_1) - f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_2), \\ \Delta_y &= f_1(\alpha_2) f_2(\alpha_1) - f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2), \\ \Delta &= f_2(\alpha_1) f_3(\alpha_2) - f_2(\alpha_2) f_3(\alpha_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Полученные значения  $x$  и  $y$  приводят к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} B_0 + B_l &= x, \\ B_0 B_l &= y, \end{aligned}$$

из которой по обратной теореме Виета определяются коэффициенты  $B_0, B_l$ :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 - 4y}), \\ B_l &= \frac{1}{2}(x \mp \sqrt{x^2 - 4y}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Формулы (4.9) показывают двойственность получаемых значений  $B_0, B_l$ .

Таким образом, если известны первые две собственные частоты колебаний  $\omega_i$  спектральной задачи (а значит соответствующие им значения  $\alpha_i$ ), которые необходимо сохранить при изменении коэффициента жесткости на одном конце трубы, то используя аналитические формулы (4.6) — (4.9) можно определить необходимое для этого изменение в значении коэффициента жесткости на другом конце трубы.

При этом в формулы (4.6) — (4.9) подставляются значения частот  $\alpha_i$ , соответствующие сохраняемым частотам  $\omega_i$ , а также измененное значение коэффициента относительной жесткости одного из краев оболочки, определяя тем самым соответствующее изменение в коэффициенте жесткости на другом ее краю.

Рассмотрим задачу сохранения заданных безопасных частот осесимметричных колебаний оболочки на конкретных примерах.

**Пример 2.** Известны физические параметры (3.1) цилиндрической оболочки. Оболочка закреплена пружинами с коэффициентами относительной жесткости, равными двум. Определить необходимые для сохранения частот осесимметричных колебаний оболочки изменения в ее закреплениях, если по практической надобности коэффициент относительной жесткости пружины, с которой закреплён левый конец оболочки увеличивается до трех.

При коэффициентах  $B_0 = 2$  и  $B_l = 2$  по решению прямой задачи (2.1), (2.2) получим, что частоты осесимметричных колебаний оболочки следующие:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 19611,667; \\ \omega_2 &= 19612,013; \\ \omega_3 &= 19613,144; \\ \omega_3 &= 19615,792. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При этом соответствующие собственные значения таковы:

$$\lambda_1 = 4,7676; \quad \lambda_2 = 7,8614; \quad \lambda_3 = 10,9986; \quad \lambda_4 = 14,1385.$$

По условию на левом конце оболочки необходимо усилить жесткость закрепления, а именно, увеличить коэффициент жесткости  $B_0$  с двух до трех, оставляя частоты колебаний прежними. Определим соответствующее закрепление на правом конце оболочки и ответим на вопрос: сохраняются ли заданные частоты (4.10)?

По проведенным исследованиям влияния коэффициентов относительной жесткости на частоты осесимметричных колебаний трубы имеем, что если коэффициент  $B_0$  увеличить, то частоты также увеличатся. Наша задача — оставить частоты прежними, т. е. неизменными.

Для этого значения  $\alpha_1 = 4,7676$  и  $\alpha_2 = 7,8614$ , соответствующие двум частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  из (4.10), поставим в систему уравнений (4.5) и получим при  $l = 1$  следующую систему

$$\begin{aligned} -26397,96874 + 6716,943709 \cdot x - 117,4520412 \cdot y &= 0; \\ 0,2530379755 \cdot 10^7 - 635190,2256 \cdot x + 2595,263294 \cdot y &= 0; \end{aligned}$$

Решив с помощью ЭВМ последнюю систему уравнений находим, что

$$\begin{aligned} x &= 3,9999; \\ y &= 3,9999. \end{aligned}$$

Эти же результаты получаются, если использовать для определения  $x$ ,  $y$  аналитические формулы (4.6) — (4.9). По найденным значениям  $x$ ,  $y$  и формулам (4.9) при  $B_0 = 3$  получим, что  $B_l$  должно быть равно 0,999999713.

Получили, что для сохранения заданных частот при увеличении коэффициента жесткости  $B_0$  с 2 до 3 необходимо коэффициент  $B_l$  уменьшить с 2 до 0,99.

Заметим, что такое же изменение коэффициента жесткости  $B_l$  необходимо провести для сохранения не только первых двух частот, но последующих, например, третьей и четвертой собственной частоты осесимметричных колебаний оболочки при параметрах (3.1).

Отметим также, что определяя частоты колебаний трубы при коэффициентах  $B_0 = 3$  и  $B_l = 0,9999$  по решению задачи (2.1), (2.2) получим те же частоты (4.10) ее осесимметричных колебаний.

Пример 3. Труба закреплена пружинами с коэффициентами относительной жесткости на правом конце равным двенадцати и на левом — одному. Известны также параметры (3.1) цилиндрической оболочки. Необходимо увеличить коэффициент относительной жесткости пружины на левом конце трубы с единицы до шести, сохраняя прежние частоты колебаний оболочки. Определить необходимые для этого изменения в закреплении на правом конце трубы.

По решению прямой задачи (2.1), (2.2) при  $B_0 = 1$  и  $B_l = 12$  получим следующие собственные частоты осесимметричных колебаний трубы

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 19686,801; \\ \omega_2 &= 20127,523; \\ \omega_3 &= 21508,482; \\ \omega_4 &= 24439,134, \end{aligned} \tag{4.11}$$

и соответствующие им собственные значения

$$\lambda_1 = 4,8552; \quad \lambda_2 = 7,8803; \quad \lambda_3 = 11,0054; \quad \lambda_4 = 14,1417.$$

На левом конце трубы усилим жесткость закрепления с  $B_0 = 1$  до  $B_0 = 6$ , оставляя прежние частоты (4.11) колебаний.

Подставляя  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в систему уравнений (4.5) получим:

$$\begin{aligned} -106636,4315 + 8320,120329 \cdot x - 127,0945912 \cdot y &= 0; \\ 0,8600692576 \cdot 10^7 - 664032,3747 \cdot x + 2643,968036 \cdot y &= 0; \end{aligned}$$

Из последней системы находим неизвестные  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} x &= 13,0000; \\ y &= 11,9999. \end{aligned}$$

Эти же результаты получаются, если использовать аналитические формулы (4.6) – (4.9). При  $B_0 = 6$  по значениям  $x$  и  $y$  и формулам (4.9) получим:

$$B_l = 7,00000011.$$

Значит, для сохранения заданных частот колебаний при увеличении коэффициента жесткости  $B_0$  на левом конце трубы с 1 до 6 необходимо уменьшить коэффициент жесткости  $B_l$  на правом конце с 12 до 7.

Такая же обратная зависимость между жесткостями закреплений справедлива при сохранении безопасных частот ее осесимметричных колебаний и при других, отличных от параметров (3.1) оболочки.

| $\omega_i, \text{с}^{-1}$ | $B_0$ | $B_l$ | $B_0$ | $B_l$  | $B_0$ | $B_l$  |
|---------------------------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|
| $\omega_1=19611,667$      | 2,5   | 1,499 | 3     | 0,999  | 3,5   | 0,499  |
| $\omega_2=19612,013$      |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_3=19613,144$      |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_4=19615,792$      |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_1=20298,504$      | 27    | 12,99 | 32    | 7,999  | 35    | 4,999  |
| $\omega_2=23396,260$      |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_3=31479,336$      |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_4=45054,811$      |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_1=43324,270$      | 60    | 39,99 | 75    | 24,999 | 80    | 19,999 |
| $\omega_2=84610,649$      |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_3=156424,625$     |       |       |       |        |       |        |
| $\omega_4=255043,261$     |       |       |       |        |       |        |

Таблица 3: значения коэффициентов  $B_0$ ,  $B_l$ , соответствующие неизменным значениям собственных частот для задачи (2.1), (2.2) при параметрах (4.12) системы

Например, в следующей таблице 3 для задачи (2.1), (2.2) приведены зависимости между коэффициентами  $B_0$ ,  $B_l$  относительной жесткости краевых ребер оболочки, необходимые для сохранения заданных частот ее колебаний при параметрах оболочки:

$$\begin{aligned} \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & h_\Sigma &= 0,04 \text{ м}, & D_1 &= 9^7 \text{ Н/м}, \\ E_2 &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, & h_2 &= 0,03 \text{ м}, & R &= 0,25 \text{ м}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Приведенные примеры показывают, что для сохранения заданных (безопасных) частот осесимметричных колебаний трубы необходимо провести соответствующие изменения в

упругих закреплениях ее краев. Причем, при увеличении коэффициента жесткости на одном конце трубы для сохранения прежних частот необходимо уменьшить коэффициент жесткости на другом ее конце, и наоборот. Формулы (4.6)–(4.9) позволяют определять соответствующие значения коэффициентов  $B_0$ ,  $B_l$  относительной жесткости краевых ребер оболочки, при которых частоты осесимметричных колебаний остаются заданными.

## 5. Заключение

Трубы являются составляющими многих механических систем и технических конструкций. Изменения численных значений частот колебаний трубы свидетельствуют об изменениях жесткости закреплений ее краев. Поэтому для обнаружения ненадежности в механической конструкции, связанной с изменением жесткости закреплений труб, можно использовать собственные частоты колебаний, вызванные постукиванием по трубе. Численные значения уже первых двух частот, найденные с помощью частотомера, позволяют по рассмотренному методу оценить необходимость изменений упругих краев трубы в системе. В этом и состоит преимущество рассматриваемого метода.

Таким образом, полученный метод позволяет определять такие закрепления труб, при которых сохраняются заданные частоты ее закреплений, увеличивая тем самым срок безаварийной службы механической системы, составляющими которой являются трубы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
2. Павлов Б. В. Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971.
3. Генкин М. Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. М.: Машиностроение, 1987.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978.
5. Агеносов Л. Г., Саченков А.В. Устойчивость и свободные колебания тонких цилиндрических оболочек кругового сечения при разных краевых условиях. Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек». Вып.2. Изд. Казанск. гос. ун-та, 1964.
6. Антоненко Э. В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами. Прикладная механика, Т.11. Вып.6, 1975 – С.44–50.
7. Антоненко Э. В. Частоты свободных колебаний гладких подкрепленных цилиндрических оболочек с упруго подкрепленными краями. Прикладная механика, Т 25, Вып.8, 1989 – С.122–126.
8. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964, –288с.
9. Ахтямов А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.

10. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.
11. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки. //Техническая акустика, №19, 2004.
12. Сафина Г. Ф. Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. – С.55–59.
13. Сафина Г. Ф. Определение закреплений трубопровода с протекающей по нему жидкостью. Обозрение прикладной и промышленной математики". 2005. Т.12. Вып.4. – С. 1079–1080.
14. Сафина Г.Ф. Диагностирование закреплений трубопровода с жидкостью // Приборы и системы. Управление. Контроль. Диагностика. 2006. № 3. – С.59-60.
15. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.
16. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. 300 с.

## About a problem of preservation of frequencies Pipe fluctuations

© G F. Safina<sup>2</sup>

**Abstract.** In article influence fastenings on frequencies is investigated pipe fluctuations. The method, with the help is offered Which it is possible to define the pipe fastenings, allowing to keep The set frequencies of its fluctuations.

**Key Words:** fluctuations, fastenings, a pipe, Own frequencies, preservation of frequencies.

---

<sup>2</sup>The senior lecturer of chair Mathematical modelling, Neftekamsk branch The Bashkir state university, Neftekamsk; Safinagf@mail.ru

УДК 517.9

# Математическая модель неизотермических автоколебаний в реакции окисления окиси этилена

© С.И. Спивак<sup>1</sup>, А.В. Балаев<sup>2</sup>, И.А. Нуриахметов<sup>3</sup>

**Аннотация.** Рассматривается сложная химическая реакция окисления окиси этилена. Для этой реакции экспериментально были получены колебания температуры. Возникла задача построения математической модели, позволяющей описывать автоколебательный режим химических реакций. В настоящей работе на основании схемы протекания реакции будет выписана математическая модель в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений и системы квазистационарных условий. Решение этой системы должно иметь периодический характер.

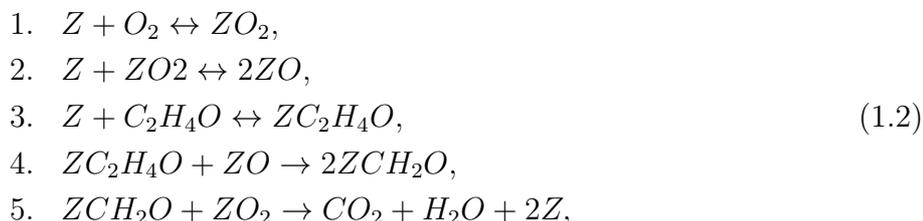
**Ключевые слова:** механизм сложной химической реакции, обратные задачи, математическая интерпретация измерений, погрешность эксперимента, неизотермическая кинетика.

## 1. Постановка задачи

Окисление окиси этилена описывается следующим уравнением:



Стадийная схема реакции:



где  $Z$  - активные центры поверхности катализатора. Обозначения: концентрации промежуточных веществ:

$$\begin{aligned} z &= [Z], \\ x_1 &= [ZO_2], \\ x_2 &= [ZO], \\ x_3 &= [ZC_2H_4O], \\ x_4 &= [ZCH_2O], \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + z &= 1; \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; S.Spivak@bashnet.ru.

<sup>2</sup>Старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования, Институт Нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; abalaev@gmail.com.

<sup>3</sup>Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Нефтекамск; ildares@mail.ru.

концентрации основных веществ:

$$\begin{aligned}c_1 &= [C_2H_4O], \\c_2 &= [O_2], \\c_3 &= [CO_2], \\c_4 &= [H_2O].\end{aligned}$$

Реакция (1.1), протекающая по механизму (1.2), в реакторе идеального перемешивания описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= (-k_3c_1(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + k_{-3}x_3)\frac{L}{N} + (c_1^0 - c_1)\frac{V}{N}, \\ \dot{c}_2 &= (-k_1c_2(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + k_{-1}x_1)\frac{L}{N} + (c_2^0 - c_2)\frac{V}{N}, \\ \dot{c}_3 &= k_5x_1x_4\frac{L}{N} + (c_3^0 - c_3)\frac{V}{N}, \\ \dot{c}_4 &= k_5x_1x_4\frac{L}{N} + (c_4^0 - c_4)\frac{V}{N},\end{aligned}$$

и системой квазистационарных уравнений:

$$\begin{aligned}k_1c_2(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - k_{-1}x_1 - \\ - k_2x_1(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + k_{-2}x_2^2 - k_5x_1x_4 &= 0, \\ 2(k_2(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)x_1 - k_{-2}x_2^2) - k_4x_2x_3 &= 0, \\ k_3(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)c_1 - k_{-3}x_3 - k_4x_2x_3 &= 0, \\ 2k_4x_2x_3 - k_5x_1x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + z &= 1.\end{aligned}$$

Уравнение на температуру имеет вид:

$$\dot{\theta} = (\theta^0 - \theta)\frac{V}{N} + \frac{Q}{C_p T^0} k_5 x_1 x_4, \quad \theta = \frac{T}{T^0},$$

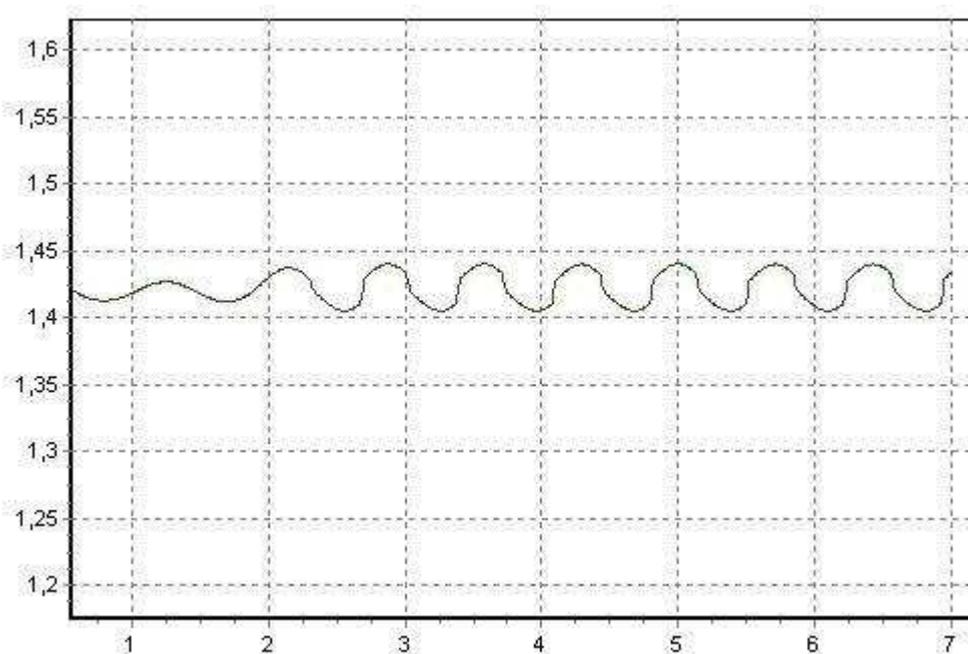
где  $k_{\pm i} = k_{\pm 0i} e^{-b_{\pm i}} e^{\frac{b_{\pm i}}{\theta}}$  - константы скоростей стадий ( $k_{\pm 0i}$  и  $b_{\pm i} = \frac{E_{\pm i}}{RT^0}$  - предэкспоненты и энергии активации констант скоростей стадий),  $Q$  - тепловой эффект реакции (1),  $C_p = \text{const}$  - средняя теплоемкость реакционной смеси,  $V$  - скорость газового потока в реакторе,  $N$  - число молекул основных веществ в газовом объеме реактора,  $L$  - число центров на всей поверхности образца катализатора,  $T$  - текущая температура слоя катализатора,  $T^0$  - начальная температура,  $c_i^0$  - начальные концентрации основных веществ.

## 2. Ход решения

Для решения системы дифференциальных уравнений использовался неявный метод Эйлера. Для решения квазистационарных уравнений использовался метод Ньютона, первоначальное приближение для которого находится методом простой итерации.

### 3. Пример расчета температуры

Начальные данные:  $T^0 = 593^0 K$ ,  $Q = 1205000$  Дж/моль;  $C_p = 57.178$  Дж/(моль\*K); ,  
 $R = 8.31$ ;  $L = 3.5 * 10^{19}$  центров;  $N = 6.448 * 10^{20}$  молек.  
 $k_{-1} = 7$ ;  $k_{-2} = 10$ ;  $k_{-3} = 10$ ;  $k_1 = 11$ ;  $k_2 = 1$ ;  $k_3 = 0.85$ ;  $k_4 = 8$ ;  $k_5 = 1$ ;  
 $b_{-1} = 13.042$ ;  $b_{-2} = 34.944$ ;  $b_{-3} = 29.486$ ;  $b_1 = 5.529$ ;  $b_2 = 20.029$ ;  $b_3 = 2.029$ ;  $b_4 = 31.072$ ;  
 $b_5 = 41.682$



Р и с у н о к 3.1

График приведенной температуры  $\theta(t)$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский Г.С., Спивак С.И. Математические модели химической кинетики. - М.: Знание, 1977.

# Mathematical model nothisothermal Fluctuations in oxidation reaction carbonmonooxide

© S.I. Spivak<sup>4</sup>, A.V. Balaev<sup>5</sup>, I.A. Nuriakhmetov<sup>6</sup>

**Abstract.** Difficult chemical reaction of oxidation carbonmonooxide is considered. For this reaction have experimentally been received fluctuations of Temperature. There was a problem of construction of mathematical model, Allowing to describe a self-oscillatory mode of chemical reactions. In In this work on the basis of the scheme of course of reaction will be The mathematical model in the form of system of the nonlinear is written out The differential equations and system quasistationary conditions. The decision of this system should have periodic character.

**Key Words:** the mechanism Difficult chemical reaction, return problems, mathematical Interpretation of measurements, experiment error, nothisothermal kynetic.

---

<sup>4</sup>Managing chair of the mathematical Modelling, GOU VPO «the Bashkir state university», Ufa; S.Spivak@bashnet.ru.

<sup>5</sup>The senior scientific employee of laboratory of the mathematical Modelling, Institute of Petrochemistry and Catalysis the Russian Academy of Sciences, Ufa; abalaev@gmail.com.

<sup>6</sup>The senior teacher of chair of the mathematical Modelling, Neftekamsk branch GOU VPO «Bashkir The state university», Neftekamsk; ildares@mail.ru.

УДК 517.9

# Метод анализа информативности кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики

© С. И. Спивак<sup>1</sup>, А. С. Исмагилова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Предлагается теоретико-графовый метод выделения базиса независимых параметрических функций кинетических констант. Метод позволяет разложить исходную задачу на ряд существенно более простых. Принципиально используется структура схем протекания реакции.

**Ключевые слова:** Информативность, параметры модели, базис параметрических функций, теория графов.

## 1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4], где рассмотрен метод анализа неединственности решения обратных задач химической кинетики. Процесс определения числа и вида независимых параметрических функций (НПФ) констант алгоритмичен. Основной сложностью, возникающей при анализе конкретных сложных реакций, является громоздкость вычислений. При этом следует учесть, что имеются в виду аналитические вычисления с нелинейными выражениями. Автоматизация вычислений становится самостоятельной проблемой при анализе информативности. В настоящей работе предлагается теоретико-графовый метод, позволяющий разложить исходную задачу анализа выделения базиса независимых параметрических функций кинетических констант на ряд существенно более простых. При этом принципиально используется структура схем протекания сложных реакций. Система упрощенных выражений исследуется на основе алгоритма, изложенного в [4]. Далее показывается, что объединение компонент базисов каждой из упрощенных подсистем образует полный базис исходной системы.

Основным в настоящем исследовании является понятие маршрута, которое было введено Д.Хариути и М.И.Темкиным [5].

Под маршрутом будем понимать вектор, умножение элементов которого на соответствующие стадии механизма сложной реакции вместе с последующим сложением стадий приводит к итоговому уравнению реакции, которое уже не содержит промежуточных веществ. Иными словами, маршрут – это путь исключения промежуточных веществ.

Известно, что число независимых маршрутов  $P$  равно:  $P = S - I$ , где  $S$  – число стадий,  $I$  – число независимых промежуточных веществ.

## 2. Графическая интерпретация маршрутов химических реакций

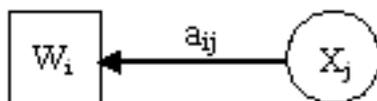
Графический метод основан на том, что детальный механизм сложной реакции может быть представлен четырьмя эквивалентными формами:

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; S.Spivak@bashnet.ru.

<sup>2</sup>Доцент кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г.Нефтекамск; IsmagilovaAS@rambler.ru

- 1) система химических уравнений в символьной форме, с перечислением всех компонентов и стадий реакций, с соответствующими стехиометрическими коэффициентами;
- 2) система обыкновенных дифференциальных уравнений (кинетические уравнения);
- 3) матричное представление систем стехиометрических и кинетических уравнений;
- 4) связный ориентированный двудольный граф.

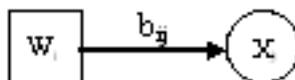
Общим методом геометрического описания механизмов сложных реакций стали графы, рассматриваемые А.И.Вольпертом [6]. Граф системы реакции представляет собой ориентированный двудольный граф, т.е. граф, в котором указаны направления ребер, и вершины которого делятся на два непересекающихся множества – вершины-реакции и вершины-вещества.



