

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 12, № 1



2010

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 12, № 1

Издается с декабря 1998 года
Выходит два раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

СВМО
САРАНСК

2010

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 12, № 1

Компьютерная верстка: Жалнин Р. В.

Корректоры: Атряхин В. А., Егорова Д. К., Напалкова Ю. В.

Издаётся в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 29-07-32

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

Содержание

Редакционная страница	6
-----------------------------	---

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов

Критерий определения порядка галеркинского приближения решения начально-краевых задач	7
1. Введение	7
2. Постановка задачи	8
3. Исследование устойчивости по Ляпунову точного решения	9
4. Исследование условной устойчивости и условной неустойчивости точного решения	10
5. Обобщенный метод Галеркина	13
6. Устойчивость решения в n -ом приближении	15
7. Сравнение приближенных решений	16
8. Исследование функционала в предельном случае	16
9. Оценка остаточного члена и выбор начального порядка приближения	18
10. Пример	20
11. Заключение	22

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев

О топологически несопряженных диффеоморфизмах Морса-Смейла с тривиальными пучками сепаратрис	24
1. Введение	24
2. Вспомогательные определения и формулировка результата	25
3. Доказательство теоремы 2.1.	26
3.1. Реализация шагов 1)-3)	27

И. П. Рязанцева

Итеративный метод регуляризации первого порядка для обобщенных вариационных неравенств	33
--	----

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

С. Н. Алексеенко, С. Н. Нагорных

Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций	41
--	----

Т. Е. Бадокина, О. В. Макеева, Д. Э. Рахматуллова

Построение функции Грина для модельных граничных задач со смещением	46
1. Введение	46
2. Одномерная задача Бицадзе-Самарского	46
3. Модельные задачи с двумя смещениями	47

М. В. Булатов, Н. П. Рахвалов, Ta Duy Phuong	
Численное решение краевой задачи для линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка	52
1. Введение	52
2. Постановка задачи	52
3. Численные эксперименты	55
Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, Л. А. Куприна	
Динамика диффеоморфизмов класса SV , сосредоточенная в базовых полноториях	59
Ю. С. Лаврентьева, И. М. Губайдуллин, Р. Н. Кадикова, И. Р. Рамазанов	
Численный анализ реакционной способности олефиновых и ацетиленовых соединений в реакции циклоалюминирования	67
И. С. Потапова	
Полная управляемость линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами	74
1. Введение	74
2. Постановка задачи	74
3. Необходимые и достаточные условия полной управляемости	75
4. Приведение матрицы с переменными коэффициентами к диагональному виду	75
5. Вычисление векторов h_s , k_s удовлетворяющих соотношениям (4.4), (4.5)	76
Г. А. Смолкин	
Об одном способе продолжения функций в пространствах С. Л. Соболева-Л. Н. Слободецкого	79
А. А. Ферцев	
Об одном методе сегментации растровых изображений с помощью нейронных сетей встречного распространения	86
1. Введение	86
2. Сегментация изображений	86
3. Нейронная сеть встречного распространения	87
В. Г. Шарапов	
Естественные расширения одного класса квазиэндоморфизмов пространства Лебега	92
1. Введение	92
2. Постановка задачи	92
3. Приведение квазиэндоморфизмов данного класса к инвариантной мере	92
4. Построение естественных расширений	94

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Anca-Veronica Ion, Raluca-Mihaela Georgescu

Erratum to: Stability of equilibrium and periodic solutions of a delay
equation modeling leukemia 97

Правила оформления рукописей для публикации
в журнале «Журнал СВМО» 99

Алфавитный указатель 101

ОТ РЕДАКЦИИ

Начиная с 2010 года журнал будет выходить четыре раза в год: за год выходит один том в четырех номерах. Первые два номера 12-го тома журнала содержат материалы IX конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых, рекомендованные редакцией к публикации. Конференция поддержана РФФИ – грант №10-01-06048-г.

Редакция журнала желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 517.9

Критерий определения порядка галеркинского приближения решения начально-краевых задач

© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов²

Аннотация. На основании анализа функционалов типа Ляпунова, построенных для дифференциального уравнения в частных производных, описывающего свободные колебания упругой пластины, доказана абсолютная и равномерная сходимость приближенных решений этого уравнения, полученных обобщенным методом Галеркина, к их точному решению. Получен критерий определения порядка приближенного решения для отыскания решения с заданной точностью. Разработанный критерий может быть использован при построении решений широкого класса других линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: динамическая устойчивость; условная устойчивость; функционал; дифференциальное уравнение в частных производных.