Р и с у н о к 2.1

Вещество  $X_j$  расходуется в реакции  $W_i$

Направление ребер определяют следующим образом. Если вещество  $X_j$  расходуется в реакции  $W_i$ , то отрезок имеет направление от  $X$ -вершины к  $W$ -вершине и имеет вес, численно равный стехиометрическому коэффициенту  $a_{ij}$  2.1.



Р и с у н о к 2.2

Вещество  $X_j$  образуется в реакции  $W_i$

Если вещество  $X_j$  образуется в реакции  $W_i$ , то отрезок имеет направление от  $W$ -вершины к  $X$ -вершине и имеет вес, численно равный продуктному стехиометрическому коэффициенту  $b_{ij}$  (2.2).

Если вещество  $X_j$  не участвует в реакции  $W_i$ , то соответствующие вершины не соединены отрезком.

Взаимно однозначное соответствие между двудольным графом сложной реакции и матричной формой записи позволяет сформулировать графические правила нахождения всех независимых маршрутов и их графические образы (подграфы) в двудольном графе реакции.

Справедлива следующая теорема:

**Т е о р е м а 2.1.** *Маршрут реакции есть циклический подграф исходного графа. Объединение таких подграфов образует граф исходной системы реакции. Число независимых маршрутов равно числу независимых циклов графа Вольперта.*

Из приведенной теоремы следует следующий алгоритм нахождения маршрутов на основе графа реакции:

а) Упрощение графа Вольперта. Под упрощением графа будем понимать отбрасывание висячих вершин, т.е. таких вершин, которые имеют одну дугу.

б) Нахождение циклических подграфов, образованных последовательностью вершин-веществ и вершин-реакций.

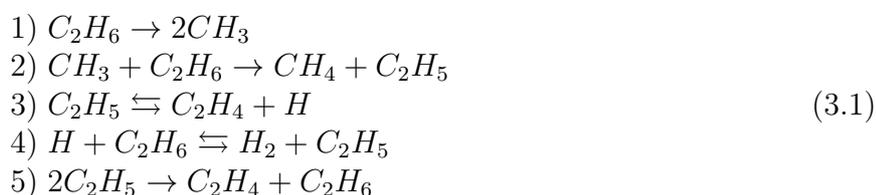
с) Проверка балансовых соотношений уравнений, соответствующих найденным подграфам. Сумма весов исходящих и входящих дуг в вершину-реакцию должна быть равна нулю. Иначе, надо подобрать коэффициент, при умножении на который выполняется данное условие.

д) Определение маршрутов. Каждой координате маршрута ставится в соответствие вес дуги, исходящей из вершины-реакции с учетом коэффициента умножения.

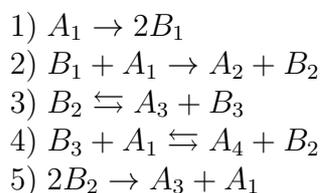
Важной особенностью маршрута является тот факт, что часть компонент в маршруте обычно равны нулю. Это значит, маршрут выделяет из всей совокупности стадий некоторую подсистему, в которую входит только часть стадий исходного механизма. Основная идея предлагаемого метода состоит в том, что вместо анализа информативности для всей сложной схемы реакций рассматриваются те схемы, которые отвечают за протекание реакции по каждому из независимых маршрутов. Вместо одной сложной системы мы получаем несколько существенно более простых. Число исследуемых упрощенных систем равно числу независимых маршрутов. Очевидно, что определенные для них компоненты базиса параметрических функций будут компонентами базиса и для исходных сложных систем.

### 3. Пример

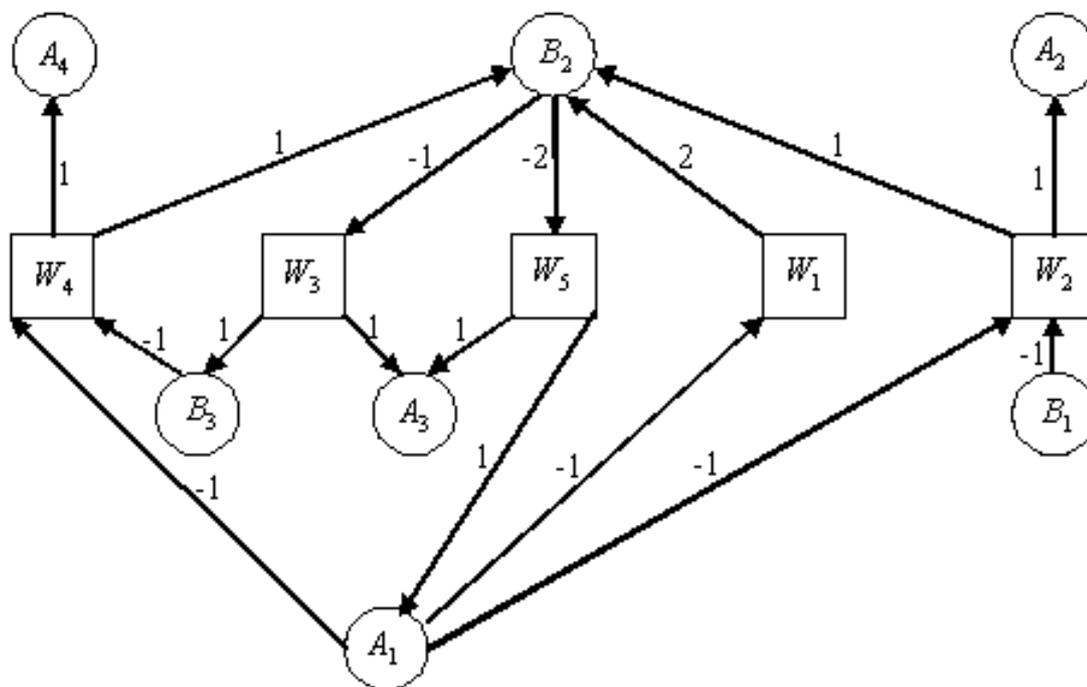
В качестве примера рассмотрим нелинейный относительно неизмеряемых веществ механизм реакции пиролиза этана.



Измеряются с погрешностью концентрации четырех веществ:  $C_2H_6$ ,  $CH_4$ ,  $C_2H_4$ ,  $H_2$ ; не измеряются концентрации промежуточных веществ:  $CH_3$ ,  $C_2H_5$ ,  $H$ . Перепишем систему реакций (3.1) следующим образом:



Здесь  $A_1 = C_2H_6$ ,  $A_2 = CH_4$ ,  $A_3 = C_2H_4$ ,  $A_4 = H_2$ ,  $B_1 = CH_3$ ,  $B_2 = C_2H_5$ ,  $B_3 = H$ .



Р и с у н о к 3.1

Граф Вольперта системы реакции

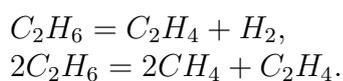
Граф рассматриваемой системы представлен на 3.1.

Число независимых маршрутов  $P = 2$ :

$$M_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^T,$$

$$M_2 = (1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1)^T.$$

Итоговые уравнения, соответствующие маршрутам  $M_1$ ,  $M_2$ :

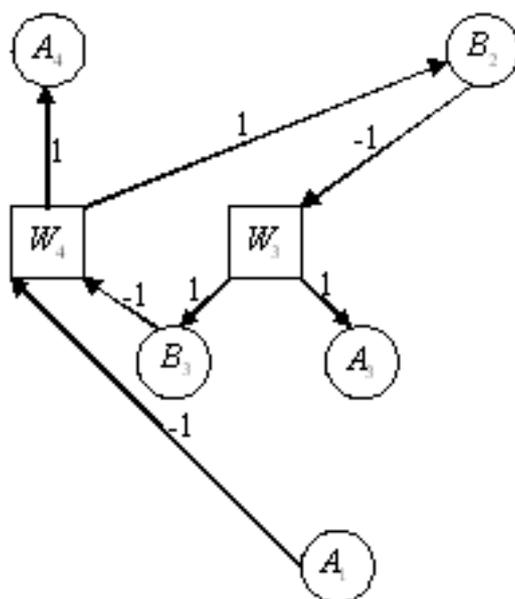


Из всей системы реакций будем рассматривать согласно маршруту  $M_1$  третью и четвертую стадии:



согласно маршруту  $M_2$  первую, вторую и пятую стадии:

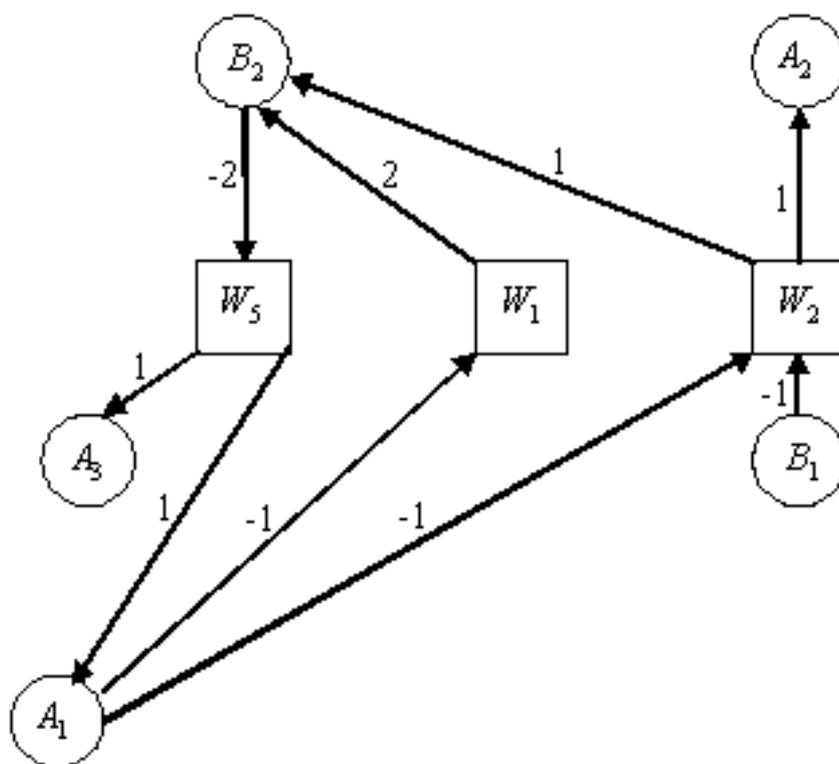




Р и с у н о к 3.2

Граф, соответствующий маршруту  $M_1$

Граф, соответствующий подсистеме (3.2), изображен на 3.2.



Р и с у н о к 3.3

Граф, соответствующий маршруту  $M_2$

Граф, соответствующий подсистеме (3.3), изображен на 3.3.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для подсистемы (3.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d[A_1]}{dt} &= -w_4, & \frac{d[A_3]}{dt} &= w_3, & \frac{d[A_4]}{dt} &= w_4, \\ \frac{d[B_2]}{dt} &= -w_3 + w_4, & \frac{d[B_3]}{dt} &= w_3 - w_4, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $w_3 = k_3 y_2 - k_{30} x'_3 y_3$ ,  $w_4 = k_4 x'_1 y_3 - k_{40} x'_4 y_2$ ;  
для подсистемы (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{d[A_1]}{dt} &= -w_1 - w_2 + w_5, & \frac{d[A_2]}{dt} &= w_2, & \frac{d[A_3]}{dt} &= w_5, \\ \frac{d[B_1]}{dt} &= -w_2, & \frac{d[B_2]}{dt} &= 2w_1 + w_2 - 2w_5, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $w_1 = k_1 x'_1$ ,  $w_2 = k_2 x'_1 y_1$ ,  $w_5 = k_5 y_2^2$ .

Исследуем матрицу

$$U = \left( \frac{\partial f_1}{\partial k'} \right) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f_2}{\partial k'} \right). \quad (3.6)$$

Вектор определяемых параметров для подсистемы (3.2):

$$k' = k'(k, \varepsilon) = (k_3, k_4, k_{30}, k_{40}, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4);$$

для подсистемы (3.3):

$$k' = k'(k, \varepsilon) = (k_1, k_2, k_5, \varepsilon_1).$$

Далее следуя алгоритму, изложенному в [4], находим матрицу  $U$ . Матрица связей для подсистемы (3.2) выглядит следующим образом:

$$A_{M_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_3}{k_5} & 0 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 & k_4 \\ k_{30} & 0 & 0 & -k_{30} & 0 \\ 0 & \frac{k_{40}}{k_5} & -k_{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \varepsilon_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.7)$$

для подсистемы (3.2):

$$A_{M_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \varepsilon_1) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Система, соответствующая (3.7), (3.8):

$$\begin{aligned} k_4 \frac{\partial \rho}{\partial k_4} + k_{30} \frac{\partial \rho}{\partial k_{30}} &= 0 \\ \frac{k_3}{k_5} \frac{\partial \rho}{\partial k_3} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial k_5} + \frac{k_{40}}{k_5} \frac{\partial \rho}{\partial k_{40}} &= 0 \\ -k_{40} \frac{\partial \rho}{\partial k_{40}} + (1 + \varepsilon_4) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_4} &= 0 \\ -k_{30} \frac{\partial \rho}{\partial k_{30}} + (1 + \varepsilon_3) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_3} &= 0 \\ k_1 \frac{\partial \rho}{\partial k_1} + k_4 \frac{\partial \rho}{\partial k_4} - (1 + \varepsilon_1) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_1} &= 0 \end{aligned}$$

Откуда базис независимых НПФ состоит из компонент:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{k_{30}}{k_4}, \\ \rho_2 &= \frac{k_3^2}{k_5}, \\ \rho_3 &= \frac{k_1 + k_4}{k_1 k_4 (1 + \varepsilon_1)}, \\ \rho_4 &= k_{30} (1 + \varepsilon_3), \\ \rho_5 &= k_{40} (1 + \varepsilon_4).\end{aligned}\tag{3.9}$$

В механизме реакции пиролиза этана доступная экспериментальная информация позволяет определить пять независимых параметрических функций, задаваемых системой (3.9).

Таким образом, предложен метод, позволяющий существенно упростить исследование на информативность кинетических моделей сложных реакций. Особенностью метода является ясная физико-химическая интерпретация. Маршруты дают возможность разделить исходную сложную схему на группу подсистем меньшей размерности. Каждая подсистема имеет самостоятельную химическую интерпретацию. Естественно при этом попытаться придать физико-химический смысл получающимся комплексам кинетических констант, что станет предметом дальнейшего исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спивак С.И., Горский В.Г. Неединственность решения задачи восстановления кинетических констант // Доклады Академии наук, 1981, Т.267; N2. – С.412-415.
2. Спивак С.И., Горский В.Г. Исследование идентифицируемости – один из важнейших этапов построения математических моделей в химии // Журнал структурной химии, 1988, Т.29; N6. – С.119-125.
3. Кунцевич А.Д., Кудашев В.Р., Спивак С.И., Горский В.Г. Групповой анализ идентифицируемости параметров математических моделей нестационарной химической кинетики // Доклады Академии наук, 1992, Т.326; N4. – С.658-661;
4. Спивак С.И., Исмагилова А.С. Информативность кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики // Журнал Средневолжского математического общества, 2009, Т. 11; N2. – С.131-136.
5. Темкин М.И. Кинетика стационарных сложных реакций // Механизм и кинетика сложных каталитических реакций. Лекции, прочитанные на первом симпозиуме международного конгресса по катализу. – М.: Наука, 1970.
6. Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики / А.И.Вольперт, С.И.Худяев. – М.: Наука, 1975.

## The method of kinetically measurements informativity analysis and the problem of parameters of mathematical model of chemical kinetics definition

© S.I. Spivak<sup>3</sup>, A.S. Ismagilova<sup>4</sup>

**Abstract.** The graph-theoretic method the basis of independent parametric functions of kinetic constants is suggesting. The method make possible the decomposition of complex problem to to some simple problems. The structure of reactions mechanisms is used.

**Key Words:** informativity, model parameters, basis of parametric functions, graph theory.

---

<sup>3</sup>Managing chair of the mathematical Modelling, GOU VPO «the Bashkir state university», Ufa; S.Spivak@bashnet.ru.

<sup>4</sup>Associate Professor of the Chair of Mathematical Modeling, Neftekamsk Filial of the State Education Institution of Professional Education «Bashkir State University», Neftekamsk; IsmagilovaAS@rambler.ru

УДК 517.9

## Использование динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка

© М.И. Тимошин<sup>1</sup>

**Аннотация.** Выделяется класс динамических симметрий обладающих инвариантами, обеспечивающими понижение порядка дифференциального уравнения и содержащий в себе весь класс точечных симметрий. Предлагается процедура нахождения динамических симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Приведены примеры использования динамических симметрий. Рассмотрено применение найденных решений к исследованию нелинейного уравнения теплопроводности.

**Ключевые слова:** динамические симметрии, инварианты, обыкновенное дифференциальное уравнение, каноническое уравнение Абеля второго рода, нелинейное уравнение теплопроводности.

### 1. Введение

Понятие динамических симметрий приведено, например, в [1]. Дифференциальное уравнение в этом случае заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z). \quad (1.1)$$

Затем рассматривается вопрос об инфинитезимальном преобразовании

$$X = \xi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \mu(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.2)$$

переводящем решение системы (1.1) в решение этой же системы. Для этого оператор (1.2) должен удовлетворять условию

$$[X, A] = \lambda(x, y, z) A, \quad (1.3)$$

где  $A = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$ . Важно отметить, что компоненты оператора (1.2) не удовлетворяют предложенной С.Ли формуле продолжения

$$\mu = \frac{d\eta}{dx} - z \frac{d\xi}{dx}.$$

У оператора динамической симметрии (1.2) компоненты  $\xi, \eta, \mu$  определяются только условием (1.3).

При использовании точечных симметрий ОДУ по найденному оператору строятся инварианты, применяемые для понижения порядка исходного дифференциального уравнения. Для этого приходится решать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Известно, что в некоторых случаях задача нахождения инвариантов равносильна задаче интегрирования первоначального дифференциального уравнения. В случае динамических симметрий в общем случае пришлось бы решать динамическую систему.

<sup>1</sup>Ульяновский Технический Университет, Ульяновск; midvolga@mail.ru

В работе [2] предлагается начинать процедуру нахождения симметрий с инвариантов, при этом компоненты соответствующего оператора выписываются непосредственно с помощью дифференцирования и арифметических действий. Недостатком такого подхода является то, что линейная в классическом случае определяющая система дифференциальных уравнений, становится нелинейной. Однако такой подход, в случае динамических симметрий, позволяет заранее побеспокоиться о свойствах найденных симметрий. В частности естественно потребовать, что если функции  $u = u(x, y, y')$ ,  $v = v(x, y, y')$  являются инвариантами оператора (1.2), то выражение  $\frac{du}{dv} = \frac{u'_x + u'_y y' + u''_{y'} y''}{v'_x + v'_y y' + v''_{y'} y''}$  также является инвариантом один раз продолженной динамической симметрии (1.2). Удобнее записать компоненты оператора динамической симметрии в виде

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y'} + \mu_1(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''}, \quad (1.4)$$

и определить их, разрешая систему уравнений

$$X u = 0, \quad X v = 0, \quad X \frac{du}{dv} = 0. \quad (1.5)$$

При нахождении симметрий ОДУ второго порядка  $F(x, y, y', y'') = 0$ , можно использовать критерий инвариантности

$$X F |_{F=0} \equiv 0, \quad (1.6)$$

В общем случае критерий инвариантности (1.6), также как и критерий инвариантности (1.3) не допускает расщепления. Преимуществом критерия (1.6) является то, что он позволяет говорить о динамической симметрии (1.4) удовлетворяющей уравнениям (1.5) с точностью до функционального множителя. Отметим, что все точечные симметрии можно рассматривать как ansatz динамических симметрий когда  $u = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'}{\alpha'_x + \alpha'_y y'}$ ,  $v = \beta(x, y)$ , где  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$  произвольные функции.

В этой связи, желая сохранить свойство расщепления критерия (1.6), естественно ставить вопрос о динамических симметриях как о расширении множества точечных симметрий, ограничиваясь функциями двух переменных. Рассмотрим вопрос о динамических симметриях натянутых на три функции двух переменных, содержащих в себе всё множество точечных симметрий. Прежде всего, отметим, что оператор точечной симметрии  $X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ , обладающий инвариантом  $v = \tau(x, y)$ , в переменных  $(v, y)$ , принимает вид  $X = \chi(v, y) \frac{\partial}{\partial y}$ .

Представив функцию  $\chi(v, y)$  в виде  $\chi(v, y) = \frac{1}{\alpha'_y}$ , можно выписать первый дифференциальный инвариант  $u = \alpha'_v + \alpha'_y \frac{dy}{dv}$ .

Таким образом, взяв первый дифференциальный инвариант в виде  $u = \alpha + \beta \frac{dy}{dv}$ , можно расширить множество точечных симметрий с помощью трёх функций  $\tau(x, y)$ ,  $\alpha(v, y)$ ,  $\beta(v, y)$ .

Практическое нахождение динамических симметрий рассматриваемого типа целесообразно осуществлять в несколько этапов:

- A. Выполнив точечную замену переменных  $t = \tau(x, y)$ ,  $y = y$ , перейти от уравнения  $F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = 0$  к уравнению  $\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$ .
- B. По инвариантам  $v = x$ ,  $u = \alpha(x, y) + \beta(x, y) \frac{dy}{dx}$ , разрешив систему (1.5), построить оператор динамической симметрии.

С. Расщепив по  $y'$  критерий инвариантности  $X\Phi|_{\Phi=0} \equiv 0$  выписать определяющую систему дифференциальных уравнений.

Д. Найти решения определяющей системы уравнений.

В работе [2], на примере уравнения

$$y'' = y' + f(y), \quad (1.7)$$

рассмотрена реализация этапов В, С, Д. Показано, что дифференциальное уравнение (1.7) допускает динамические симметрии, если функция  $f(y)$  имеет вид  $f(y) = Ay + \frac{B}{y} - \frac{B^2}{y^3}$ . Указаны явные решения соответствующих уравнений.

В следующем разделе на примере уравнения (1.7) рассматривается реализация всех четырёх этапов.

## 2. Пример нахождения динамических симметрий ОДУ второго порядка

Возьмём уравнение (1.7) в виде  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + f(y)$ . Выполнив точечную замену переменных  $t = \tau(x, y)$ , придём к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \tau'_x y'' - f(y)\tau'_x{}^3 - (\tau''_{xx} + \tau'^2_x + 3f(y)\tau'_x{}^2\tau'_y) y' - (2\tau''_{xy} + 2\tau'_x\tau'_y + 3\tau'_x\tau'^2_y f(y)) y'^2 - \\ - (\tau''_{yy} + \tau'^2_y + f(y)\tau'^3_y) y'^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

По инвариантам  $v = x$ ,  $u = \alpha(x, y) + \beta(x, y)y'$ ,  $\frac{du}{dv} = \alpha'_x + (\beta'_x + \alpha'_y) y' + \beta'_y y'^2 + \beta y''$  строим оператор динамической симметрии (1.4) с компонентами

$$\xi(x, y, y') = 0, \quad \eta(x, y, y') = 1, \quad \mu(x, y, y') = -\frac{\alpha'_y + \beta'_y y'}{\beta},$$

$$\mu_1(x, y, y', y'') = -\frac{\beta'_y}{\beta} y'' + \frac{-\beta''_{yy}\beta + 2\beta'^2_y}{\beta^2} y'^2 + \frac{-\alpha''_{yy}\beta + 3\alpha'_y\beta'_y + \beta'_x\beta'_y - \beta''_{xy}\beta}{\beta^2} y' + \frac{-\alpha''_{xy}\beta + \beta'_x\alpha'_y + \alpha'^2_y}{\beta^2}.$$

Расщепив по  $y'$  критерий инвариантности  $X\Phi|_{\Phi=0} \equiv 0$ , получим определяющую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\beta^2 (\tau'''_{xxy}\tau'_x + \tau''_{xy}\tau'^2_x + 3f'(y)\tau'_x{}^3\tau'_y + 3f(y)\tau'^2_x\tau'_y\tau''_{xy} + 3f(y)\tau'_x{}^3\tau''_{yy} - \tau''_{xy}\tau''_{xx}) + 4\alpha'_y\beta\tau'_x\tau''_{xy} + \\ + \tau'^2_x (4\alpha'_y\beta\tau'_y + 6\alpha'_y\beta f(y)\tau'^2_y - \alpha''_{yy}\beta + 3\beta'_y\alpha'_y - \beta''_{xy}\beta + \beta'_x\beta'_y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^2 (-2\tau'''_{xyy}\tau'_x - 2\tau''_{yy}\tau'^2_x - 3f'(y)\tau'^2_x\tau'^2_y - 6f(y)\tau'^2_x\tau'_y\tau''_{yy} + 2\tau''_{xy}{}^2) + \\ + \beta\tau'_x (3\alpha'_y\tau''_{yy} + 3\alpha'_y\tau'^2_y + 3\alpha'_y f(y)\tau'^3_y + 2\beta'_y\tau''_{xy}) + \\ + \tau'^2_x (2\beta\beta'_y\tau'_y + 3f(y)\beta\beta'_y\tau'^2_y - \beta''_{yy}\beta + 2\beta'^2_y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta (\tau''_{xy}\tau''_{yy} + \tau''_{xy}\tau'^2_y + \tau''_{xy}f(y)\tau'^3_y - \tau'''_{yyy}\tau'_x - 2\tau'_x\tau'_y\tau''_{yy} - f'(y)\tau'^3_y\tau'_x - 3f(y)\tau''_{yy}\tau'_x\tau'^2_y) + \\ + 2\tau'_x\beta'_y (\tau''_{yy} + \tau'^2_y + f(y)\tau'^3_y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\beta^2\tau'^3_x f'(y) - 2\tau'^2_x\beta^2 f(y)\tau''_{xy} + \alpha'_y\beta\tau''_{xx} + \\ + \alpha'_y\beta\tau'^2_x + 3\alpha'_y\beta\tau'^2_x f(y)\tau'_y - f(y)\beta\beta'_y\tau'^3_x - \alpha''_{xy}\beta\tau'_x + \alpha'_y\beta'_x\tau'_x + \tau'_x\alpha'^2_y = 0. \end{aligned}$$

Найденная определяющая система состоит из четырёх уравнений относительно трёх неизвестных функций  $\alpha(x, y), \beta(x, y), \tau(x, y)$ . Будем искать решения этой системы методами группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными. Метод нахождения инвариантных решений изложен, например, в [3][4]. Рассматривая определяющую систему как систему дифференциальных уравнений относительно функции  $\tau(x, y)$ , найдём, что эта система обладает симметрией  $X = \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial \tau}$ , когда функции  $\alpha(x, y), \beta(x, y)$  принимают вид  $\alpha(x, y) = \alpha_1(x) + \alpha_2(y)\beta_1(x)$ ,  $\beta(x, y) = \beta_1(x)\beta_2(y)$ .

Найденная симметрия предписывает искать инвариантное решение в виде  $\tau(x, y) = ax + \tau_1(y)$ .

Используя выписанные представления для функций  $\tau(x, y), \alpha(x, y), \beta(x, y)$ , преобразуем определяющую систему к виду

$$\begin{aligned} & -3a\beta_2^2 f'(y)\tau_1'^2 + 3\beta_2 f(y)\tau_1' (a\beta_2'\tau_1' - 2a\beta_2\tau_1'' + \alpha_2'\tau_1'^2) + 2a (\beta_2'^2 - \beta_2^2\tau_1'' + \beta_2\beta_2'\tau_1') + \\ & \quad + \beta_2 (3\alpha_2' (\tau_1'^2 + \tau_1'') - a\beta_2'') = 0, \\ & -\beta_2 f'(y)\tau_1'^3 + f(y)\tau_1'^2 (2\beta_2'\tau_1' - 3\beta_2\tau_1'') - \beta_2\tau_1''' - 2\beta_2\tau_1'\tau_1'' + 2\beta_2'\tau_1'^2 + 2\beta_2'\tau_1'' = 0, \\ & -3a\beta_2^2 f'(y)\tau_1' - 3\beta_2 f(y) (a\beta_2\tau_1'' - 2\alpha_2'\tau_1'^2) - (\alpha_2''\beta_2 - 3\alpha_2'\beta_2' - 4\alpha_2'\tau_1'\beta_2) = 0, \\ & a^2\beta_2^2 f'(y) + a\beta_2 f(y) (a\beta_2' - 3\alpha_2'\tau_1') - \alpha_2' (\alpha_2' + a\beta_2) = 0. \end{aligned}$$

Анализируя полученную определяющую систему, найдём функции  $f(y)$  при которых уравнение  $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + f(y)$  допускает динамическую симметрию искомого типа.

Укажем несколько искомым функций  $f(y)$  заданных параметрически

1.

$$f(p) = -\frac{e^{-\frac{1}{2p+1}}(2p+3)^2}{8f_1(2p+1)}, \quad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)}{f_1(2p+1)} + f_2;$$

2.

$$f(p) = -\frac{e^{-\frac{1}{2p+1}}((3f_1+2f_1p)^2 - (2p+1)^2)f_2}{8f_1^3(2p+1)}, \quad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)f_2}{f_1(2p+1)} + f_4;$$

3.

$$f(p) = -\frac{e^{-\frac{1}{2p+1}}((3f_1+2f_1p)^2 + (2p+1)^2)f_2}{8f_1^3(2p+1)}, \quad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)f_2}{f_1(2p+1)} + f_3;$$

4.

$$f(p) = \frac{p^{k_1}(-k_1p^2 + p + 2pk_1 + 2f_1f_2)}{2f_2(p-1)}, \quad y(p) = -\frac{(2k_1+1)^2(k_1 - pk_1 + 1)p^{k_1}}{2f_2k_1(k_1+1)} + f_3;$$

5.

$$f(p) = \frac{p^{k_1}(2p^2f_3 + 2pk_1 + p - 1 - k_1)}{2f_2(p-1)}, \quad y(p) = -\frac{(2k_1+1)^2(k_1 - pk_1 + 1)p^{k_1}}{2f_2k_1(k_1+1)} + f_4;$$

6.

$$f(p) = \frac{f_1(p+2)^2}{(p+1)}, \quad y(p) = -4f_1 \left( \ln \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} \right) + f_3;$$

7.

$$f(p) = \frac{f_1(ph + 2 + p)(ph - 2 - p)}{(p + 1)(h^2 - 1)}, \quad y(p) = \frac{4f_1}{(h^2 - 1)} \left( \ln \frac{p}{p + 1} + \frac{1}{p + 1} \right) + f_3;$$

8.

$$f(p) = \frac{f_1(p^2h^2 + p^2 + 4p + 4)}{(p + 1)(h^2 + 1)}, \quad y(p) = -\frac{4f_1}{(h^2 - 1)} \left( \ln \frac{p}{p + 1} + \frac{1}{p + 1} \right) + f_3;$$

9.

$$f(p) = f_1(p + 1) - f_2, \quad y(p) = f_2 \left( \ln \frac{p}{p + 1} + \frac{1}{p + 1} \right) + f_3;$$

где  $p, g$  - параметры,  $f_1, f_2, f_3, f_4, k_1, h$  - произвольные константы. Интересно отметить, что варианты 4., 5., при некоторых значениях произвольных констант, допускают явные представления функции  $f(y)$ . Таким образом можно получать как известные, так и новые случаи интегрируемости уравнения (1.7).

Использование динамических симметрий, а также общие решения указанных девяти случаев приводятся в следующем разделе.

### 3. Пример использования динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка

Рассмотрим процедуру использования динамических симметрий на примере уравнения (1.7) с функцией  $f(y)$  первого типа. Учитывая, что функция  $\tau_1(y)$  в этом случае представима в параметрическом виде

$$\tau_1(p) = -\frac{2}{2p + 1}, \quad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p + 1)}{f_1(2p + 1)} + f_2,$$

перейдём в уравнении (2.1) от функции  $y(x)$  к функции  $p(x)$ . После преобразования получим уравнение

$$32a(2p + 1)^2 p'' + 64p'^3 + 48a(2p + 1)^2 p'^2 + 4a^2(12p^2 + 36p + 19)(2p + 1)^2 p' + a^3(2p + 3)^2(2p + 1)^4 = 0. \quad (3.1)$$

Инвариант  $u$  принимает при этом вид

$$u = \frac{2af_1^2(2p + 1)^2 - 2a^2p + 8f_1^2p' - a^2}{a(2p + 1)}. \quad (3.2)$$

Используя инвариант (3.2) в качестве новой переменной, понизим порядок уравнения (3.1), получив уравнение

$$32f_1^4 u' + au^3 + a(8f_1^2 + 3a)u^2 + a(a + 4f_1^2)(3a + 4f_1^2)u + a^2(a + 4f_1^2)^2 = 0. \quad (3.3)$$

Проинтегрировав уравнение (3.3), легко выписать общее решение уравнения (3.1)

$$p = \frac{e^{-\frac{2}{g}}}{2 \int \frac{e^{-\frac{2}{g}}(g-1)}{g^2} dg + C_2} - \frac{1}{2}, \quad x = \frac{2 - 2g + 2g \ln g}{ag} + C_1. \quad (3.4)$$

Учитывая связь между переменными  $(p, x)$  и переменными  $(y, t)$

$$y = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)}{f_1(2p+1)} + f_2, \quad t = ax - \frac{2}{2p+1},$$

можно говорить об общем решении уравнения  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + f(y)$  с функцией  $f(y)$  первого типа.

Приведём общие решения уравнения  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + f(y)$  с функциями  $f(y)$  других типов:

2.

$$y = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)f_2}{f_1(2p+1)} + f_4, \quad t = x - \frac{2}{2p+1},$$

где

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{g^{f_1}}{C_2 - \int \frac{g^{f_1}(g+f_1g+1-f_1)}{g(g-1)} dg}, \quad x = -f_1 \ln g - \ln \frac{(g-1)^2}{g} + C_1.$$

3.

$$y = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)f_2}{f_1(2p+1)} + f_3, \quad t = x - \frac{2}{2p+1},$$

где

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{e^{-2f_1 \arctan g}}{C_2 + 2(f_1^2 + 1) \int \frac{e^{-2f_1 \arctan g}}{(f_1-g)(1+g^2)} dg}, \quad x = \ln \frac{(1+g^2)}{(g-f_1)^2} + 2f_1 \arctan g + C_1.$$

4.

$$y = -\frac{(2k_1+1)^2(k_1-pk_1+1)p^{k_1}}{2f_2k_1(k_1+1)} + f_3, \quad t = x + (2k_1+1) \ln p,$$

обозначим  $m = 2k_1 + 1$ , тогда выражения для  $p, x$  можно представить в виде

$$p = \frac{e^{8f_2^2 \int \frac{mg-4f_2^2}{gB} dg}}{8mf_2^2 \int \frac{e^{8f_2^2 \int \frac{mg-4f_2^2}{gB} dg}}{B} dg + C_2}, \quad x = 32f_2^4 m \int \frac{dg}{gB} + C_1,$$

где

$$B = g^2m^2(m+1+4f_1f_2) - 8mf_2^2g - 16f_2^4(m-1).$$

5.

$$y = -\frac{(2k_1+1)^2(k_1-pk_1+1)p^{k_1}}{2f_2k_1(k_1+1)} + f_4, \quad t = x + (2k_1+1) \ln p,$$

обозначим  $m = 2k_1 + 1$ , тогда выражения для  $p, x$  можно представить в виде

$$p = - \left( 8mf_2^2 \int \frac{e^{-8f_2^2 \int \frac{mg+4f_2^2}{gB} dg}}{B} dg + C_2 \right) \times e^{8f_2^2 \int \frac{mg+4f_2^2}{gB} dg},$$

$$x = -32f_2^4 m \int \frac{dg}{gB} + C_1,$$

где

$$B = g^2m^2(-m+1-4f_3) + 8mf_2^2g + 16f_2^4(m+1).$$

6.

$$y = -4f_1 \left( \ln \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} \right) + f_3, \quad t = x + \ln \frac{p}{p+1},$$

где

$$p = -1 + \frac{8f_1^2 e^g}{(1-g) \left( 8f_1^2 \int \frac{ge^g}{(g-1)^2} dg + C_2 \right)}, \quad x = C_1 - g - \ln(1-g).$$

7.

$$y = \frac{4f_1}{(h^2-1)} \left( \ln \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} \right) + f_3, \quad t = x + \ln \frac{p}{p+1},$$

где

$$p = -1 - \frac{16hg^{\frac{h+1}{2h}} f_1^2}{B \left( 8f_1^2 (h^2-1) \int \frac{g^{\frac{1-h}{2h}} (1+g)}{B^2} dg + C_2 \right)}, \quad x = C_1 + \frac{(1-h^2) \int \frac{1+g}{gB} dg}{2h},$$

$$B = gh - h - 1 - g.$$

8.

$$y = -\frac{4f_1}{(h^2+1)} \left( \ln \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} \right) + f_3, \quad t = x + \ln \frac{p}{p+1},$$

где

$$p = -1 + \frac{8f_1^2 h \sqrt{1+g^2} e^{-\frac{\arctan g}{h}}}{(1-gh) (8(h^2+1)f_1^2 B + C_2)}, \quad x = C_1 + \frac{2 \arctan g + h \ln(1+g^2) - 2h \ln(gh-1)}{2h},$$

$$B = \int \frac{\sqrt{1+g^2} e^{-\frac{\arctan g}{h}}}{h^2 g^4 - 2hg^3 + g^2 - 2hg + 1 + h^2 g^2} dg.$$

9.

$$y = f_2 \left( \ln \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} \right) + f_3, \quad t = x + \ln \frac{p}{p+1},$$

где

$$p = -\frac{g^{\frac{f_1}{f_2}-1} e^{-\frac{1+f_1 g}{f_2 g}}}{\int \frac{(1+f_1 g) g^{\frac{f_1}{f_2}} e^{-\frac{1+f_1 g}{f_2 g}}}{f_2 g^3} dg - C_2} \quad x = C_1 + \frac{1 + f_1 g (1 - \ln g)}{f_2 g}.$$

Возможности практического применения предъявленных решений приведены в следующем разделе.

#### 4. Решения типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности

В работе [5] отмечается, что уравнение (1.7) связано с уравнением диффузии Колмогорова-Петровского-Пискунова, с уравнением Семёнова (Фитц-Хью-Нагумо) используемым в теории цепных химических реакций.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(u) = 0. \quad (4.1)$$

Если функция  $F(u)$  удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(u) < \alpha, \quad 0 < u < 1, \quad (4.2)$$

то говорят об уравнении Колмогорова-Петровского-Пискунова.

Если функция  $F(u)$  удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F(a_1) = 0, \quad 0 < a_1 < 1, \quad F'(0) \leq 0, \quad F'(1) < 0, \quad F'(a_1) > 0, \quad (4.3)$$

то говорят об уравнении Семёнова.

Будем искать решение уравнения (4.1) типа бегущей волны  $u(x, \tau) = y(\rho)$ ,  $\rho = x + b\tau$ . При этом перейдём от уравнения (4.1) к уравнению

$$\frac{dy}{d\rho} b - \frac{d^2 y}{d\rho^2} - F(y) = 0. \quad (4.4)$$

Сделаем в уравнении (4.4) замену  $t = b\rho$ , получим

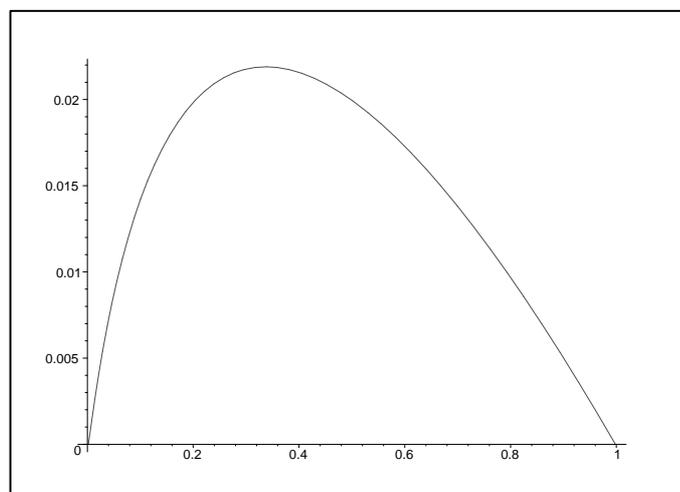
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - \frac{F(y)}{b^2}.$$

Таким образом, пришли к уравнению типа (1.7) при условии, что  $f(y) = -F(y)/b^2$ . Покажем, что пятый тип представления функции  $f(y)$  позволяет выписывать точные решения уравнений Колмогорова-Петровского-Пискунова, Семёнова.

Определив константы равными  $k_1 = 1$ ,  $f_2 = 96$ ,  $f_3 = 0.3$ ,  $f_4 = 0.002$ , получим

$$f(p) = \frac{p(3p^2 + 15p - 10)}{960(p - 1)}, \quad y(p) = -\frac{3}{64}p + \frac{3}{128}p^2 + \frac{1}{500}.$$

Соответствующая функция  $F(y)$  с точностью до растяжения по оси  $F$  имеет вид



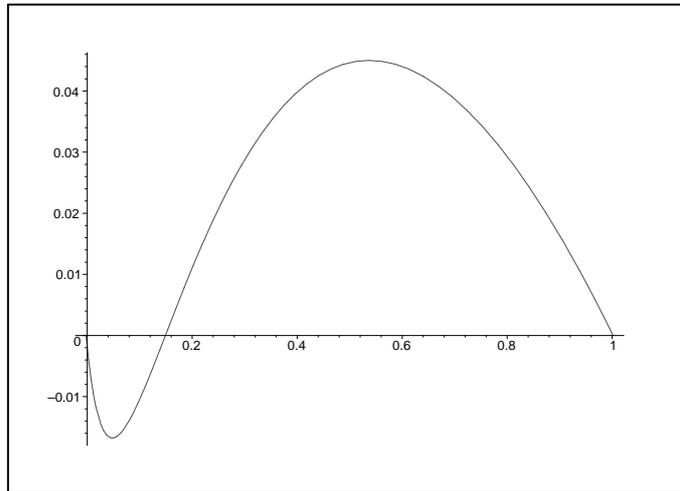
Р и с у н о к 4.1

Функция  $F(u)$  для уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова.

Определив константы равными  $k_1 = 1$ ,  $f_2 = 10$ ,  $f_3 = 1.97$ ,  $f_4 = 0.149$ , получим

$$f(p) = \frac{p(197p^2 + 150p - 100)}{1000(p - 1)}, \quad y(p) = -\frac{9}{20}p + \frac{9}{40}p^2 + \frac{149}{1000}.$$

Соответствующая функция  $F(y)$  с точностью до растяжения по оси  $F$  имеет вид



Р и с у н о к 4.2

*Функция  $F(u)$  для уравнения Семенова.*

В заключение отметим, что пятый тип представления функции  $f(y)$ , за счёт изменения констант, позволяет описывать достаточно широкий класс решений уравнений Колмогорова-Петровского-Пискунова, и Семёнова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Stephani. Differential equations: their solution using symmetries. Cambridge university Press – 1989.
2. Тимошин М.И. Динамические симметрии ОДУ. Уфимский Математический Журнал. 1 (3), 132-138(2009).
3. Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М. Наука – 1983. – 280 с.
4. Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. Наука – 1978.
5. Беркович Л.М. Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова и связанных с ним уравнений Семёнова и Зельдовича. Доклады РАН. Математика 322, №5, 823-827(1992).

## Use of dynamic symmetries to integration the ODEs of second order.

© M.I. Timoshin<sup>2</sup>

**Abstract.** There is a class of dynamic symmetries which have invariants providing the lowering of the ODE order and containing the whole class of point symmetries. The procedure of the finding of dynamic symmetries for ODE of second order is suggested. Some examples of the usage of dynamic symmetries are given. The application of the obtained solutions to investigation of the nonlinear heat conduction equation is considered.

**Key Words:** ordinary differential equations, dynamical symmetries, Abel's equation, nonlinear heat conduction equation.

---

<sup>2</sup>Ulyanovsk Technical University, Ulyanovsk; midvolga@mail.ru

УДК 517.9

# Численное решение плоских контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований

© А. Н. Тынды<sup>1</sup> А. Е. Романов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Построен эффективный итерационный численный метод решения двумерного интегрального уравнения смешанного типа, являющегося основным при описании контактных задач в теории вязкоупругости.

**Ключевые слова:** контактные задачи, вязкоупругие механические системы, интегральные уравнения Вольтерра-Фредгольма.

## 1. Математическая модель

Основное интегральное уравнение плоской контактной задачи, в рамках которой физические свойства слоев могут меняться лишь вдоль слоя, имеет вид [1]

$$c(t) (I + L_1^*) q(x, t) + (I + L_2^*) A^* q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t) - g(x), |x| \leq 1, \quad (1.1)$$

где  $c(t) > 0$ ,  $L_1^*$ ,  $L_2^*$  - интегральные операторы Вольтерра по времени с неразностными ядрами,  $A^*$  - интегральный оператор по координате;  $q$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $g$  - безразмерные контактные давления, осадка, угол поворота и форма основания штампа соответственно. Замыкают задачу условия, определяемые приложенной силой  $P$ , не разрушающей систему контактов, а также главный момент  $M$  приложенной силы [1].

В случае неоднородной (слоистой, градиентно-функциональной) среды физические свойства материалов способны меняться со временем, а также и под воздействием климатических условий (температура, давление, влажность и др.). С течением времени совокупное действие времени и климатических условий способно формировать анизотропность свойств материалов, что приводит необратимому изменению свойств - старению. В связи с этим постановка и решение динамического, пространственно одномерного интегрального уравнения (1.1) ограничивает применимость полученных результатов в рамках многих прикладных направлений. Для того, чтобы выяснить корректирующие уравнение (1.1) соотношения, необходимые для перехода к двумерной пространственной задаче, проясним физическую сущность слагаемых правой части уравнения.

Известно 4 типа постановки контактных задач, в которых пары известных определяют тройку неизвестных (включая  $q$ ) путем неповторяющихся комбинаций пар из  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $P$  и  $M$  [1]. В двумерном пространственном случае равновесие слоев и штампа удовлетворяет соотношениям

$$P(y, t) = \int_{-1}^1 q(x, y, t) dx, M(y, t) = \int_{-1}^1 x q(x, y, t) dx, \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Доцент кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; tynda@pnzgu.ru

<sup>2</sup>Старший преподаватель кафедры ФТТиНС, Самарский государственный университет, г. Самара; gomalex@mail.ru

где координата  $y$  идентифицирует вертикальное положение слоя (включения и т.п.), на границе которого действует контактное давление, в толще неоднородной среды.