1. Введение

Работа посвящена выводу критерия определения точности галеркинского приближения решения начально-краевых задач для дифференциального уравнения в частных производных, основанного на анализе разложений в ряд функций, задающих начальные условия. Вывод основан на исследовании функционалов типа Ляпунова. В качестве примера в работе исследуется задача о свободных колебаниях упругой пластины. Проведено исследование динамики и устойчивости этих колебаний.

Используются определение устойчивости упругого тела и соответствующее ему определение устойчивости решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения. Первое соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову и может быть сформулировано так: при каких значениях параметров, характеризующих упругую пластину (основными параметрами являются прочностные и инерционные характеристики пластины, действующие в связи с конструктивными особенностями заданные усилия и т.д.), малым отклонениям пластины от положения равновесия в начальный момент времени $t = 0$ будут соответствовать малые отклонения и в любой момент времени $t > 0$. Второе определение соответствует условной устойчивости решения начально-краевой задачи: при каких начальных условиях в момент времени $t = 0$ и значениях параметров, входящих в дифференциальное уравнение, будет получено ограниченное решение в любой момент времени $t > 0$. Используется так же определение условной неустойчивости решения начально-краевой задачи: при каких начальных условиях в момент времени $t = 0$ и значениях параметров, входящих в дифференциальное уравнение, решение при $t \rightarrow \infty$ будет неограниченным.

На основе построения функционалов [1], соответствующих дифференциальному уравнению в частных производных, описывающему поперечные колебания пластины-полосы, получены достаточные условия устойчивости по Ляпунову, условной устойчивости и условной неустойчивости решений этого уравнения. Условная неустойчивость решений

¹Доцент кафедры "Высшая математика", Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

²Профессор, зав. кафедрой "Высшая математика", Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

модельного дифференциального уравнения играет важную роль при исследовании динамики, так как отыскание неограниченного решения не имеет смысла в связи с решением конкретной механической задачи.

Одним из методов получения достаточных и необходимых условий устойчивости по Ляпунову является анализ полученного численно решения дифференциального уравнения. В данном методе необходимо учитывать, что вместо области устойчивости по Ляпунову (изменения параметров механической системы), будет получена область условной устойчивости (изменения коэффициентов дифференциального уравнения в зависимости от начальных условий). При этом механическая область (устойчивости по Ляпунову) будет «не шире», чем математическая область (условной устойчивости). Поэтому только правильный выбор начальных условий, обсуждаемый в работе, позволит привести к согласованию этих областей. Следует отметить, что условия неустойчивости по Ляпунову для данного класса механических задач не могут быть получены на основании исследования функционалов типа Ляпунова (можно воспользоваться, например, частотным методом, который, однако, применим только к линейным дифференциальным уравнениям, в отличие от метода Ляпунова).

Исследование динамики упругой пластины основано на применении метода Галеркина. Как известно [2], построенная этим методом последовательность приближенных решений (отрезков ряда Фурье) сходится к обобщенному решению (сходимость в среднем, т.е. в интегральном смысле). При этом до сих пор остается неразрешенными два вопроса. Первый - является ли обобщенное решение точным и второй - каков должен быть порядок приближенного решения (длина отрезка ряда Фурье), чтобы это точное решение было найдено с заданной точностью. В данной работе с помощью функционалов типа Ляпунова, на примере исследования простейшего уравнения, доказана абсолютная и равномерная сходимость приближенных решений к точному, а также получен критерий определения порядка приближенного решения (в зависимости от параметров механической системы), гарантированно описывающего точное решение с любой заданной точностью в любой точке x в любой момент времени t . Выбор между методом Галеркина и разностным методом был сделан в пользу первого по двум причинам: первая – решение дифференциального уравнения четвертого порядка, рассматриваемого в данной работе, приводит к достаточно сложной разностной схеме и к большим затратам машинного времени (а построение областей устойчивости становится практически невозможным); вторая – возможность отыскания решения уравнения на любом временном отрезке, в том числе неограниченном.