Осадка и поворот являются видами перемещений систем тел, а форма основания штампа определяет границу раздела тела с неоднородной средой. В задачах, где осадка включена в исходные данные, поиск  $\delta = \delta(x, y, t)$  обычно представляет собой самостоятельную задачу, решаемую при естественных условиях (климатические, силы гравитации и др.). При этом в процессе осадки в неоднородной среде могут появиться градиенты плотности, делающие процесс осадки необратимым. Поворот  $\alpha = \alpha(x, y, t)$  в неоднородной среде возникает под действием распределенных вдоль слоя сил, инициирующих неравномерное распределение контактного давления и возникновение момента приложенных сил. В рамках математической постановки контактной задачи  $\delta$ ,  $\alpha$  и  $g$  являются гладкими непрерывными функциями, поскольку осадка и поворот деформируют слои без разрывов сплошности, а форма штампа  $g = g(x, t)$  по причине превосходящей жесткости по сравнению с жесткостью неоднородной среды остается неизменной в любом пространственном положении, в том числе и при поворотах.

Оператор  $A^*$  в двумерной вариации уравнения (1.1) имеет следующий вид

$$A^*q(x, y, t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q(\xi, \psi, t)k(x, y, \xi, \psi)d\xi d\psi, \quad (1.3)$$

где ядро плоской контактной задачи определено при толщине подстилающего слоя  $d$  как

$$k(z) = k \left( d^{-1} \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \psi)^2} \right). \quad (1.4)$$

В общем случае оно определяется как [1]

$$k(z) = \int_0^\infty \Sigma(\eta) J_0(\eta z) d\eta. \quad (1.5)$$

Форма записи (1.5) определяется постановкой контактной задачи, разделяемой по типам контакта — гладкому и идеальному. Для гладкого контакта нижнего слоя с недеформируемым основанием

$$\Sigma(\eta) = \frac{ch(2\eta) - 1}{sh(2\eta) + 2\eta}, \quad (1.6)$$

а при идеальном контакте

$$\Sigma(\eta) = \frac{(3 - 4\nu_s)sh(2\eta) - 2\eta}{(3 - 4\nu_s)ch(2\eta) + 2\eta^2 + 8\nu_s^2 - 12\nu_s + 5}, \quad (1.7)$$

где  $\nu_s$  — коэффициент Пуассона подстилающего слоя. Все остальные данные об операторах и функциях в интегральном уравнении (1.1) приведены в [4].

Одним из примеров неоднородной слоистой среды является асфальт. Самый нижний слой асфальта находится на подстилающем грунте, образуя вверх по вертикали дорожное покрытие. Чередование слоев начинается со слоя основания покрытия и заканчивается поверхностным слоем, который наиболее сильно подвергается силовому воздействию со стороны транспортных средств и пешеходов, а также воздействию климатических условий. Силовое воздействие на поверхность асфальта способствует уплотнению асфальта и постепенному изменению его вязкоупругих свойств. Последние способствуют релаксации остаточных деформаций в толще покрытия, но при достаточно

высокой интенсивности и регулярности воздействия — старению асфальта. Решение пространственной одномерной задачи для асфальта корректно, если силовое воздействие транспортного средства или пешехода, идентифицируемого в абстрактном понимании со штампом, распределяется неравномерно лишь в одном направлении.

Уравнения вида (1.1) также хорошо описывают, в частности, механическое поведение бетона, полимеров, стеклопластиков [1].

## 2. Описание алгоритма

Во всех классических постановках контактных задач неизвестными являются контактные давления  $q(x, t)$ . Для построения метода приближенного решения уравнения типа (1.1) относительно  $q(x, t)$ , где  $x$  — радиус-вектор точки деформируемого вязкоупругого тела, запишем это уравнение в развернутом виде:

$$c(t)q(x, t) + c(t) \int_{t_0}^t K_1(t, \tau)q(x, \tau)d\tau + \int_{-1}^1 k(x, \xi)q(\xi, t)d\xi + \\ + \int_{t_0}^t \int_{-1}^1 k(x, \xi)K_2(t, \tau)q(\xi, \tau)d\xi d\tau = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad t \in [t_0, T], \quad |x| \leq 1. \quad (2.1)$$

Учитывая условие  $c(t) > 0$ , будем без ограничения общности рассматривать далее уравнение

$$q(x, t) + \int_{t_0}^t H_1(t, \tau)q(x, \tau)d\tau + \int_a^b K(x, \xi)q(\xi, t)d\xi + \\ + \int_{t_0}^t \int_a^b K(x, \xi)H_2(t, \tau)q(\xi, \tau)d\xi d\tau = f(x, t), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in [a, b]. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) представляет собой линейное двумерное интегральное уравнение смешанного типа и носит название Вольтерра-Фредгольма. Ядра  $H_1(t, \tau)$  и  $H_2(t, \tau)$  в левой части уравнения могут иметь слабые степенные особенности. Численному решению подобных уравнений посвящены работы [3, 7, 8]. Однако при построении численных методов решения интегральных уравнений с особенностями возникает ряд практических сложностей, связанных, в частности, с серьезными ошибками округления [2]. Некоторые подходы, позволяющие уменьшить их влияние, изложены в работе [8].

В настоящей работе к решению (2.2) применим метод последовательных приближений.

Для построения приближенного решения уравнения (2.2) введем на прямоугольнике

$$\Omega : \left\{ (x, t) : a \leq x \leq b, \quad t_0 \leq t \leq T, \right\}$$

сетку точками

$$(x_j, t_i) : t_i = t_0 + (T - t_0) \left( \frac{i}{n_1} \right)^{v_1}, \quad i = \overline{0, n_1}, \quad x_j = a + (b - a) \left( \frac{j}{n_2} \right)^{v_2}, \quad j = \overline{0, n_2}.$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — показатели неравномерности сетки, зависящие от гладкости ядер по каждой переменной и порядка особенности. В случае если ядра  $H_1$ ,  $H_2$  и  $K$  не имеют особенностей, принимаем  $v_1 = v_2 = 1$ . Обозначим через  $\Delta_i$  сегменты-полосы

$$\Delta_i : \left\{ (x, t) : a \leq x \leq b, t_{i-1} \leq t \leq t_i, \right\}, i = \overline{1, n_1}.$$

Каждый сегмент  $\Delta_i$  покроем прямоугольниками

$$\Delta_i^j : \left\{ (x, t) : x_{j-1} \leq x \leq x_j, t_{i-1} \leq t \leq t_i, \right\}, i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}.$$

На каждом прямоугольнике  $\Delta_i^j$ ,  $i = \overline{1, n_1}$ ,  $j = \overline{1, n_2}$ , неизвестная функция аппроксимируется интерполяционным полиномом  $P^{j,i}(x, t)$  степени  $(r_2 - 1) \times (r_1 - 1)$ , построенным по узлам

$$t_i^l = \frac{t_i + t_{i-1}}{2} + \frac{t_i - t_{i-1}}{2} y_l, l = \overline{1, r_1 - 2}, t_i^0 = t_{i-1}, t_i^{r_1-1} = t_i, r_1 > 2;$$

$$x_j^k = \frac{x_j + x_{j-1}}{2} + \frac{x_j - x_{j-1}}{2} y_k, k = \overline{1, r_2}, r_2 \geq 2,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — показатели гладкости ядер по переменным  $t$  и  $x$ ,  $y_l$  и  $y_k$  — нули полиномов Лежандра степени  $r_1 - 2$  и  $r_2$ , соответственно. Таким образом, используется замкнутая система узлов по переменной  $t$  и незамкнутая по  $x$ .

Приближенное решение уравнения (2.2) будем искать в виде сплайна  $q^*(x, t)$ , составленного из таких интерполяционных полиномов

$$P^{k,l}(x, t) = \sum_{i=1}^{r_2} \sum_{j=0}^{r_1-1} C_{i,j}^{k,l} \Psi_{i,j}^{k,l}(x, t), \quad (2.3)$$

где  $C_{i,j}^{k,l} = q(x_k^i, t_j^l)$ , а фундаментальные многочлены  $\Psi_{i,j}^{k,l}(x, t)$  определяются следующим образом

$$\Psi_{i,j}^{k,l}(x, t) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{r_2} \frac{(x - x_k^p)}{(x_k^i - x_k^p)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{r_1-1} \frac{(t - t_l^m)}{(t_l^j - t_l^m)}.$$

Значения  $q(x_j^k, t_i^l)$  определяются последовательно для каждого из прямоугольников  $\Delta_i^j$ ,  $i = \overline{1, n_1}$ ,  $j = \overline{1, n_2}$  по методу последовательных приближений:

$$\begin{aligned} q_0(x_j^k, t_i^l) &= f(x_j^k, t_i^l), \\ q_m(x_j^k, t_i^l) &= f(x_j^k, t_i^l) - \int_{t_0}^{t_i^l} H_1(t_i^l, \tau) q_{m-1}(x_j^k, \tau) d\tau - \int_a^b K(x_j^k, \xi) q_{m-1}(\xi, t_i^l) d\xi - \\ &- \int_{t_0}^{t_i^l} \int_a^b K(x_j^k, \xi) H_2(t_i^l, \tau) q_{m-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad k = \overline{1, r_2}, l = \overline{0, r_1 - 1}, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Преобразуем соотношения (2.4)

$$\begin{aligned}
 q_m(x_j^k, t_i^l) = & f(x_j^k, t_i^l) - \sum_{p=1}^{i-1} \int_{t_{p-1}}^{t_p} H_1(t_i^l, \tau) q_{m-1}(x_j^k, \tau) d\tau - \int_{t_{i-1}}^{t_i^l} H_1(t_i^l, \tau) q_{m-1}(x_j^k, \tau) d\tau - \\
 & - \sum_{v=1}^{n_2} \int_{x_{v-1}}^{x_v} K(x_j^k, \xi) q_{m-1}(\xi, t_i^l) d\xi - \sum_{p=1}^{i-1} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{v=1}^{n_2} \int_{x_{v-1}}^{x_v} K(x_j^k, \xi) H_2(t_i^l, \tau) q_{m-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau - \\
 & - \int_{t_{i-1}}^{t_i^l} \sum_{v=1}^{n_2} \int_{x_{v-1}}^{x_v} K(x_j^k, \xi) H_2(t_i^l, \tau) q_{m-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad k = \overline{1, r_2}, \quad l = \overline{0, r_1 - 1}, \quad m = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для аппроксимации каждого из интегралов в (2.5) применяются квадратурные формулы Гаусса, по узлам  $t_i^l$ ,  $l = \overline{1, r_1 - 2}$  по временной переменной и  $x_j^k$ ,  $k = \overline{1, r_2}$  по пространственной. При этом для вычисления интегралов  $\int_{t_{i-1}}^{t_i^l}$  вводятся вспомогательные узлы (узлы квадратурной формулы Гаусса, отображенные на отрезок  $[t_{i-1}, t_i^l]$ ), а в качестве значений подынтегральной функции используются значения сплайнов, построенных на предыдущей итерации.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет определить контактные давления, а следовательно и остальные характеристики системы, с необходимой точностью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: НАК Институт механики, 1990, 320 с.
2. Н. Brunner. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
3. Н. Brunner, E. Messina. Time stepping methods for Volterra-Fredholm integral equations. Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol.23 Roma (2003), 329-342.
4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974, 456 с.
5. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. Москва, Наука, 1984. - 352с.
6. Никольский С.М. Квадратурные формулы. Москва, Наука, 1979. - 544с.
7. A.N. Tynda. Numerical methods for 2D weakly singular Volterra integral equations of the second kind. ПАММ, Volume 7, Issue 1, 2020009 - 2020010.
8. A.N. Tynda. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations. Trudy SVMO, Vol. 10, 2008, 2, 68-78.

# Numerical solution of the plane contact problems for heterogeneous senescent viscoelastic foundations.

© A. N. Tynda<sup>3</sup>, A. E. Romanov<sup>4</sup>

**Abstract.** In this paper we discuss the mathematical description of the contact problems in the viscoelasticity theory. We suggest the effective iterative numerical method for twodimensional integral equation of the mixed type which is the basic equation for these problems.

**Key Words:** contact problems, viscoelastic mechanical systems, Volterra-Fredholm integral equations.

---

<sup>3</sup>Assistant professor of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; tynda@pnzgu.ru

<sup>4</sup>Research fellow of FTT and NS Chair, Samara State University, Samara; rom-alex@mail.ru

УДК 51-73

# Моделирование трехмерной свободно-радикальной полимеризации методом Монте-Карло

© М.Н. Фаттахов<sup>1</sup>, Р.Р. Исмаилов<sup>2</sup>, Э.Д. Шакирьянов<sup>3</sup>, С.М. Усманов<sup>4</sup>

**Аннотация.** В данной работе рассматривается модель процесса трехмерной свободно-радикальной полимеризации олигоэфиракрилатов до предельных степеней превращения. В основу модели реакционной системы положен реактор идеального смешивания, не учитывающий геометрию роста полимерной цепи. Реакционный процесс моделируется методом Монте-Карло.

**Ключевые слова:** трехмерная свободно-радикальная полимеризация, реактор идеального смешивания, метод Монте-Карло.

## 1. Введение

Задача направленного синтеза полимеров олигоэфиракрилатов (ОЭА) с заранее известными прочностными свойствами и по сей день является весьма актуальной. Для решения такой проблемы необходимо выбрать оптимальный режим полимеризации ОЭА с контролируемой глубиной превращения, что требует глубоких знаний кинетики трехмерной свободно-радикальной полимеризации ОЭА. Проведение множественных экспериментов трудоемко и требует определенных затрат времени и дорогостоящего лабораторного оборудования. Разработанная же и откалиброванная математическая модель позволяет имитировать процесс полимеризации с различными начальными условиями, не требуя больших материальных и временных ресурсов. В процессе численного эксперимента параметры состояния системы контролируются в произвольный момент времени. Процесс свободно-радикальной полимеризации олигоэфиракрилатов протекает по классическому механизму радикальной полимеризации [1], включающий в себя реакции инициирования, роста, обрыва и передачи цепи. Для описания кинетики полимеризации ОЭА используют одну из кинетических моделей: механическую, вязкостную или модель свободного объема. Важно отметить, что протекание процесса трехмерной полимеризации сопровождается изменением «физического» состояния реакционной массы от жидкого до стеклообразного. Это в свою очередь влечет за собой уменьшение констант скоростей элементарных реакций. Следует заранее определить, что речь идет не об истинных значениях константы скорости роста цепи, во многом зависящей от химической природы, а об эффективной константе скорости роста цепи, зависящей от физического состояния реакционной среды, определяемой молекулярной подвижностью свободного радикала и двойной связи [2].

## 2. Объект исследования

В качестве объекта исследования ОЭА был выбран полимер - 1,6 ди-(метакрилоилокси) гексаметилен (МГ). Структурная формула МГ, построенная в программном комплексе HYPER CHEM 6.0.1 представлена следующим образом:

<sup>1</sup>Ассистент кафедры ММ и ИС, БирГСПА, г. Бирск; hanzafar@mail.ru.

<sup>2</sup>Старший преподаватель кафедры И и ИТО, БирГСПА, г. Бирск; esmrauf@mail.ru.

<sup>3</sup>Заведующий кафедры ТФ и ФЭ, БирГСПА, г. Бирск; hanzafar@mail.ru.

<sup>4</sup>Ректор БирГСПА, г. Бирск; hanzafar@mail.ru.



где  $N_I$  – число молекул инициатора,  $\mu_I$  и  $\mu_M$  – молярные массы инициатора и мономера. Тогда общее число молекул мономера:

$$N_M = N_R - N_I. \quad (3.3)$$

В таблице 2 приведены физические параметры реакционной модели.

| $\frac{m_I}{m_M}$ | $N_I$ | $N_N$  | $k_d, 1/c$ | $k_p, л/(моль*с)$ | $k_t, л/(моль*с)$ | $V_R, л$ |
|-------------------|-------|--------|------------|-------------------|-------------------|----------|
| 0,01              | 16435 | 983565 | 1,13e-4    | 6400              | 2,22e6            | 4,21e-19 |

Таблица 2: Параметры моделируемой реакционной системы

$k_d$ ,  $k_p$  и  $k_t$  – константы реакций распада инициатора, роста полимерной цепи и обрыва соответственно.

При проведении численного эксперимента предполагалось наличие в системе одного радикала. Исходя из общего состояния, рассчитывались скорости иницирования ( $W_i$ ) (лимитируется реакцией распада инициатора), скорость реакции роста ( $W_p$ ), скорость обрыва ( $W_t$ ), скорости роста на подвешенную двойную связь ( $W_{pD}$ ):

$$W_i = k_d I / 2,$$

$$W_p = k_p R M, \quad (3.4)$$

$$W_t = k_t R^2,$$

$$W_{pD} = k_p R D,$$

где  $I$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $D$  – общее число молекул инициатора, радикалов, мономера и количества подвешенных двойных связей в системе,  $k_d$ ,  $k_p$ ,  $k_t$  – численные значения констант распада, скорости роста и обрыва соответственно. Здесь все скорости приводятся в размерности количество реакционных актов за единицу времени (1/с).

На текущее состояние системы рассчитывается шаг модельного времени  $\Delta t$  – минимальный интервал времени, за которое возможно изменение состояния системы:

$$\Delta t = \frac{1}{\sum_J W_J}, \quad (3.5)$$

$J$  – тип реакции.

Имитирование элементарных реакций проводится согласно условию:

$$\xi < \Delta t \cdot W_J, \quad (3.6)$$

где  $\xi$  – случайное равномерно распределенное число в интервале  $[0, 1)$ .

В случае, если значение  $\xi$  выпадает в заданный интервал, проводится одна  $J$ -ая реакция. Состояние реакционной системы пересчитывается, вычисляется новый шаг  $\Delta t$  и процесс повторяется в цикле. Выход из цикла осуществляется либо по достижении определенного времени или заданной конверсии.

#### 4. Результаты численного эксперимента

В ходе численного эксперимента было проведено 5000 имитаций полимеризационного процесса с последующим усреднением и сглаживанием полученных зависимостей.

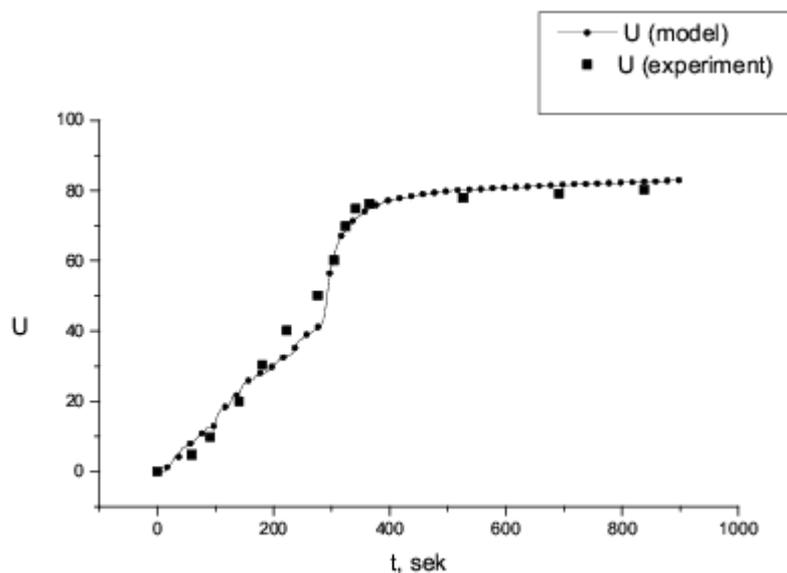


Рис.2. Кинетические кривые полимеризации (точками показан ход экспериментальной зависимости полимеризации МГ при  $T=363$  К [2])

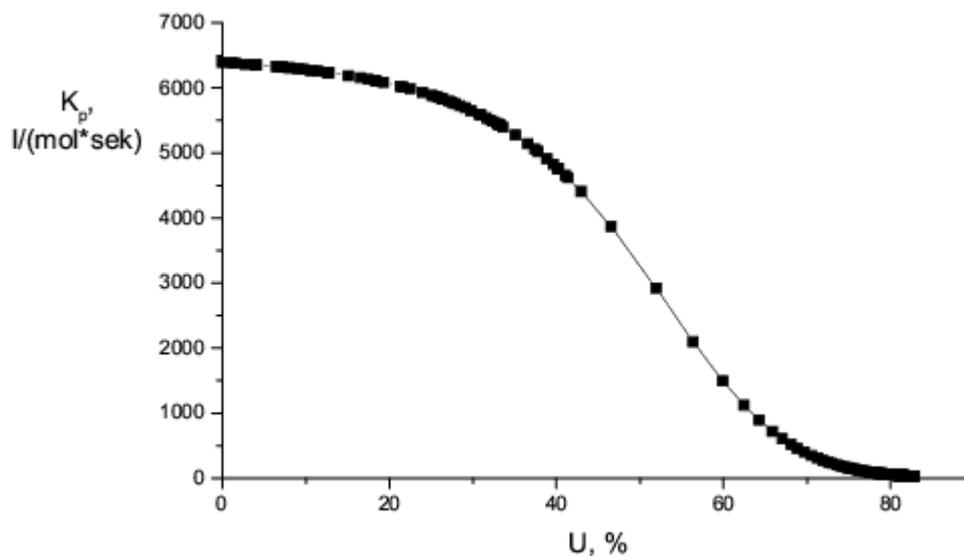


Рис.3. Зависимость константы скорости роста от степени превращения

На рис. 2 показаны расчетная и экспериментальная конверсионные кривые. Как видно из рисунка, модельная кривая показывает хорошее совпадение с экспериментальными

данными. Модельный расчет проводился с теми же значениями параметров, что и эксперимент.

Изменения константы скорости роста от конверсии показаны на рис.3. Влияние диффузионного эффекта уже сказывается по достижении 40-45% конверсии. При этом константа скорости роста уменьшается почти на треть. С увеличением степени превращения наблюдается резкое падение скорости полимеризационного процесса, что должно привести к накоплению радикалов в системе. На этой стадии, ввиду ограниченной подвижности активных радикалов, реакции роста и обрыва протекают значительно медленнее. Это связано с изменением фазового состояния реакционной массы от жидкого до стеклообразного.

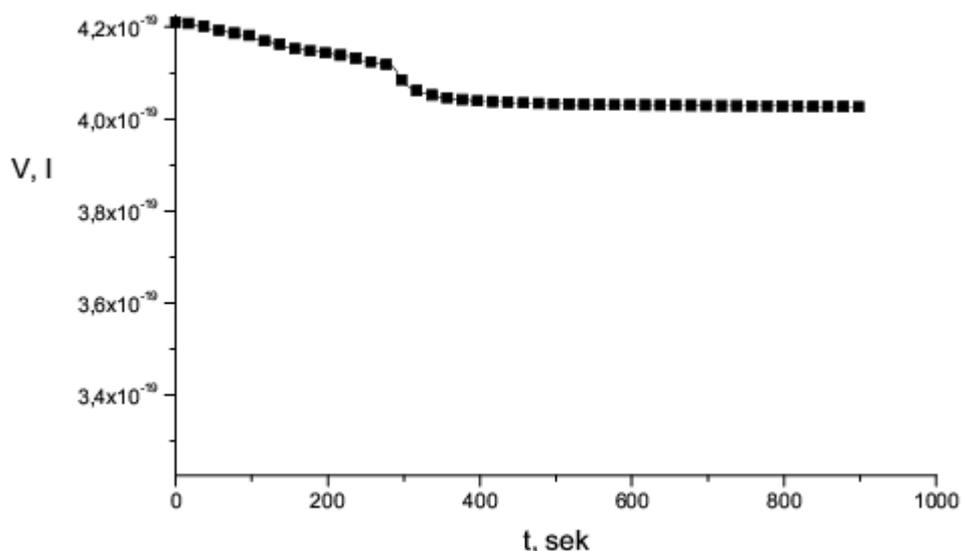


Рис.4. Изменение реакционного объема со временем в ходе полимеризации МГ

На рис.4 показан график изменения объема вещества модельного реактора в ходе полимеризационного процесса. Образованное полимерное тело имеет более высокую плотность нежели исходный мономер и находится в твердом состоянии. В результате при протекании химической реакции наблюдается уменьшение общего объема реакционной системы.

## 5. Заключение

Разработанная модель и созданное на ее основе программное обеспечение позволяет на качественном и количественном уровне имитировать процесс трехмерной свободно-радикальной полимеризации МГ. При этом возможна калибровка модели для имитации процесса трехмерной свободно-радикальной полимеризации любого другого полифункционального мономера или олигомера.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ №08-01-97028-р\_поволжье\_а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багдасарян Х.С. Теория радикальной полимеризации. - М.: Наука, 1966. - 299 с.
2. Гришина И.Н., Сивергин Ю.М., Киреева С.М., Жильцова Л.А. //Пластические массы. - 2000. - № 1. - С.7.
3. Сивергин Ю.М., Гришина И.Н., Турьев А.В. Кинетика распада гидроперекиси кумола
4. Buback M., *Macromol. Chem.* 191, (1575) 1990.
5. Stickler M., Panke D., Hamielec A.E. // *J.Polymer Science*, 1984. - V.22. - P.2243 - 2253.
6. Kelly F.N., Bueche F. // *J. Polym. Science*, 1961. - Vol. L. - P.549 - 556.
7. Чалых А.Е. Диффузия в полимерных системах. М.: Химия, 1987. - 312 с.
8. Липатов Ю.С. // *Успехи химии*. - 1978. -Т. XLVII. - № 2. - С. 332.

---

## Modelling of three-dimension free-radical polymerisation by the Monte-Carlo method.

© M.N. Fattakhov<sup>5</sup>, R.R. Ismailov<sup>6</sup>, E.D. Shakiryaynov<sup>7</sup>, S.M. Usmanov<sup>8</sup>

**Abstract.** In this paper the model of three-dimensional free-radical polymerization process of oligoetheracrilates to limited degrees of transformation is considered. The reactionary system model is based on the ideal mixing reactor, not taking into account the geometry of the growth of the polymer chain. The reactionary process is modeled by the Monte-Carlo method.

**Key Words:** three-dimension free-radical polymerisation, ideal mixing reactor, Monte-Carlo method.

---

<sup>5</sup>Lecturer of MM and IS Chair, BirSSPA, Birsk; hanzafar@mail.ru.

<sup>6</sup>Senior teacher of I and ITE Chair, BirSSPA, Birsk; esmrauf@mail.ru.

<sup>7</sup>Associate professor, head of the TP and PE Chair, BirSSPA, Birsk; hanzafar@mail.ru.

<sup>8</sup>Professor, chancellor of BirSSPA, Birsk; hanzafar@mail.ru.

УДК 519.862.7

## Построение математической модели прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров

© П.А. Шаманаев<sup>1</sup>, В.А. Атряхин<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе излагается метод построения математической модели для прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров. В качестве математической модели используется система линейных регрессионных уравнений.

**Ключевые слова:** система линейных регрессионных уравнений, двухшаговый метод наименьших квадратов, матрица корреляции.

### 1. Введение

Воспроизводство научных и научно-педагогических кадров не только по приоритетным отраслям развития науки, техники и технологий, но и по всем направлениям специальностей высшей научной классификации, является актуальной задачей системы высшего профессионального образования Российской Федерации. В связи с этим появляется необходимость в разработке и апробации математических методов и моделей прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации, как по приоритетным направлениям развития науки, техники и технологий, так и по номенклатуре специальностей научных работников [1].

В настоящей работе для исследования задачи прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации строится математическая модель в виде системы линейных регрессионных уравнений [2].

Системы регрессионных уравнений так же называют системами одновременных эконометрических уравнений. Понятие системы одновременных эконометрических уравнений и методы их решения были впервые предложены норвежским экономистом Т. Хаавельмо [3], лауреатом Нобелевской премии по экономике (1989 год).

Важной характеристикой систем одновременных эконометрических уравнений является идентификация. В случае точной идентификации для нахождения оценок неизвестных параметров системы применяется косвенный метод наименьших квадратов (КМНК). Если же система сверхидентифицирована, то оценки ищутся с помощью двухшагового метода наименьших квадратов (ДМНК) [4],[5].

### 2. Описание модели прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров

Обозначим через  $x_j(k)$  - число выпускников высшего профессионального образования в  $k$  - ом году по  $j$  - ой укрупненной группе специальностей высшего профессионального образования,  $j = \overline{1, m}$ . Перечень укрупненных групп специальностей высшего профессионального образования приведен в таблице 1 [6].

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

<sup>2</sup>Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; atrvol@rambler.ru.

| Шифр УГС | Наименование УГС ВПО   |
|----------|--|
| 01.00.00 | Физико-математические науки                                      |
| 02.00.00 | Естественные науки   |
| 03.00.00 | Гуманитарные науки   |
| 04.00.00 | Социальные науки   |
| 05.00.00 | Образование и педагогика   |
| 06.00.00 | Здравоохранение  |
| 07.00.00 | Культура и искусство   |
| 08.00.00 | Экономика и управление   |
| 09.00.00 | Информационная безопасность                                      |
| 10.00.00 | Сфера обслуживания   |
| 11.00.00 | Сельское и рыбное хозяйство                                      |
| 12.00.00 | Геодезия и землеустройство                                       |
| 13.00.00 | Геология, разведка и разработка полезных ископаемых              |
| 14.00.00 | Энергетика, Энергетическое машиностроение и электротехника       |
| 15.00.00 | Металлургия, машиностроение и материалобработка                  |
| 16.00.00 | Авиационная и ракетно-космическая техника                        |
| 17.00.00 | Оружие и системы вооружения                                      |
| 18.00.00 | Морская техника  |
| 19.00.00 | Транспортные средства  |
| 20.00.00 | Приборостроение и оптотехника                                    |
| 21.00.00 | Электронная техника радиотехника и связь                         |
| 22.00.00 | Автоматика и управление  |
| 23.00.00 | Информатика и вычислительная техника                             |
| 24.00.00 | Химическая и биотехнология                                       |
| 25.00.00 | Воспроизводство и переработка лесных ресурсов                    |
| 26.00.00 | Технология продовольственных продуктов и потребительских товаров |
| 27.00.00 | Строительство и архитектура                                      |
| 28.00.00 | Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды         |

Таблица 1: Перечень укрупненных групп специальностей ВПО

Обозначим через  $y_j(k)$  - число поступивших в аспирантуру в  $k$  - ом году по  $i$  - ой укрупненной группе специальностей высшей научной классификации,  $i = \overline{1, n}$ . Перечень укрупненных групп специальностей высшей научной классификации приведен в таблице 2 [1].

В качестве математической модели, прогнозирующей поток научных и научно-педагогических кадров, возьмем систему линейных регрессионных уравнений вида [4]:

$$y(k) = By(k) + Ax(k) + \varepsilon, \quad (2.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$y(k) = \text{column}(y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k))$ ,  $x(k) \equiv \text{column}(x_0(k), x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k))$ ,  $x_0(k) = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $B \equiv [b_{ij}]$  - постоянная  $(n \times n)$  - матрица с нулевыми диагональными элементами;  $A \equiv [a_{ij}]$  - постоянная  $(n \times (m+1))$  - матрица;  $\varepsilon = \text{column}(\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(n))$  -

вектор случайных возмущений. Предположим, что  $\varepsilon$  имеет многомерное нормальное распределение с математическим ожиданием равным нулю и матрицей ковариации  $\Omega = \sigma^2 E_n$ ,  $E_n$  - единичная матрица размерности  $n$ .

| Шифр УГС | Наименование УГС высшей научной классификации |
|----------|---|
| 01.00.00 | Физико-математические науки                   |
| 02.00.00 | Химические науки                              |
| 03.00.00 | Биологические науки                           |
| 05.00.00 | Технические науки                             |
| 06.00.00 | Сельскохозяйственные науки                    |
| 07.00.00 | Исторические науки и археология               |
| 08.00.00 | Экономические науки                           |
| 09.00.00 | Философские науки                             |
| 10.00.00 | Филологические науки                          |
| 12.00.00 | Юридические науки                             |
| 13.00.00 | Педагогические науки                          |
| 14.00.00 | Медицинские науки                             |
| 17.00.00 | Искусствоведение                              |
| 19.00.00 | Психологические науки                         |
| 22.00.00 | Социологические науки                         |
| 23.00.00 | Политология                                   |
| 24.00.00 | Культурология                                 |
| 25.00.00 | Науки о Земле                                 |

Таблица 2: Перечень укрупненных групп специальностей высшей научной классификации

Роль эндогенных переменных играют  $y_i(k)$ , в качестве экзогенных переменных выступают  $x_j(k)$ .

Если построенная математическая модель окажется точно идентифицированной системой эконометрических взаимосвязанных уравнений, то для нахождения оценок неизвестных параметров применяется косвенный метод наименьших квадратов (КМНК) [1].

Если же модель сверхидентифицирована, то для нахождения оценок неизвестных параметров применяется двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК) [1].

Опишем поэтапно схему применения метода КМНК для системы (2.1):

1) Запишем систему (2.1) в приведенной форме

$$\bar{y}(k) = Dx(k) + \nu, \quad (2.2)$$

где  $D = [E_n - B]^{-1}A$ ,  $\nu = [E_n - B]^{-1}\varepsilon$ ,  $E_n$  - единичная матрица размерности  $n$ . Предполагается, что определитель матрицы  $E_n - B$  отличен от нуля.

2) Для нахождения коэффициентов матрицы  $D$  применим обычный метод наименьших квадратов к каждому из  $n$  уравнений системы (2.2);

3) Определим расчетные значения  $\bar{y}_i(k)$  из системы (2.2);

4) Найдем коэффициенты матриц  $B$  и  $A$  на основании найденных коэффициентов матрицы  $D$ .

5) Подставим найденные коэффициенты матриц  $B$  и  $A$  и расчетные значения  $\bar{y}_i(k)$  вместо  $y_i(k)$  в систему (2.1) и вычислим искомые значения вектора  $y(k)$ .

Опишем поэтапно схему применения метода ДМНК для системы (2.1):

- 1) Запишем систему (2.1) в приведенной форме (2.2)
- 2) Для нахождения коэффициентов матрицы  $D$  применим обычный метод наименьших квадратов к каждому из  $n$  уравнений системы (2.2);
- 3) Определим расчетные значения  $\bar{y}_i(k)$  из системы (2.2);
- 4) Подставим в правую часть системы (2.1) расчетные значения  $\bar{y}_i(k)$  вместо  $y_i(k)$ .  
Получим

$$y(k) = B\bar{y}(k) + Ax(k) + \varepsilon, \quad (2.3)$$

- 5) Для определения коэффициентов матриц  $B$  и  $A$  применим к каждому уравнению системы (2.3) обычный метод наименьших квадратов;
- 6) Подставим найденные коэффициенты матриц  $B$  и  $A$  в систему (2.1) и вычислим искомые значения вектора  $y(k)$ .

При анализе математической модели динамики потока выпускников по укрупненным группам специальностей научных работников Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева система (2.1) оказалась сверхидентифицированной. Поэтому для её исследования может быть применен двухшаговый метод наименьших квадратов.

Построенная математическая модель позволяет прогнозировать динамику потока научных и научно-педагогических кадров по укрупнённым группам специальностей высшей научной классификации.

Работа выполнена при поддержке аналитической ведущей целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 года)»

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Номенклатура специальностей научных работников [Электронный ресурс]// Приложение к Приказу Минобрнауки РФ от 25.02.2009 № 59 «Об утверждении номенклатуры специальностей научных работников» (в ред. Приказа Минобрнауки РФ от 11.08.2009 № 294). Режим доступа: - [http://vak.ed.gov.ru/common/img/uploaded/files/vak/norm\\_doc/2010/Prilozhenie\\_k\\_prikazu\\_N59\\_ot\\_25.02.2009.doc](http://vak.ed.gov.ru/common/img/uploaded/files/vak/norm_doc/2010/Prilozhenie_k_prikazu_N59_ot_25.02.2009.doc)
2. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980. - 456 с.
3. Haavelmo T. The statistical implications of a system of simultaneous equations // *Econometrica* 1943a. Vol. 11. N 1, pp. 1-12.
4. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 1998. - 1022 с.
5. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. - М.: Дело, 2004. - 576 с.
6. Общероссийский классификатор специальностей по образованию ОК 009-2003. Постановление Госстандарта России от 30.09.2003. № 276-ст. № ОК 009-2003.

## Construct a mathematical model forecasting the flow of scientific and scientific-pedagogical staff

© P.A. Shamanaev<sup>3</sup>, V.A. Atryahin<sup>4</sup>

**Abstract.** This paper presents a method for constructing model forecasting the flow of scientific and pedagogical staff. The mathematical model uses a system of linear regression equations.

**Key Words:** system of linear regression equations, two-step method of least squares, correlation matrix.

---

<sup>3</sup>Chief of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; kospa@yandex.ru.

<sup>4</sup>Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; atrvol@rambler.ru.

УДК 519.633

## Кинетическое описание и моделирование процессов с учетом дезактивации катализатора

© Р. Р. Шангареев<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе рассмотрены модели химических процессов, протекающих в закрытых системах с учетом изменения активности катализатора. Произведены вычисления по процессу дегидратации изомилового спирта на алюмоносилкатных катализаторах, сопровождающимся падением концентраций.

**Ключевые слова:** обыкновенные системы дифференциальных уравнений, дезактивация катализатора, принцип максимума Понтрягина.

### 1. Введение

Процессы, приводящие в каталитическом реакторе к превращению сырья в необходимые продукты, очень сложны. Они включают ряд параллельно-последовательных химических и физических стадий. Для практики важно, с какой скоростью происходит дезактивация и какие параметры процесса на нее влияют. Ответ на эти вопросы дает кинетика дезактивации катализаторов, математическое моделирование которой становится все более актуальным в наши дни.

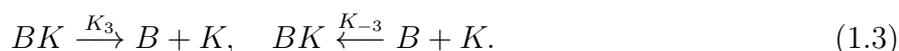
Рассмотрим реакцию  $A \rightarrow B$ . Предположим механизм ее протекания из трех стадий. Первая стадия - обратимая адсорбция исходного вещества А:



Вторая - необратимая изомеризация адсорбированного исходного компонента в адсорбированный продукт:



Третья - обратимая адсорбция продукта реакции В:



Представим три наиболее типичных механизма дезактивации. Рассмотрим случай, когда отравление катализатора вызывается самим исходным веществом А. При этом вместе со схемой (1.1) - (1.3) рассматривается дополнительная стадия



где  $P'$  — неактивные участки поверхности катализатора.

Также отравление катализатора может быть вызвано продуктом реакции В. Это отражается в добавлении к схеме (1.1) - (1.3) стадии



<sup>1</sup>Ассистент кафедры математики и информатики, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Rustam.Shangareyev@gmail.com.

И наконец, отравление может вызываться посторонними примесями, ядами, что при этом на ряду со схемой (1.1) - (1.3) рассматривается стадия



## 2. Постановка задачи

Предположим, что реакция протекает в закрытой системе, и измерению доступно изменение концентрации  $a$  исходного вещества А во времени:

$$\frac{da}{dt} = -k_1 \cdot a \cdot x_1 + k_{-1} \cdot x_2; \quad a(0) = a_0, \quad (2.1)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — концентрации К,АК,ВК соответственно.

Исключим концентрации промежуточных веществ  $x_1, x_2$  в (2.1). Для определенности рассмотрим схему (1.1) - (1.4). Так как отношение числа активных мест и количества реагирующим молекул меньше единицы, воспользуемся условием квазистационарности  $x_1, x_2$ :

$$\begin{cases} -k_1 \cdot x_1 + k_{-1} \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3 - k_3 \cdot b \cdot x_1 = 0, \\ k_1 \cdot a \cdot x_1 - k_{-1} \cdot x_2 - k_2 \cdot x_2 = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Учет дезактивации производится уравнением

$$\frac{dS}{dt} = -k_4' \cdot x_2; \quad S(0) = S_0. \quad (2.3)$$

где  $S = x_1 + x_2 + x_3$  — сумма концентраций К,АК,ВК.

Для схемы (1.1) - (1.3), (1.5) квазистационарность предполагается по  $x_1$  и  $x_3$  и дифференциальное уравнение для суммы концентраций имеет вид:

$$\frac{dS}{dt} = -k_4'' \cdot x_3; \quad S(0) = S_0. \quad (2.4)$$

Для схемы (1.1) - (1.3), (1.6) квазистационарность предполагается по  $x_2$  и  $x_3$  и дифференциальное уравнение для суммы концентраций имеет вид:

$$\frac{dS}{dt} = -k_4''' \cdot x_1[\text{poison}]; \quad S(0) = S_0. \quad (2.5)$$

Концентрацию яда будем считать постоянной, входящей в множитель  $k_4'''$ . Исключая переменные  $x_1, x_2, x_3$ , получаем дифференциальные уравнения для каждого типа механизма дезактивации:

$$\frac{da_j}{dt} = f_0(a_j) + f_j(a_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

где  $f_0$  — общая функция для всех трех типов дезактиваций, определяющаяся механизмом химического превращения;  $f_1$  — функции, отражающие механизм дезактивации.

Выпишем кинетические уравнения, соответствующие различным механизмам дезактивации.

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -\frac{c_1 \cdot a_1}{1 + c_2 \cdot a_1} + \frac{c_2 \cdot a_1 \cdot (1 - a_1)}{1 + c_2 \cdot a_2}, \\ \frac{da_2}{dt} = -\frac{c_1 \cdot a_2}{1 + c_2 \cdot a_2} + \frac{c_4 \cdot a_2 \cdot (1 - a_2) + c_5 \cdot a_2 \cdot \ln a_2}{1 + c_2 \cdot a_2}, \\ \frac{da_3}{dt} = -\frac{c_1 \cdot a_3}{1 + c_2 \cdot a_3} + \frac{c_6 \cdot a_3 \cdot \ln a_3}{1 + c_2 \cdot a_3}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{k_1 \cdot k_{-3} \cdot k_2}{(k_{-1} + k_2)(k_{-3} + k_3)}, \\ c_2 = \frac{k_1(k_{-3} + k_2) - k_3(k_{-1} + k_2)}{(k_{-1} + k_2)(k_{-3} + k_3)}, \\ c_3 = \frac{k'_4 \cdot k_1 \cdot k_{-3}}{(k_{-1} + k_2)(k_{-3} + k_3)}, \\ c_4 = \frac{k''_4[k_1 \cdot k_2 - k_3(k_{-1} + k_2)]}{(k_{-1} + k_2)(k_{-3} + k_3)}, \\ c_5 = \frac{k''_4 \cdot k_3(k_{-1} + k_2)}{(k_{-1} + k_2)(k_{-3} + k_3)}, \\ c_6 = \frac{k'''_4 \cdot k_3(k_{-1} + k_2)}{(k_{-1} + k_2)(k_{-3} + k_3)}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Математическая постановка информативности кинетических измерений  $a(t)$  сводится к оценке максимальной разности решений дифференциальных уравнений, соответствующих различным типам дезактивации. Требуется найти такие  $a_i$ ,  $a_j$  ( $i \neq j, a_i \in [0; 1], a_j \in [0; 1]$ ), при которых достигается максимума величина

$$J = |a_i - a_j|. \quad (2.9)$$

Пусть  $\varepsilon$  - некоторый уровень разделения. Два механизма будут различимы при  $\max J \geq \varepsilon$ .

Рассмотрим модель процесса дегидратации изоамилового спирта на алюмосиликатных катализаторах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_1}{dt} = -\frac{2 \cdot a_1}{1 + a_1} + \frac{a_1(1 - a_1)}{1 + a_2}, \\ \frac{da_2}{dt} = -\frac{2 \cdot a_2}{1 + a_2} + \frac{9 \cdot a_2 \cdot (1 - a_2) - 3 \cdot a_2 \cdot \ln a_2}{1 + a_2}, \\ \frac{da_3}{dt} = -\frac{2 \cdot a_3}{1 + a_3} + \frac{-3 \cdot a_3 \cdot \ln a_3}{1 + a_3}, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

с начальными условиями

$$a_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

В качестве критерия оптимизации рассматривается выражение

$$J = |a_i - a_j| \rightarrow \max. \quad (2.12)$$

Ограничения на  $a_i$ :

$$0 \leq a_i \leq 1. \quad (2.13)$$

Составим функцию Понтрягина для задачи (2.10) - (2.13):

$$H(a_1, a_2, a_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = f_1(a_1, a_2, a_3) \cdot \psi_1 + f_2(a_1, a_2, a_3) \cdot \psi_2 + f_3(a_1, a_2, a_3) \cdot \psi_3, \quad (2.14)$$

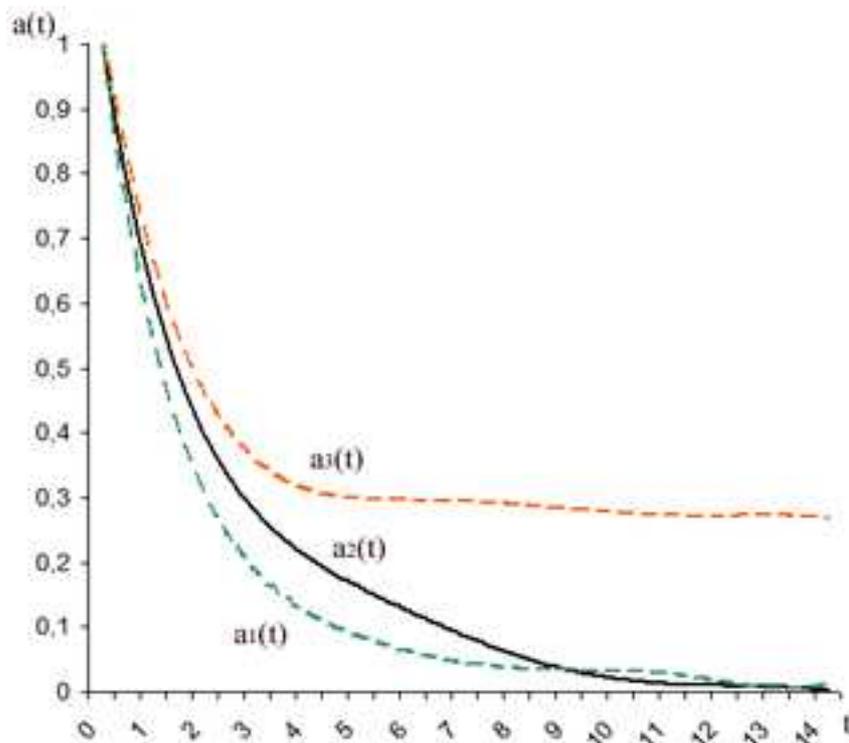
где  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  определяются из сопряженной системы:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{2}{1+a_1} + \frac{(1-2 \cdot a_1)}{1+a_2}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{2}{1+a_2} + \frac{6-18 \cdot a_2-3 \cdot \ln a_2}{1+a_2} - \frac{9 \cdot a_2 \cdot (1-a_2)-3 \cdot a_2 \cdot \ln a_2}{(1+a_2)^2}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{2+3 \cdot a_3 \cdot \ln a_3}{(1+a_3)^2} - \frac{3 \cdot \ln a_3+3}{1+a_3}, \end{cases} \quad (2.15)$$

с граничными условиями

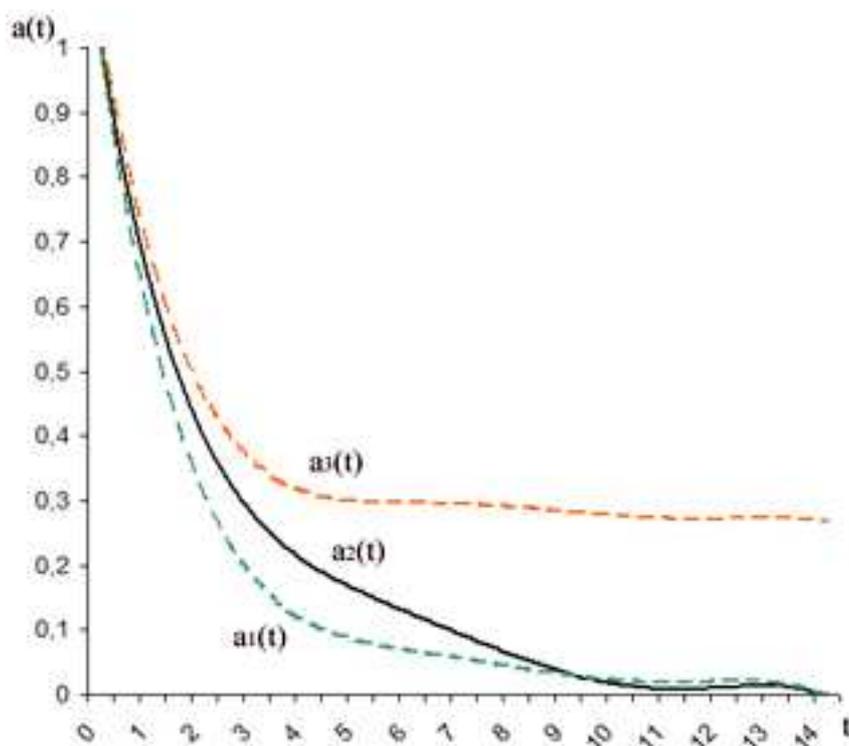
$$\psi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Для решения задачи (2.10)-(2.16) были применены численные методы последовательных приближений и вариации пространства управления с уровнем разделения  $\varepsilon = 0.05$ . Результаты вычислений представлены на рисунках (2.1) - (2.3).



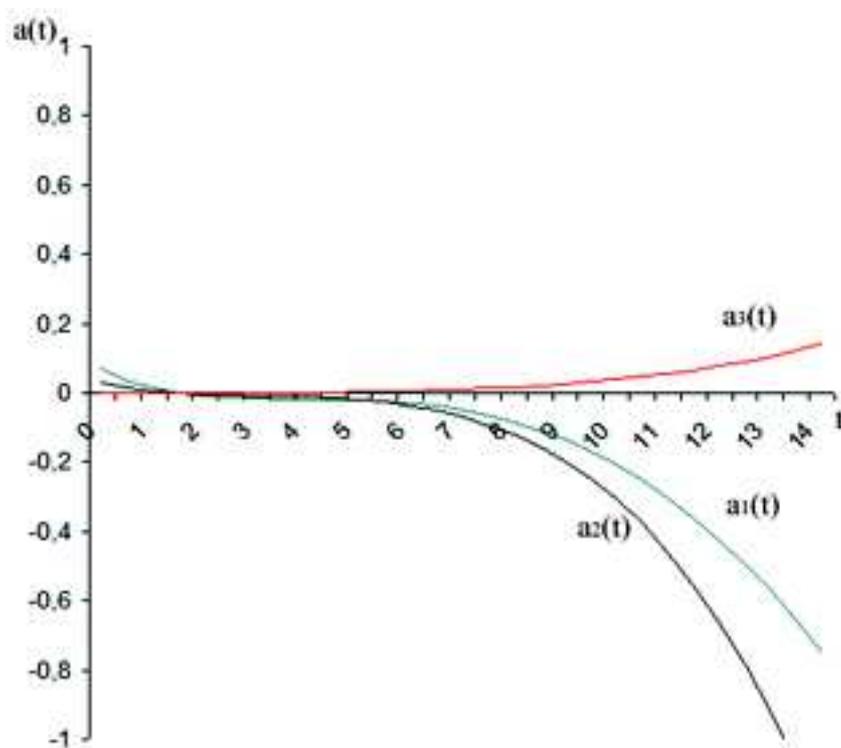
Р и с у н о к 2.1

Концентрационные профили  $a(t)$ , рассчитанные методом последовательных приближений.



Р и с у н о к 2.2

Концентрационные профили  $a(t)$ , рассчитанные методом вариации пространства управлений.



Р и с у н о к 2.3

Сравнение результатов метода последовательных приближений и метода вариаций пространства управлений.

Как видно из полученных данных, процесс дегидратации изомилового спирта на алюминиосилкатных катализаторах характеризуется падением концентраций  $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$  с течением времени. Для разделения ситуаций отравления исходным веществом и отравления продуктом с уровнем 0.05 необходимо иметь данные  $a_i \in [0; 0.5]$ , где  $i = 1, 2, 3$ . Если повысить уровень разделения  $\varepsilon$  до 0.1, то уменьшится промежуток измерения  $a_i$ , на которых этот уровень достигается. Таким образом, необходимым условием различия механизмов дезактивации является проведение кинетического эксперимента при достаточно больших степенях превращения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спивак С.И., Масагутов Р.М. Кинетическое описание и дискриминация механизмов дезактивации катализаторов. – Новосибирск: Институт катализа СО АН СССР, 1985. – С.72-93.
2. Понтрягин Л.С., Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

## Kinetic characterization and simulation of processes taking into account deactivation of the catalyst.

© R. R. Shangareev<sup>2</sup>

**Abstract.** In the work discusses models of chemical processes taking place in closed systems, taking into account changes in the activity of the catalyst. Made calculations on the process of dehydration of alcohol on izomyle alyuminosilicate catalysts, accompanied by falling concentrations.

**Key Words:** ODE systems, deactivation of catalyst, Pontryagin principle.

---

<sup>2</sup>Assistant of Applied Mathematics and Informatics Chair, Sterlitamak branch of Bashkir State University after Z. Biyisheva, Sterlitamak; Rustam.Shangareyev@gmail.com.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

### Определение вещественного радиуса устойчивости

© В. В. Дикусар<sup>1</sup>, Н. В. Зубов<sup>2</sup>, С. В. Зубов<sup>3</sup>

**Аннотация.** В работе рассмотрен достаточно широкий класс матриц устойчивых по Важевскому, т. е. устойчивых матриц  $P$  для которых симметрическая матрица  $P + P^T$  также устойчива. Для этого семейства матриц показано, что их вещественным радиусом устойчивости, являясь наименьшее собственное число матрицы  $-(P + P^T)/2$ . Этот результат позволяет определить вещественный радиус устойчивости «сверхустойчивых» матриц, т. к. они являются матрицами устойчивыми по Важевскому.

**Ключевые слова:** матрица, устойчивость, вещественный радиус, спектральная норма, нестационарная система.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Будем называть матрицу  $P$  устойчивой по Важевскому, если матрица  $H = \frac{P+P^T}{2}$  является устойчивой.

Введение подобного определения связано с тем, что Важевский, используя свойства дифференциальных уравнений, показал, что нестационарная система первого приближения  $\dot{X} = P(t)X$  будет устойчива, если все собственные числа  $\lambda_i(t)$  симметрической матрицы  $H(t) = \frac{P(t)+P(t)^T}{2}$  удовлетворяют условию  $\forall t \lambda_i(t) \leq \lambda < 0$ .

Очевидно, что если матрица  $P$  устойчива по Важевскому, то она устойчива [1]. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Будем называть вещественным радиусом устойчивости по Важевскому матрицы  $P$  наибольшее из чисел  $\gamma$ , при котором, матрица  $P + \Delta$  - устойчива по Важевскому, где матрица  $\Delta$ , удовлетворяет условию  $\|\Delta\| < \gamma$ . Здесь  $\|\Delta\|$  - спектральная норма.

Задача определения вещественного радиуса устойчивости является весьма сложной и совсем недавно решена только для стационарных матриц, причем полученные оценки являются весьма трудно проверяемыми [3]. Вопрос заключается в исследовании устойчивости матрицы  $P + \Delta$ , где матрица  $P$  - устойчива, а вещественная матрица  $\Delta$ , удовлетворяет условию  $\|\Delta\| < \gamma$ . Наибольшее из чисел  $\gamma$ , при котором матрица  $P + \Delta$  - устойчива и называется вещественным радиусом устойчивости.

Справедливы теоремы.

**Т е о р е м а 1.1.** Если матрица  $P$  - устойчива по Важевскому, то вещественный радиус устойчивости по Важевскому можно определить по формуле  $\gamma = \min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i$ , где  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1,n}$  - собственные числа симметрической матрицы  $H = \frac{P+P^T}{2}$ .

<sup>1</sup>Профессор Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва; zubovnv@mail.ru.

<sup>2</sup>Профессор Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва; zubovnv@mail.ru.

<sup>3</sup>Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a\_v\_zubov@mail.ru.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть матрица  $P$  - устойчива по Важевскому. Для того чтобы матрица  $P + \Delta$  была также устойчива по Важевскому необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства

$$\forall X \neq 0 \quad X^T \left( \frac{P^T + P}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X < 0. \quad (1.1)$$

Заметим, что имеют место два очевидных неравенства

$$X^T \left( \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X \leq \|\Delta\| \cdot \|X\|^2, \quad \|X\|^2 \min_{i=1, n} \lambda_i \leq X^T H X \leq \max_{i=1, n} \lambda_i \|X\|^2,$$

где  $H = \frac{P+P^T}{2}$ , а  $\lambda_i, (\overline{1, n})$  ее собственные числа. Из этих неравенств вытекает, что при выполнении неравенства  $\max_{i=1, n} \lambda_i + \|\Delta\| < 0$  выполняется и неравенство (1.1). Так как справедливо равенство -  $\max_{i=1, n} \lambda_i = \min_{i=1, n} |\lambda_i|$ , то одна из нижних оценок величины  $\gamma$  получена.

Для того чтобы убедиться в том, что найденное число  $\gamma$ , является наибольшим достаточно подобрать матрицу  $\Delta$  так, что  $\|\Delta\| = \min_{i=1, n} |\lambda_i|$ , но при этом матрица  $P + \Delta$  была неустойчива по Важевскому. Известно, что матрицу  $H$  можно привести к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования  $Q$  так, что  $H = Q_1 \Lambda Q_1^T$ . Для простоты будем считать, что диагональные элементы матрицы  $\Lambda$  расположены в порядке убывания. Возьмем матрицу  $\Delta = Q_1 \Lambda_1 Q_1^T$ , где  $\Lambda_1$  - диагональная матрица с диагональными элементами равными  $\min_{i=1, n} |\lambda_i|$ . Тогда с одной стороны  $\|\Delta\| = \min_{i=1, n} |\lambda_i|$ , т. к.  $\Delta = \Lambda_1$ , а с другой если в качестве вектора  $X$  выбрать первый столбец матрицы  $Q_1$ , то получим равенство

$$X^T \left( \frac{P + P^T}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X = 0.$$

Это показывает, что величина  $\gamma = \min_{i=1, n} |\lambda_i|$  является вещественным радиусом устойчивости по Важевскому для матрицы  $P$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

**З а м е ч а н и е 1.1.** Нетрудно видеть, что вещественный радиус устойчивости  $\gamma = \min_{i=1, n} |\lambda_i|$  совпадает с минимальным собственным числом матрицы  $-(P + P^T)/2$ .

**Т е о р е м а 1.2.** Пусть матрицы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  устойчивы по Важевскому, тогда их любая выпуклая линейная комбинация

$$P = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \quad (1.2)$$

также устойчива по Важевскому.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть матрицы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  устойчивы по Важевскому, тогда  $\forall X \quad X^T P_i X < 0, \quad i = \overline{1, m}$ . Суммируя, получим

$$P = X^T \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i \right) X = \sum_{i=1}^m \alpha_i X^T P_i X < 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Это означает, что матрица  $P$  устойчива по Важевскому. Кроме того, условие нормировки  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , является излишним. Можно заменить в этом равенстве единицу на любое положительное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

**З а м е ч а н и е 1.2.** Полученный результат справедлив и для нестационарных матриц  $P_j(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$  для которых, собственные числа  $\lambda_{ji}(t)$  симметрических матриц  $H_j(t) = \frac{P_j(t) + P_j(t)^T}{2}$  удовлетворяют условиям  $\forall t \quad \lambda_{ji}(t) \leq \lambda_j < 0$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 07-07-00104 и грант № 06-01-00244.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fan Ky. On a Theorem of Weyl Concerning the Eigenvalues of Linear Transformation // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1949. Vol. 35, No 1. P. 652 -655.
2. В.В. Дикусар, Г.А. Зеленков, Н.В. Зубов. Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости. - М.: Изд. ВЦ РАН, 2007, 234 с.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002.
4. Введение в теорию устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 223 с.
5. Блистанова Л.Д. и др. Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа. - СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2002. - 119 с.
6. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М. Ил, 1954.
7. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. - М.: Гостехиздат, 1941.
8. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. - С.-Петербург, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2000.
9. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. - Л.: Судпромгиз, 1959.
10. Красовский Н.Н. Теория управления движением. - М.: Наука, 1968.
11. Лагранж Ж. Аналитическая динамика. - М.: Гостехиздат, 1950.
12. Лурье А.И. Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961.
13. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. - М.: Гостехиздат, 1949.

# The definition material radius of stability

© V. V. Dicusar <sup>4</sup>, N. V. Zubov <sup>5</sup>, S .V. Zubov <sup>6</sup>

**Abstract.** In this work is looking off sufficiently classes of matrixes stability on Vagevskiy, i. e. stability matrixes  $P$  for that symmetrical matrix  $P+P^T$  also stability. For this family of matrixes is describes, that they material radius of stability is appears smaller own number of matrix -  $(P + P^T)/2$ . This result is allows to define material raduis of stability "over stability"matrixes, i. e. they ia appears the matrixes stability on Vashevskiy.

**Key Words:** matrix, stability, material radius, spectral norma, in stationary system.

---

<sup>4</sup>Professor of The computing center family A.A. Dorodnichina, Moscow, zubovnv@mail.ru.

<sup>5</sup>Professor of The computing center family A.A. Dorodnichina, Moscow, zubovnv@mail.ru.

<sup>6</sup>Associate of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; zubovnv@mail.ru.

УДК 517.9

## Модифицированный метод построения минимального многочлена

© С.А. Дутов <sup>1</sup>, Зубова О. А. <sup>2</sup>, Иванов А. И. <sup>3</sup>

**Аннотация.** В статье приводится модифицированный метод построения минимального многочлена с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Предлагаемый подход, не изменяя основной идеи метода, дает возможность в высшей степени сократить число вычислений. Если ранее для построения коэффициентов минимального многочлена матрицы  $n$ -ого порядка при использовании метода необходимо было искать решение систем линейных алгебраических уравнений порядка  $n^2 \times m$ ,  $n < m$ , то в модифицированном методе для этого достаточно искать решение систем линейных алгебраических уравнений порядка  $n \times m$ ,  $n < m$ .

**Ключевые слова:** минимальный многочлен, алгебраическое уравнение, матрица, коэффициент, собственное число.

Для вычисления коэффициентов минимального многочлена матрицы  $A$  известно всего несколько подходов, которые условно можно разделить на аналитические и вычислительные методы [2], [3]. К первой группе можно отнести приведение матрицы к форме Жордана и к форме Смита. Во вторую группу входит метод Данилевского приведения матрицы к форме Фробениуса. Однако оба подхода первой группы фактически вычисляют собственные числа этой матрицы, что является отдельной и непростой задачей. Предпочтительнее использовать методы, не требующие вычисления спектра. Метод Данилевского дает коэффициенты характеристического многочлена, если он совпадает с минимальным, иначе матрица Фробениуса будет юлочной и один из блоков дает коэффициенты минимального полинома.

Для краткости напомним суть метода построения минимального многочлена путем решения системы линейных алгебраических уравнений изложенного в работе [2].

Пусть  $A$  - вещественная, постоянная матрица размера  $n \times n$ . Поставим задачу поиска минимального многочлена этой матрицы, т. е. многочлена наименьшей степени анулирующего матрицу  $A$  с коэффициентом при старшей степени равным единице. Таким образом минимальный многочлен имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0. \quad (1.1)$$

причем выполняется матричное тождество:

$$A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \dots + c_1A + c_0E = 0 \quad (1.2)$$

Заметим, что вещественные матрицы размера  $n \times n$  образуют вещественное линейное пространство размерности  $n^2$ , где можно использовать все результаты, полученные в линейной алгебре [1].

Исходя из этого, можно сформулировать очевидное утверждение.

<sup>1</sup>Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a\_v\_zubov@mail.ru.

<sup>2</sup>Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a\_v\_zubov@mail.ru

<sup>3</sup>Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a\_v\_zubov@mail.ru

**Т е о р е м а 1.3.** *Степень минимального многочлена равна  $k + 1$ , если матрицы*

$$A^k, A^{k-1}, \dots, A, A^0; A^0 = E \tag{1.3}$$

*- линейно независимы, а матрицы*

$$A^{k+1}, A^k, A^{k-1}, \dots, A, E \tag{1.4}$$

*уже линейно зависимы.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Действительно, если матрицы (1.4) линейно зависимы, то существует вещественные числа  $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$  не все равные нулю такие, что выполняется матричное тождество:

$$\sum_{i=0}^{k+1} c_i A^i = 0, \text{ ]} \text{ } A^0 = E. \tag{1.5}$$

Из этого множества следует, что  $c_{k+1} \neq 0$ , ибо в противном случае это будет означать, что матрицы (1.3) - линейно зависимы. Отсюда вытекает, что справедливо матричное равенство:

$$A^{k+1} + \frac{c_k}{c_{k+1}} A^k + \dots + \frac{c_1}{c_{k+1}} A + \frac{c_0}{c_{k+1}} E = 0. \tag{1.6}$$

Таким образом, коэффициенты этого матричного тождества, являются коэффициентами минимального многочлена. Заметим, что в силу теоремы Кэли-Гамильтона матрицы (1.4) линейно зависимы при  $k = n - 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Введем понятие развернутой матрицы  $B_k$  для матричной совокупности (1.3). Эта матрица размера  $n^2 \times (k + 1)$  столбцы которой составлены из столбцов  $A_{im}$ ,  $i = \overline{1, n}$  матриц  $A^m$ ,  $m = \overline{k, 0}$  записанных один под другим подряд, начиная с первого столбца этой матрицы ( $A_{1m}$ ), кончая последним ( $A_{nm}$ ):

$$B_k = \begin{pmatrix} A_{1k} & A_{1k-1} & \dots & E_1 \\ A_{2k} & A_{2k-1} & \dots & E_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{nk} & A_{nk-1} & \dots & E_n \end{pmatrix} = (A_k, \dots, A_0), \quad A_m = \begin{pmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{pmatrix}, \quad m = \overline{k, 0}. \tag{1.7}$$

Очевидно, что линейная независимость матриц (1.3) эквивалентна линейной независимости столбцов матрицы  $B_k$ , т. к. справедливо соотношение

$$b_k C = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k c_i A^i = 0, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T. \tag{1.8}$$

Это означает, что линейная независимость матриц ((1.3)) эквивалентна тому, что матрица  $B_k$  размера  $n^2 \times (k + 1)$ , является матрицей полного ранга, т. е. ее ранг равен  $k + 1$ .

Отсюда вытекает, что теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

**Т е о р е м а 1.4.** *Пусть  $k$  наименьшее из чисел ( $k \in \overline{0, n - 1}$ ) при котором система линейных алгебраических уравнений*

$$B_k C = A_{k+1}, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T, \quad (1.9)$$

имеет решение, тогда минимальный многочлен матрицы  $A$  имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \dots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \quad (1.10)$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена (1.10)  $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$ , являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (1.9).

**Доказательство.** Разрешимость уравнения (1.9) означает разрешимость матричного тождества

$$A^{k+1} = c_k A^k + c_{k-1} A^{k-1} + \dots + c_1 A + c_0 E. \quad (1.11)$$

Так как  $k$  является минимальным из чисел  $\overline{0, n-1}$ , то многочлен (1.10), является минимальным многочленом.

С другой стороны, если многочлен (1.10), является минимальным многочленом, то справедливо матричное тождество (1.11), которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (1.9).

**Доказательство закончено.**

**Замечание 1.3.** Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения  $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$  системы линейных алгебраических уравнений (1.9) для наименьшего целого числа  $k, k = \overline{1, n}$ . При этом величины  $-c_k, -c_{k-1}, \dots, -c_0$  будут коэффициентами минимального многочлена (1.10). Заметим, что в силу теоремы Кели - Гамильтона матричное уравнение (1.11) всегда имеет решение.

**Замечание 1.4.** Если решение уравнения (1.9) при наименьшем из чисел  $k = \overline{0, n}$  удовлетворяет условию  $c_0 = 0$ , то матрица  $A$  - вырожденная. Более того, если в этом решении  $p$  первых компонент нулевые  $c_0 = c_1 = \dots = c_{p-1} = 0$ , то кратность нулевого собственного числа матрицы  $A$  не меньше чем  $p$ .

**Замечание 1.5.** Если матрицы (1.3) линейно независимы, а матрицы (1.4) линейно зависимы, то матрица  $B_k^T B_k$  является положительно определенной, а матрица  $B_{k+1}^T B_{k+1}$  неотрицательной и имеет одно собственное число равно нулю. Как известно [1], для прямоугольной матрицы  $A$  размера  $n \times m$  ранг  $r$  сингулярной матрицы  $A^T A$  совпадает с рангом матрицы  $A$ , а ее сингулярные числа  $\rho_i$  неотрицательные. Причем, если, например,  $m \leq n$ , то число нулевых  $\rho_i$  равно  $m - r$ . Таким образом, чтобы найти коэффициенты минимального многочлена не обязательно искать решения системы (1.9) при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а достаточно проверить при каком числе  $k$  матрица  $B_{k+1}^T B_{k+1}$  становится неотрицательной (при меньших величинах  $k$  эта матрица является положительно определенной). Это сильно сократит число вычислений и для получения коэффициентов минимального многочлена необходимо найти решение только одной системы алгебраических уравнений (1.9) именно для этого числа  $k$ .

По аналогии с идеями, изложенными выше можно сформулировать следующее очевидное утверждение.

**Т е о р е м а 1.5.** Пусть  $k$  наименьшее из чисел ( $k \in \overline{0, n-1}$ ) при котором системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^k A_{ij}c_j = A_{ik+1}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.12)$$

имеют одно и то же решение  $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$ , тогда минимальный многочлен матрицы  $A$  имеет вид (1.10).

**Доказательство.** То, что системы уравнений (1.12) имеют одно и то же решение означает, что  $k$  наименьшее из чисел ( $k \in \overline{0, n-1}$ ) при котором система линейных алгебраических уравнений (1.9) имеет решение. Это означает, что выполняются все условия теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

**З а м е ч а н и е 1.6.** Хотя доказанное утверждение достаточно очевидно, но из него можно сделать важный вывод, который позволяет построить оптимальный алгоритм построения коэффициентов минимального многочлена. Действительно на первом этапе достаточно найти решение всего лишь одной из систем линейных алгебраических уравнений (1.12) для первого из чисел  $k = \overline{0, n}$  и проверить является ли это решение решением для всех остальных систем линейных алгебраических уравнений (1.12) при данной величине  $k$ . Если это так, то коэффициенты минимального многочлена найдены. В противном случае необходимо выбрать ту систему линейных алгебраических уравнений (1.12) к которой это решение не подходит и продолжать искать решение этой системы при  $k = k + 1$ . Нетрудно видеть, что, в конце концов, мы найдем коэффициенты минимального многочлена или коэффициенты характеристического многочлена в случае его совпадения с минимальным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 07-07-00104 и грант № 06-01-00244.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М: Наука, 1984.
2. Дикусар В.В., Зеленков Г.А., Зубов Н.В. Построение минимального многочлена с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений систем. Т. 29(1). М: Изд. КомКнига, 2007, с. 109-115.
3. Зеленков Г.А. Аналитические и численные методы построения характеристического многочлена: Монография. - Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2007. - 128 с.

# Modification methods of building minimum polynomials

© S.A. Dutov <sup>4</sup>, O.A. Zubova <sup>5</sup>, A.I. Ivanov <sup>6</sup>

**Abstract.** In this article is leading modification method of building minimum polynomial with help solution systems of linear algebraic equations. The proposed approach, isn't changes base idea of method is gives possibility in higher degree is reduces number of calculations. If early for building coefficients of minimum polynomial of matrix  $n$  - order by employment the method sufficiently was researched the solution of systems linear algebraically equations order to  $n^2 \times m$ ,  $n < m$ , then in modification method for this sufficiently is researches solution of systems linear algebraically equations in order to  $n \times m$ ,  $n < m$ .

**Key Words:** minimum polynomial, algebraical equation, matrix, coefficient, own number.

---

<sup>4</sup>Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a\_v\_zubov@mail.ru

<sup>5</sup>Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a\_v\_zubov@mail.ru

<sup>6</sup>Associate of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a\_v\_zubov@mail.ru

УДК 517.9

## Задача определения минимального числа управляющих воздействий

© Н. В. Зубов <sup>1</sup>, В. В. Дикусар <sup>2</sup>, С. А. Дутов <sup>3</sup>

**Аннотация.** Для линейных стационарных управляемых систем решена задача определения минимального числа управляющих воздействий, при которых открытую систему можно сделать полностью управляемой. Этот результат позволяет найти всю совокупность систем управления, при которых имеет место полная управляемость и обладающих при этом минимальной размерностью. В отличие от критерия Калмана предлагаемый подход позволяет рассматривать проблему полной управляемости еще на этапе создания управляемой системы. Кроме того, предлагаемый подход позволяет оценить избыточность систем управления.

**Ключевые слова:** управляемость, линейная комбинация, матрица оператора, сумма инвариантных подпространств, вектор.

Рассмотрим замкнутую линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{X} = AX + BU + F(t), \quad (1.1)$$

где  $A$  и  $B = \{B_1, \dots, B_m\}$  постоянные матрицы размера  $(n \times n)$  и  $(n \times m)$ ;  $U = (u_1, \dots, u_m)^T$  - вектор управлений  $u_i \in L_2[0, T]$ ,  $(i = \overline{1, m})$ ;  $F(t) \in KC[0, T]$  - кусочно-непрерывный вектор функция, определенная на интервале  $[0, T]$ .

Известно (критерий Калмана), что для того, чтобы на интервале  $[0, T]$  система (1.1) была полностью управляема необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\} \quad (1.2)$$

был равен  $n$ , т. е. совокупность векторов

$$B_i, AB_i, \dots, A^{n-1}B_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (1.3)$$

содержала  $n$  линейно независимых.

Поставим задачу поиска минимального числа  $p$  управляющих воздействий, при которых открытая система

$$\dot{X} = AX + F(t) \quad (1.4)$$

может быть сделана полностью управляемой, путем выбора соответствующей матрицы  $B = \{B_1, \dots, B_p\}$  размера  $(n \times p)$ , т. е. задачу минимизации структуры системы управления, при которой замкнутая система (1.1) будет полностью управляемой.

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Назовем характеристикой полной управляемости системы (1.4) (системы (1.1)) величину  $p = \max_{i=\overline{1, k}} p_i$ , где  $p_i$  - число линейно независимых собственных векторов соответствующих собственному числу  $\lambda_i$ ,  $(i = \overline{1, k})$  матрицы  $A$ . Иногда, для краткости, будем говорить о характеристике полной управляемости матрицы  $A$ .

<sup>1</sup>Профессор Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва; zubovnv@mail.ru

<sup>2</sup>Профессор Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва; zubovnv@mail.ru

<sup>3</sup>Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a\_v\_zubov@mail.ru.

Справедливы следующие теоремы.

**Т е о р е м а 1.6.** (Алгоритм минимизации). Если характеристика полной управляемости матрицы  $A$  равна  $p$ , то всегда можно выбрать  $p$  линейно независимых векторов  $B_1, \dots, B_p$ , являющихся столбцами матрицы  $B$  так, что система (1.1) будет полностью управляемой.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть характеристика полной управляемости матрицы  $A$  равна  $p$ . Покажем, что можно построить  $p$  линейно независимых векторов  $B_1, \dots, B_p$ , так, чтобы совокупность векторов

$$B_i, AB_i, \dots, A^{n-1}B_i, \quad i = \overline{1, p} \quad (1.5)$$

содержала  $n$  линейно независимых. Так как между матрицами и операторами существует взаимно однозначное соответствие, то перенесем рассмотрение поставленной выше задачи, в комплексное пространство  $C^n$ , считая, что матрица  $A$  является матрицей оператора  $A$  действующего в этом комплексном пространстве.

Будем полагать, что оператор  $A$  имеет собственные значения  $\lambda_i$ , ( $i = \overline{1, k}$ ), имеющие кратность  $k_i$ ,  $\sum_{i=1}^k k_i = n$ . Обозначим через  $T^i$ ,  $i = \overline{1, k}$  корневые инвариантные подпространства оператора  $A$  соответствующие этим собственным значениям и имеющими размерности  $k_i$ ,  $\sum_{i=1}^k k_i = n$ , дающим в прямой сумме все пространство  $C^n$ :  $T^1 \oplus \dots \oplus T^k = C^n$ . Каждое из этих подпространств  $T^i$  содержит  $p_i$  корневых векторов  $X_j^i$ ,  $j = \overline{1, p_i}$ , имеющих высоты  $r_j^{(i)}$ ,  $\sum_{j=1}^{p_i} r_j^{(i)} = k_i$ , а сами подпространства  $T^i$  представляют собой прямые суммы инвариантных подпространств  $T_j^i$ ,  $j = \overline{1, p_i}$  ( $T^i = T_1^i \oplus \dots \oplus T_{p_i}^i$ ,  $i = \overline{1, k}$ ) порождаемых корневыми векторами  $X_j^i$ ,  $j = \overline{1, p_i}$  и имеющими циклические базисы

$$X_j^i, (A - \lambda_i E)X_j^i, \dots, (A - \lambda_i E)^{r_j^{(i)}-1}X_j^i, \quad j = \overline{1, p_i}, i = \overline{1, k} \quad (1.6)$$

Таким образом, все пространство  $C^n$  представимо в форме прямой суммы непересекающихся инвариантных подпространств  $T_j^i$ ,  $j = \overline{1, p_i}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , имеющих базисы (1.6). Заметим, что каждое инвариантное корневое подпространство  $T^i$  содержит  $p_i$  линейно независимых собственных векторов  $(A - \lambda_i E)^{r_j^{(i)}-1}X_j^i$ ,  $j = \overline{1, p_i}$ .

Покажем, что можно выбрать  $p = \max_{i=\overline{1, k}} p_i$  линейно независимых векторов  $B_1, \dots, B_p$ , так, чтобы совокупность из  $n$  векторов

$$B_i, AB_i, \dots, A^{m_i-1}B_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{i=1}^p m_i = n \quad (1.7)$$

была линейно независимой.

Возьмем вектор  $B_1$ , как линейную комбинацию векторов принадлежащих корневым инвариантным подпространствам  $T_1^i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , причем все коэффициенты в этой линейной комбинации, стоящие при корневыми векторах  $X_1^i$ ,  $i = \overline{1, k}$  отличны от нуля.

Тогда легко показать, что совокупность из  $m_1$  векторов

$$B_1, AB_1, \dots, A^{m_1-1}B_1, \quad \sum_{i=1}^k r_1^{(i)} = m_1 \quad (1.8)$$

линейно независима и составляет базис в инвариантном подпространстве  $T_1 = T_1^1 \oplus \dots \oplus T_1^k$ .

Действительно, любая линейная комбинация векторов из совокупности векторов (1.8) может быть записана в виде  $\varphi_{m_1-1}(A)B_1$ , где  $\varphi_{m_1-1}(A)$  операторный многочлен степени  $m_1 - 1$ . Если предположить линейную зависимость этой совокупности, то это будет означать, что для некоторого операторного многочлена  $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)$  степени  $m_1 - 1$  справедливо равенство  $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)B_1 = 0$ . Так как в разложении вектора  $B_1$  присутствуют все корневые векторы  $X_1^i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , каждый из которых имеет высоту  $r_1^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , то многочлен  $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)$  для того, чтобы обнулить все компоненты вектора  $B_1$  должен иметь сомножители  $(A - \lambda_i E)^{r_1^{(i)}}$ , т. е. иметь степень больше чем  $m_1 - 1$ , ибо  $\sum_{i=1}^k r_1^{(i)} = m_1$ .

С другой стороны, любой вектор из совокупности (1.8) принадлежит инвариантному подпространству  $T_1$  имеющему размерность  $m_1$ . Это и означает, что совокупность из  $m_1$  векторов (1.8) линейно независима и составляет базис в инвариантном подпространстве  $T_1$ .

Исключим из дальнейшего рассмотрения подпространства  $T_1^k$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Возьмем вектор  $B_2$ , как линейную комбинацию векторов, принадлежащих корневым инвариантным подпространствам  $T_2^i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , причем все коэффициенты в этой линейной комбинации, стоящие при корневых векторах  $X_2^i$ ,  $i = \overline{1, k}$  отличны от нуля. Заметим, что в этой линейной комбинации может быть меньше корневых векторов, чем  $k$ , если какое либо корневое подпространство  $T^i$  содержало всего один корневой вектор  $X_1^i$ .

По аналогии с предыдущим можно показать, что совокупность из  $m_2$  векторов

$$B_2, AB_2, \dots, A^{m_2-1}B_2, \quad \sum_{i=1}^k r_2^{(i)} = m_2 \quad (1.9)$$

линейно независима и составляет базис в инвариантном подпространстве  $T_2 = T_2^1 \oplus \dots \oplus T_2^k$ .

Действуя таким же образом и далее, пока все корневые подпространства  $T^i$  не будут исчерпаны, мы построим  $p$  векторов  $B_1, \dots, B_p$  таких, что совокупности векторов (1.7) образуют базис в  $C^n$ . Это вытекает из того, что каждая совокупность векторов

$$B_1, AB_1, \dots, A^{m_1-1}B_1, \quad \sum_{i=1}^k r_1^{(i)} = m_1$$

представляет собой базис инвариантного пространства  $T_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , прямая сумма которых представляет собой все пространство  $C^n$ .

Заметим, что построенная совокупность  $B_1, \dots, B_p$  из  $p$  векторов является, вообще говоря, комплексной. Для того чтобы сделать ее вещественной, так чтобы совокупность из  $n$  вещественных векторов

$$B_i, AB_i, \dots, A^{m_i-1}B_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{i=1}^p m_i = n \quad (1.10)$$

была линейно независимой, достаточно при построении каждого из векторов  $B_j$  потребовать, чтобы его компоненты выбирались не только из подпространств  $T_j^i$ , порожденных комплексно сопряженными корневыми векторами  $X_j^i$ , но еще и были комплексно сопряжены. Это означает, что если одна из компонент  $Y_j$  вектора  $B_j$  выбирается из инвариантного подпространства  $T_j^i$  ( $Y_j \in T_j^i$ ), порожденного корневым вектором  $X_j^i$ , отвечающим комплексному числу  $\lambda_i$ , то другая компонента  $Z_j$  обязательно выбирается из инвариантного подпространства  $T_j^{i+1}$  ( $Z_j \in T_j^{i+1}$ ), порожденного комплексно-сопряженным корневым вектором  $\bar{X}_j^i$ , отвечающим

комплексно-сопряженному числу  $\bar{\lambda}_i$ . Причем эти компоненты выбираются так, чтобы быть комплексными-сопряженными величинами  $Y_j = \bar{Z}_j$ . При таком построении каждый вектор  $B_j$  получается вещественным, совокупности векторов (1.10) линейно независимы и принадлежат различным инвариантным подпространствам, прямая сумма которых и представляет все пространство  $C^n$ .

Доказательство закончено.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002.
2. Гантмахер Ф.Д. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 576 с.
3. В.В. Дикусар, Г.А. Зеленков, Н.В. Зубов. Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости. - М.: Изд. ВЦ РАН, 2007, 234 с.

---

# The tasks of definition minimum number controlling action

© N.V. Zubov <sup>4</sup>, V. V. Dicusar <sup>5</sup>, S.A. Dutov <sup>6</sup>

**Abstract.** For linear stationary system is solves the task of definition minimum number control action, by that open system may be make fully controlling. This result is allows to find all totality of systems control, by that is take place fully controlling and is possess by this minimum dimensions. As distinct from criteria Kalman's proposed approach is allows to consider the problem fully controlling another on stage of foundation controlling system. Moreover, offered approach is allows to appreciate excess of system control.

**Key Words:** controlling, linear combination, matrix of operator, summa of invariant subspaces, vector.

---

<sup>4</sup>Professor of The computing center family A.A. Dorodnichina, Moscow, zubovnv@mail.ru

<sup>5</sup>Professor of The computing center family A.A. Dorodnichina, Moscow, a\_v\_zubov@mail.ru

<sup>6</sup>Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a\_v\_zubov@mail.ru

УДК 517.9

## Построение определенного решающего правила

© В. И. Зубов<sup>1</sup>, О. А. Зубова<sup>2</sup>, А. И. Иванов<sup>3</sup>

**Аннотация.** В данной статье решается задача разделения трех заданных множеств при помощи двух параллельных гиперплоскостей. Рассмотрена задача идентификации, которая заключается в построении определенного решающего правила, позволяющего отнести любую точку из пространства к тому или иному множеству. Строятся методы оценки точности индентифицирования точек пространства с помощью введения двух выпуклых функционалов, один из которых является гдадким. Предлагаемый подход легко расширить на случай, когда решающее правило определяется набором нескольких пар параллельных гиперплоскостей.

**Ключевые слова:** решение, сумма расстояний, множество, параллельная гиперплоскость, функционал, функция.

Пусть в пространстве  $R^n$  заданы три множества точек

$$A = \{a_i | i \in I \stackrel{def}{=} 1 : N_1\},$$

$$B = \{b_j | j \in J \stackrel{def}{=} 1 : N_2\},$$

$$C = \{c_k | k \in K \stackrel{def}{=} 1 : N_3\}.$$

Рассмотрим задачу разделения этих множеств при помощи двух параллельных гиперплоскостей, задаваемых уравнениями:

$$r(x, \bar{l}_1) = 0, \quad r(x, \bar{l}_2) = 0,$$

где  $r(x, \bar{l}_i) = (x, l) + d_i$ ;  $\bar{l}_i = [d_i, l]$ ,  $l, x \in R^n$ ,  $d_i \in R$ ,  $\|l\| = 1$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

Решение задачи идентификации заключается в построении определенного решающего правила (РП), которое позволит отнести любую точку  $y$  из пространства  $R^n$  к тому или иному множеству. Будем искать РП вида

$$\left\{ \begin{array}{l} r(y, \bar{l}_1) < 0 \Rightarrow y \in A, \\ \left\{ \begin{array}{l} r(x, \bar{l}_1) > 0 \\ r(x, \bar{l}_2) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow y \in B, \\ r(y, \bar{l}_2) > 0 \Rightarrow y \in C. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Заметим, что РП вида (1.1) однозначно определяется набором параметров  $(d_1, d_2, l)$  [2].

Для того чтобы оценить, насколько точно РП (1.1) идентифицирует точки пространства, введем два функционала

$$F_1(d_1, d_2, l) = \sum_{i \in I} \max\{0, r(a_i, \bar{l}_1)\} + \sum_{j \in J} \max\{0, r(b_j, \bar{l}_2), -r(b_j, \bar{l}_1)\} + \sum_{k \in K} \max\{0, r(c_k, \bar{l}_2)\}. \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a\_v\_zubov@mail.ru.

<sup>2</sup>Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a\_v\_zubov@mail.ru

<sup>3</sup>Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a\_v\_zubov@mail.ru

$$F_2(d_1, d_2, l) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} (\max\{0, r(a_i, \bar{l}_i)\})^2 + \sum_{j \in J} (\max\{0, r(b_j, \bar{l}_2), -r(b_j, \bar{l}_1)\})^2 + \sum_{k \in K} (\max\{0, r(c_k, \bar{l}_2)\})^2. \quad (1.3)$$

Оба функционала,  $F_1$  и  $F_2$  являются выпуклыми. Более того, функционал  $F_2$  является гладким [3].

Функционал (1.2), как и функционал (1.3), условно говоря, является величиной ошибки в случае некорректной идентификации, а именно,  $F_1(d_1, d_2, l)$  есть сумма расстояний от неверно идентифицированных точек до соответствующих гиперплоскостей, а  $F_2(d_1, d_2, l)$  половина суммы квадратов этих расстояний. Поэтому можно считать РП (1.1) тем лучше, чем меньше значение функционала  $F_1$ , либо  $F_2$ , для заданного набора параметров [1].

Предлагаемый подход легко расширить на случай когда решающее правило определяется набором нескольких пар параллельных гиперплоскостей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
2. Зубова О.А. Применение квазидифференциального исчисления к решению задач идентификации. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2005. 18 с.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

## Building definite decisive rule

© V.I. Zubov <sup>4</sup>, O.A. Zubova <sup>5</sup>, A.I. Ivanov <sup>6</sup>

**Abstract.** In giving article is solving the task of separating three giving multitudes by help two parallel giperflats. Is looking the task of identification, that is concludes in building definite decisive rule allowing take to any point from space to that or other multitude. Is building the methods of evaluation exact identification the points of space with help introduction two function, one from that is appear smooth. Proposed method easy is extend on case, when decisive rool is define admission several pairs parallel flatnesses.

**Key Words:** solution, summa of distances, multitude, parallel superflatness, function, functional.

---

<sup>4</sup>Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a\_v\_zubov@mail.ru

<sup>5</sup>Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a\_v\_zubov@mail.ru

<sup>6</sup>Associate of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a\_v\_zubov@mail.ru

## ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 517.9

## Управление данными в корпоративных информационных системах

© С. Н. Лизин<sup>1</sup>, С. А. Федосин<sup>2</sup>

**Аннотация.** Производители СУБД и корпоративных платформ активно соревнуются в разработке новых функциональных возможностей своих продуктов. Однако многие проблемы, такие как совместная обработка данных или управление их жизненным циклом, могут быть решены проще и эффективнее посредством технологий управления данными.

**Ключевые слова:** базы данных, данные, темпоральные, транзакционные, СУБД, информационные системы.

## 1. Проблема отслеживания изменений

Увеличение объема информации и развитие информационных систем – два взаимосвязанных процесса: рост объемов данных требует развития средств их обработки, совершенствование которых стимулирует обработку все больших массивов данных. Сегодня практически в каждой более-менее крупной организации деятельность строится вокруг корпоративной информационной системы (а зачастую и нескольких), большинство из которых построены на основе реляционных систем управления базами данных по трехзвенной архитектуре: клиентские приложения – серверы приложений – серверы баз данных. При разработке каждой такой системы приходится решать ряд проблем, связанных с управлением данными.

Одной из наиболее сложных сегодня остается задача управления конкурентным доступом к данным. Обычно под решением данной задачи подразумевают защиту от проблем «грязного» чтения (dirty read), неповторяющегося чтения (non-repeatable read) и потерянного обновления (lost update). Для решения проблемы «грязного» чтения, заключающейся в чтении данных, записанных отмененной операцией, вполне может быть достаточно средств сервера баз данных, реализующих стандартные транзакции. Решение же проблемы неповторяющегося чтения (состоящей в отличии результатов первичного и последующего чтения данных одним клиентом, не изменявшим их), а также проблемы потерянного обновления (возникающей при одновременном изменении различными клиентами одного и того же значения элемента, при котором более раннее изменение теряется) средствами транзакций на уровне только сервера баз данных и/или сервера приложений эффективно лишь в отношении серверных задач обработки данных, которые выполняются на сервере приложений или сервере баз данных в фоновом режиме по заранее заданному алгоритму и без активного участия пользователя.

Однако защиту от аналогичных проблем требуется обеспечивать и при ручной обработке данных пользователями с использованием их клиентских приложений. Основное отличие здесь заключается в том, что каждый пользователь работает не напрямую с данными содержащимися в СУБД, а с некоторой их локальной копией, загруженной в клиентское приложение. Зачастую это приводит к тому, что когда два пользователя сохраняют изменения в одном и том же элементе (причем их исправления

<sup>1</sup>Аспирант кафедры АСОИУ, МГУ им. Н. П. Огарева, г. Саранск; sergey.lizin@gmail.com.

<sup>2</sup>Заведующий кафедрой АСОИУ, МГУ им. Н. П. Огарева, г. Саранск; sergey.lizin@gmail.com.

могли касаться разных его свойств), более раннее изменение теряется, причем клиент, чье изменение потеряно, может некоторое время этого даже не видеть.

Считается, что защита от подобного рода проблем должна обеспечиваться логикой приложения за счет более активного использования транзакций. Но не все проблемы конкурентного доступа можно обойти программно за счет дополнительных проверок и транзакций. И ключевой фактор здесь – человек. Невозможно выделить программно последовательность чтений и записей пользователем данных, составляющих атомарную операцию. Следовательно, нельзя и откатить такую транзакцию при изменении данных чтения – система просто не в состоянии определить, какое количество последних действий пользователя образуют единое целое, да и какие из прочитанных им данных учел пользователь при принятии решения. Что же остается делать?

Как и во всех случаях, когда предотвратить проблему невозможно, все усилия должны быть сконцентрированы на ее отслеживании. Причем в корпоративных системах управление конкурентным доступом – далеко не единственное направление, где требуется решение задачи отслеживания изменений. Другой очень важной проблемой является сложность выявления данных, на основе которых сформированы другие, как правило, более обобщенные данные. В качестве характерного примера можно привести различного рода отчеты, формируемые на основании данных из системы и не сохраняющиеся в ней. Определить в последующем источники формирования каждого сводного показателя отчета можно лишь при условии неизменности исходных данных.

В качестве одного из решений здесь возможно введение административного запрета редактирования данных, по которым сформированы отчеты, однако, это далеко не всегда возможно, да и не слишком удобно. А с другой стороны, вполне обычным является процесс, когда после сдачи первичного отчета в последующем, при выявлении неточностей, эти неточности исправляются, а на основании исправленных данных формируется уточненный отчет (таков, к примеру, порядок в отношении налоговой отчетности).

В общем виде целью отслеживания изменений является возможность выяснения данных, существовавших в системе (локальной копии данных) на момент принятия пользователем решения об изменении данных, формирования отчета и т.п. Кроме того, зачастую также требуется наличие информации об авторстве изменений и исправлений. Причем сведения нужны относительно всех модификаций, а не только последних, так как ошибки в данных (умышленные или неумышленные) могли быть внесены ранее, а другие пользователи в последующем основывались на них.

Особенно актуальной данная задача выглядит в свете повсеместного перехода от бумажных информационных ресурсов к электронным, в которых требуется обеспечение придания юридической значимости данным (посредством ЭЦП). Отдельно следует отметить, что речь здесь идет не о придании юридической значимости отдельным документам, передаваемым между организациями, а о формировании полностью юридически значимого массива данных, любая выборка из которого также имеет официальный статус. Естественно, что при этом должна обеспечиваться персональная ответственность лиц, формирующих данный информационный массив. Особенно это важно для государственных систем, где каждый служащий имеет свои полномочия и несет соответствующую ответственность.

Также задача отслеживания модификаций данных крайне важна для обеспечения их синхронизации при совместной обработке данных в нескольких информационных системах. Если системы работают последовательно (то есть данные из первой служат сырьем для второй) то все относительно просто. Сложнее дело обстоит с организацией параллельной обработки данных, например, при управлении мастер-данными. Здесь широко применяется централизованная модель, при которой все мастер-данные хранятся

в выделенной системе, однако, это не всегда удобно и возможно, особенно при взаимодействии информационных систем различных организаций. Кроме того, данная модель не основана на технологии управления данными, а представляет собой лишь архитектурное решение.

Если вернуться к государственным информационным системам, то организация параллельной обработки данных в электронных информационных ресурсах, каждый из которых содержит юридически значимую информацию, является одним из основных инфраструктурных элементов к построению электронного правительства.

## 2. Транзакционные и нетранзакционные

Для решения задачи отслеживания всех производимых модификаций разумно использовать технологии темпоральных баз данных. Но на сегодняшний день полноценные промышленные реализации темпоральных баз данных, по сути, отсутствуют. Что любопытно, они вполне могли появиться лет пять-десять назад, но в силу модных тенденций в сфере управления данными, сместивших акценты в сторону поддержки XML и решения задач интеграции, темпоральные технологии остались в стороне. Некоторые современные СУБД содержат специализированные механизмы, которые позволяют использовать фоновую версию значений атрибутов. Однако ее далеко не всегда удобно использовать. Но важнее другое – реляционная модель данных предоставляет весьма широкие средства, которые вполне могут быть использованы для решения перечисленных проблем. Может быть и не стоит ее искусственно расширять дополнительной временной размерностью?

Данные, обрабатываемые в каждой информационной системе можно разделить на транзакционные и нетранзакционные. Транзакционные данные – это данные, каждая запись которых относится к фиксированному моменту времени и содержит сведения, фиксированные на данный момент времени, не изменяющиеся в последующем. Соответственно нетранзакционные данные – все остальные.

Транзакционные данные обычно представляют собой повторяющиеся примеры событий, явлений, происшествий одного и того же типа. Сюда относятся все заявки, счета, накладные – да вообще все документы (как сущности), так как все они фиксированы (так как это уже оформленные документы) и привязаны к некоторому моменту времени (времени их составления или регистрации). Нетранзакционные данные, которые часто называют справочными или базовыми, представляют собой списки однотипных объектов: сущностей, предметов и абстрактных категорий. Как правило, это разнообразного рода справочники и классификаторы, другими словами – мастер-данные или, как частный случай, нормативно-справочная информация.

Нетрудно заметить, что связь между этими двумя категориями, как правило, односторонняя: при описании транзакционных схем могут использоваться как транзакционные, так и нетранзакционные данные, а при описании же нетранзакционных данных, как правило, используются только нетранзакционные данные. Например, при составлении накладной используются несколько справочников (контрагентов, номенклатуры), а основанием для накладной может служить, например, счет.

С другой стороны, если не принимать во внимание конкретное информационное представление данных и процедуры их архивации и утилизации, то можно утверждать, что количество информационных объектов транзакционных данных постоянно увеличивается, так как регистрация каждого нового события вызывает появление новой записи. В то же время, количество информационных объектов нетранзакционных

данных относительно статично.

Значение каждой записи транзакционных данных, как правило, остается неизменным с момента ее фиксации. Исключения составляют случаи коррекции записи ввиду неточностей или ошибок, что, кстати, обычно, в информационной системе рассматривается как не совсем корректное действие – коррекция должна проводиться отдельной операцией. Нетранзакционные данные не привязаны к конкретному моменту времени, но могут быть определены в течение их жизненного цикла. Значения атрибутов каждого элемента таких данных в течение его жизненного цикла могут меняться.

Таким образом, проблема отслеживания модификаций актуальна по большей мере для нетранзакционных данных. Для транзакционных данных она имеет смысл лишь в части отслеживания исправлений.

Одной из основных причин появления проблем, связанных с представлением нетранзакционных данных, является то, что нетранзакционные данные часто воспринимаются как условно-постоянные и, как следствие, имеющие статичное представление в базах данных. Для записи данных в SQL используются операторы вставки (*insert*), изменения (*update*) и удаления (*delete*). Как правило, данные операторы используются весьма прямолинейно: появился новый объект – вставили новую запись, изменились его характеристики – обновили их, исчез объект – удалили запись. Справедливости ради следует отметить, что для повышения ссылочной целостности вместо операции удаления в настоящее время все больше используется обновление дополнительного атрибута (статуса) записи.

Однако, операция обновления также не безобидна. Поступление информации о прекращении существования объекта – это новая информация, однако результатом поступления информации не должно быть общее сокращение информации в базе данных, наоборот, должно происходить ее увеличение. Аналогично поступление информации об изменении характеристик одного из объектов является поступлением новой информации, и общий объем информации в базе данных также должен увеличиваться. То же самое можно сказать и про исправления. Другими словами, информационные элементы должны хранить информацию о жизненном цикле реальных объектов, а не повторять его.

Используя термины SQL, можно говорить, что использования для отражения прекращения существования объектов и изменения их характеристик недопустимо использование операторов *delete* и *update*. Данные операторы являются служебными и должны использоваться исключительно в служебных целях: для перемещения, архивации и утилизации массивов данных. Таким образом, можно сделать вывод, что все данные, циркулирующие в базе данных должны быть транзакционными; нетранзакционные данные должны быть представлены в виде цепочки транзакционных данных.

### 3. Темпоральность в реляционной СУБД

Транзакционные данные, как правило, ассоциированы только с одним значением времени. Для обеспечения же управления конкурентным доступом и реализации отдельного отражения операций исправления, требуется использование битемпоральной модели, включающей действительное и транзакционное время. Действительное время – это время, указывающее на время актуальности существования и значений атрибутов реальных объектов. Транзакционное время – время внесения новых сведений об объекте в информационную систему.

Двойная темпоральность позволяет не просто более точно описать модель системы, но и определить операцию исправления. Для этого в дополнение к существующей записи

с неправильным значением вносится корректирующая запись с тем же действительным временем, текущим транзакционным временем и исправленными значениями.

Кроме расширения возможностей представления данных в информационной системе, использование битемпоральной модели позволяет обеспечить управление конкурентным доступом в части защиты от проблем неповторяющегося чтения. Это достигается за счет того, что в рамках одной операции (транзакции) при обработке данных используется ограничение на выборку данных: используются только записи, внесенные в информационную систему до начала транзакции.

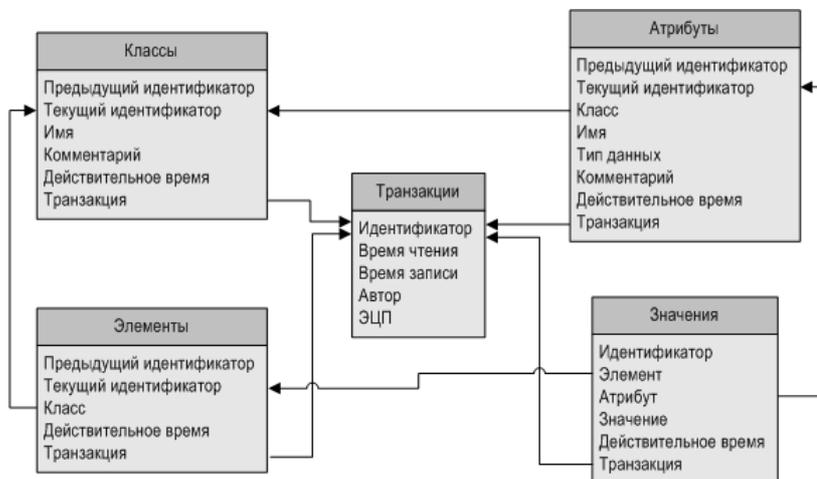
Двойная темпоральность данных в сочетании с управлением данными в режиме «только вставка», позволяют обеспечивать хранение вместе с данными сведения о пользователе, внесшем изменения, а также его электронную цифровую подпись, рассчитанную на основании внесенных данных. Это позволяет организовать юридически значимое хранилище данных с разделением персональной ответственности за их содержание. Кроме того, данная технология позволяет обеспечить возможность отслеживания данных, которые были в системе до внесения пользователем изменений. Аналогичным же образом можно отследить первичные данные, находившиеся в системе при формировании вторичных данных, при условии сохранения с вторичными данными штампа времени, по состоянию на которое они сформированы.

При этом следует отметить, что в трехзвенной архитектуре здесь возможны конфликтные ситуации, связанные с тем, что между временем чтения данных и моментом внесения изменений другим пользователем в данные могут быть внесены изменения. Для того чтобы защититься от этого, имеет смысл использовать два транзакционных времени: основное транзакционное время – транзакционное время внесения изменений; и транзакционное время чтения данных – для отслеживания основного транзакционного времени данных, на основании каких данных производилась их обработка.

Однако в данной модели в чистом виде невозможно отобразить исчезновение (удаление) объекта. Однако, кроме операций появления, исчезновения элементов и изменения их атрибутов, с ними могут происходить также такие события как объединение, присоединение, разделение, выделение, реорганизация. Для их реализации необходимо использовать дополнительную таблицу, причем отражение должно осуществляться не точкой, как обычно, а переходом (вектор), с указанием предшествующего идентификатора (null при появлении элемента) и нового идентификатора (null при исчезновении элемента). Используя данный подход несколькими взаимосвязанными записями можно отразить в базе данных любую из перечисленных выше операций. Немаловажной проблемой является обеспечение мягкой модернизации информационных систем вместе с соответствующими взаимосвязями между ними. В первую очередь сложность составляет необходимость модернизации метаданных и обеспечение работы с данными прошлых периодов в соответствующей схеме данных. Немаловажное значение имеет также сохранение связанности систем при изменении структур данных без дополнительной разработки, а лишь за счет соответствующей перенастройки связей. По сути, кроме жизненного цикла элемента данных и жизненного цикла его атрибутов, имеет смысл рассматривать еще два жизненных цикла метаданных: жизненный цикл классов (таблиц) и жизненный цикл атрибутов классов (столбцов таблиц). Для их описания требуются дополнительные таблицы, в которых также как и для отражения операций с элементами используются переходы.

На рисунке 3.1 изображена структура для представления данных по описанной технологии. Для связи записей и экономии места выделена дополнительная таблица транзакций, в которой хранятся транзакционное время чтения, транзакционное время записи, сведения об авторе и его электронная цифровая подпись. Это дополнительно

позволяет осуществлять ручной откат транзакций, а также в некоторой степени сократить место, требуемое для хранения информации о пользователях и ЭЦП. Все таблицы элементов объединены в единую таблицу, которая имеет поле, указывающее на класс элемента. Так же объединены и все таблицы значений в одну, которая имеет поля ссылки на таблицу элементов и таблицу атрибутов.



Р и с у н о к 3.1

#### 4. Заключение

К преимуществам данной модели можно отнести значительное повышение ссылочной целостности, отдельное отражение операций изменения и исправления данных, возможность организации частичной защиты от проблем конкурентного доступа к данным, решение проблемы отслеживания источников вторичных данных, обеспечение отслеживания авторства и возможность формирования юридически значимого массива данных.

Темпоральная организация данных позволяет значительно упростить их совместное редактирование в нескольких информационных системах, а темпоральная организация метаданных – предоставить возможность мягкой модернизации структур данных и обеспечение работы с данными прошлых периодов в соответствующей схеме данных.

Описанный подход может быть применим при построении систем самого различного назначения. В первую очередь систем (подсистем) управления мастер-данными или нормативно-справочной информацией. В качестве частного примера, использование описанной технологии может решить множество проблем при построении одного из основных компонентов электронного правительства – системы реестров государственных услуг.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Snodgrass, Richard T. Developing Time-Oriented Database Applications in SQL. San Francisco, California : Morgan Kaufmann Publishers, 2000.
2. Jensen, Christian S. и Snodgrass, Richard Thomas. Semantics of Time-Varying Attributes and their Use for Temporal Database Design. Lecture Notes In Computer Science. 1995 г., T. Vol. 1021.

3. Date, C. J., Darwen, Hugh и Lorentzos, Nikos A. Temporal Data and the Relational Model. San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 2003.

## Data management in enterprise information systems

© S. N. Lizin<sup>3</sup>, S. A. Fedosin<sup>4</sup>

**Abstract.** DBMS and enterprise frameworks vendors compete for developing new functionalities of their products. But many problems, such as collaborate data processing or data lifecycle management, can be solved more simply and more effective using data management technologies.

**Key Words:** databases, data, temporal, transactional, DBMS, informational systems.

---

<sup>3</sup>Post graduate student of chair of ASIP&M, MSU after N. P. Ogarev, Saransk; sergey.lizin@gmail.com.

<sup>4</sup>Professor, Head of chair of ASIP&M, MSU after N. P. Ogarev, Saransk; sergey.lizin@gmail.com.

## ПАМЯТИ НИКОЛАЯ ВЛАДИМИРОВИЧА ЗУБОВА

**Николай Владимирович Зубов**

27 октября 2010 года ушёл из жизни доктор физико-математических наук профессор кафедры теории управления факультета прикладной математики - процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Н. В. Зубов родился 6 февраля 1954 года в г. Ленинграде. В 1971 г. Н. В. Зубов после окончания математической школы № 30 поступил на факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, где проходил обучение по специальности «Прикладная математика». С 1976 г. Н. В. Зубов работал в системе АН СССР - РАН с перерывом на срок обучения в аспирантуре и работе в аппарате Минвуза РСФСР. За более чем 20 - летнюю добросовестную работу в системе Академии наук, работу в течение ряда лет в Госкомитете по Ленинским и Государственным премиям СССР и научные успехи имеет благодарность от президента РАН. С декабря 2000 г. он работал в Санкт-Петербургском государственном университете в должности профессора кафедры теории управления факультета прикладной математики - процессов управления.

В 1980 г. Н. В. Зубовым была успешно защищена кандидатская диссертация «Исследование феноменологических уравнений нейродинамики». В 1998 г. в Вычислительном центре РАН им была подготовлена докторская диссертация «Математические методы и модели исследования динамических систем», а в 1999 г. успешно защищена.

На протяжении ряда лет Н. В. Зубов активно участвовал в федеральной целевой программе «Интеграция» развития УНЦ «Теплофизика газодинамических систем».

Н. В. Зубов - автор более 90 печатных работ, опубликованных как у нас в стране, так и за рубежом, среди которых 4 монографии («Методы исследования

систем с последствием», «Математические методы стабилизации динамических систем», «Лекции по теории стабилизации динамических систем» и «Исследование феноменологических уравнений в нейродинамике»), 8 учебных пособий и 8 методических указаний. Он также принимал участие в работе более 20 международных и всесоюзных научных конференций, симпозиумов и съездов.

В науке Н. В. Зубов использовал и развивал математические методы, разработанные в нашей стране такими выдающимися математиками, как А. М. Ляпунов, Н. Г. Четаев, Н. П. Еругин, Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, Н. Н. Боголюбов, В. И. Зубов, В. Л. Харитонов и многие другие.

Наиболее крупные научные результаты, полученные Н. В. Зубовым: создание новых методов комплексного исследования динамики функционирования сложных управляемых систем с различного рода особенностями - последствие, неприводимость к нормальному виду, краевые условия неудерживающего типа и типа непрерывности; разработка метода простых волн для решения широкого класса задач теплофизики и газодинамики. Эти методы заключались не только в сведении этих задач к системам линейных алгебраических неравенств, но и в качественном исследовании поведения динамических систем.

Научная жизнь Н. В. Зубова тесно переплетается с научными направлениями кафедры прикладной математики Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва. Николай Владимирович был постоянным участником научных конференций по дифференциальным уравнениям и их приложениям, проводимых университетом. Исследования Н. В. Зубова способствовали развитию математической жизни, становлению аспирантов и молодых ученых кафедры прикладной математики. Для них Николай Владимирович выступал в качестве научного консультанта и доброго товарища.

Можно уверенно сказать, что всю свою жизнь Николай Владимирович посвятил служению отечественной математической науке и образованию.

Таким сохранит наша память светлый образ Николая Владимировича Зубова.

*В. Ф. Тишкин, Л. А. Сузгарев, П. А. Шаманаев, М. Т. Терехин,*

*С. М. Мурюмин, И. В. Бойков, В. К. Горбунов, В. З. Гринес,*

*П. А. Вельмисов, А. Ф. Зубова, С. И. Спивак, В. А. Треногин,*

*Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, Т.Ф. Мамедова, В.И. Сафонкин,*

*А. Ю. Павлов, Д. И. Бояркин, Р. В. Жалнин.*

# Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе Т<sub>E</sub>X (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Внимание! Новые правила.** Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды  $\backslash\mathbf{R}$ ,  $\backslash\mathbf{Rn}$ ,  $\backslash\mathbf{C}$ ,  $\backslash\mathbf{Z}$ ,  $\backslash\mathbf{N}$  и т.д.

Для вставок букв  $\varphi$  и  $\varepsilon$  необходимо использовать команды  $\backslash\mathbf{phi}$ ,  $\backslash\mathbf{epsilon}$  соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами  $\backslash\mathbf{px}\{i\}$  и  $\backslash\mathbf{pxtog}\{u\}\{i\}$ .

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды  $\backslash\mathbf{textrm}$ ,  $\backslash\mathbf{textit}$ . Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $D_i$  в текст статьи, необходимо набрать команды  $\backslash\mathbf{textrm}\{\Gamma\}_i$ ,  $\backslash\mathbf{textit}\{D\}_i$ .

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды  $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{метка}\}$  и  $\backslash\mathbf{eqref}\{\mathit{метка}\}$ , где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить  $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{ivanov14}\}$ , теорему 5 из этой статьи —  $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{ivanovt5}\}$  и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду  $\backslash\mathbf{ref}\{\mathit{метка}\}$ ).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами  
а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathbf{insertpicture}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя\_файла.eps}\}\{\mathit{степень\_сжатия}\}$

где  $\mathit{степень\_сжатия}$  число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

$\backslash\mathbf{insertpicturewcap}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя\_файла.eps}\}\{\mathit{подпись\_под\_рисунком}\}$

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathbf{insertpicturecapscale}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя\_файла.eps}\}\{\mathit{степень\_сжатия}\}$   
 $\{\mathit{подпись\_под\_рисунком}\}$

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

$\backslash\mathbf{insertpicturenonum}\{\mathit{имя\_файла.eps}\}\{\mathit{степень\_сжатия}\}$   
 $\{\mathit{подпись\_под\_рисунком}\}$

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Внимание! Новые правила.** Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**.

Для оформления списка литературы на английском языке следует использовать окружение **thebibliographyEn**.

Сам список оформляется в виде последовательности команд  $\backslash\mathbf{bibitem}$ , имеющих один параметр:

$\backslash\mathbf{bibitem}\{\mathit{метка\ для\ ссылки\ на\ источник}\}$

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду  $\backslash\mathbf{cite}$  или  $\backslash\mathbf{pgcite}$  (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.2, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

## Алфавитный указатель

|                   |            |                      |               |
|-------------------|------------|----------------------|---------------|
| Абрамов В. В.     | 49         | Лутошкин И.В.        | 110           |
| Авербух Е. Л.     | 55         | Ляпина А. А.         | 152           |
| Андреев А. С.     | 64         | Малинов В. Г.        | 37            |
| Атряхин В. А.     | 234        | Мальханов Ю. Б.      | 146           |
| Балаев А. В.      | 74, 199    | Мамедова Т. Ф.       | 152, 167      |
| Басыров И. Ф.     | 74         | Масленников Д. А.    | 130           |
| Вельмисов П. А.   | 29, 79, 85 | Мингалеев В. З.      | 104           |
| Видилина О. В.    | 94         | Монаков Ю. Б.        | 104           |
| Гиззатова Э. Р.   | 104        | Мусафиров Э. В.      | 158           |
| Горбунов В.К.     | 10         | Напалкова Ю. В.      | 167           |
| Дергунов И.Е.     | 110        | Нуриахметов И. А.    | 199           |
| Джафаров А. Н.    | 120        | Овсянникова Н. И.    | 171           |
| Дикусар В. В.     | 246, 255   | Покладова Ю. В.      | 85            |
| Дутов С. А.       | 250, 255   | Прокофьева М. В.     | 130           |
| Ерёмкин И. Н.     | 146        | Рахимов Д. Г.        | 180           |
| Жалнин Р. В.      | 126        | Романов А. Е.        | 221           |
| Зубов В. И.       | 260        | Сафина Г. Ф.         | 187           |
| Зубов Н. В.       | 246, 255   | Серебрянникова Е. С. | 85            |
| Зубов С. В.       | 246        | Спивак С. И.         | 104, 199, 199 |
| Зубова О. А.      | 250, 260   | Тимошин М. И.        | 211           |
| Иванов А. И.      | 250, 260   | Трегубов Н. В.       | 134           |
| Исмагилова А. С.  | 203        | Тында А. Н.          | 221           |
| Исмаилов Р. Р.    | 227        | Усманов С. М.        | 227           |
| Казакова Ю. А.    | 29         | Файрузов М.Э.        | 21            |
| Катаева Л. Ю.     | 130        | Фаттахов М. Н.       | 227           |
| Кризский В. Н.    | 134        | Федосин С. А.        | 263           |
| Крупенников А. В. | 79         | Шакирьянов Э . Д.    | 227           |
| Куркин А. А.      | 55         | Шаманаев П. А.       | 234           |
| Ледовских А.Г.    | 10         | Шангареев Р. Р.      | 239           |
| Лизин С. Н.       | 263        | Яматов Р. Р.         | 134           |
| Лубышев Ф.В.      | 21         |                      |               |

Для заметок