В соответствии с вышесказанным поставлена цель данной работы – на примере простейшей механической задачи провести согласование математических и физических процессов. Для этого используются метод Ляпунова для исследования устойчивости и метод Галеркина для исследования динамики. Для последнего решается задача оценки точности полученного приближенного решения, в зависимости от его порядка.

2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания упругой пластины длины l :

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw'''(x, t) + Nw''(x, t) + \beta w(x, t) = 0, \quad x \in (0, l). \quad (2.1)$$

Здесь x – координата (пластина занимает на оси Ox отрезок $[0, l]$); t – время ($t \geq 0$); штрих обозначает производную по x , а точка – производную по t ; D – изгибная жесткость; M – погонная масса пластины; N – сжимающая (растягивающая) пластину

сила; β – коэффициент жесткости основания. Неизвестной является функция $w(x, t)$ – прогиб упругой пластины.

Начальные условия:

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x). \quad (2.2)$$

Предполагая, что концы пластины закреплены шарнирно, граничные условия для $w(x, t)$ запишем в виде

$$w(0, t) = w''(0, t) = w(l, t) = w''(l, t) = 0. \quad (2.3)$$

Таким образом, получили начально-краевую задачу (2.1) - (2.3) для определения ис-комой функции $w(x, t)$.

Опишем на примере поставленной задачи (2.1)-(2.3) несколько возможностей исполь-зования функционалов типа Ляпунова.

3. Исследование устойчивости по Ляпунову точного решения

Получим достаточные условия устойчивости тривиального решения дифференциаль-ного уравнения (2.1) по отношению к возмущениям начальных условий.

Введем функционал

$$J(t) = \int_0^l \{M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta w^2\} dx. \quad (3.1)$$

Найдем производную от $J(t)$ по t .

$$\dot{J}(t) = 2 \int_0^l \{M\dot{w}\ddot{w} + Dw''\dot{w}'' - Nw'\dot{w}' + \beta w\dot{w}\} dx. \quad (3.2)$$

Для функции $w(x, t)$, являющейся решением уравнения (2.1), равенство (3.2) примет вид:

$$\dot{J}(t) = 2 \int_0^l \{-\dot{w}(Dw''' + Nw'' + \beta w) + Dw''\dot{w}'' - Nw'\dot{w}' + \beta w\dot{w}\} dx. \quad (3.3)$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (2.3), получим

$$\int_0^l \dot{w}w''' dx = \int_0^l \dot{w}''w'' dx, \quad \int_0^l \dot{w}w'' dx = - \int_0^l \dot{w}'w' dx.$$

С учетом этих выражений, равенство (3.2) примет вид

$$\dot{J}(t) = 0 \Rightarrow J(t) = J(0). \quad (3.4)$$

Согласно (3.1), (3.4) имеем равенство

$$\int_0^l \{M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta w^2\} dx = \int_0^l \{M\dot{w}_0^2 + Dw_0''^2 - Nw_0'^2 + \beta w_0^2\} dx. \quad (3.5)$$

Здесь индекс 0 снизу означает, что значение берется при $t = 0$.

Согласно неравенству Рэлея [3], имеют место оценки

$$\int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad (3.6)$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi'''(x) = -\lambda\psi''(x)$, μ_1 – наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi'''(x) = \mu\psi(x)$ с краевыми условиями (2.3). Тогда, учитывая (3.6), из (3.5) получим

$$\int_0^l \{M\dot{w}^2 + (\lambda_1 D - N) w'^2 + \beta w^2\} dx \leq \int_0^l \left\{ M\dot{w}_0^2 + (D + \lambda_1^{-1}|N| + \mu_1^{-1}\beta) w''_0^2 \right\} dx. \quad (3.7)$$

Если выполняется условие

$$N < \lambda_1 D, \quad (3.8)$$

то из неравенства (3.7) следует устойчивость в среднем решения $w(x, t)$ уравнения (2.1) и частных производных $\dot{w}(x, t)$, $w'(x, t)$ по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x, 0)$, $w''(x, 0)$, если краевые условия имеют вид (2.3).

Используя интегральное неравенство Коши-Буняковского и условия (2.3), получим

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx. \quad (3.9)$$

Учитывая неравенства (3.7) - (3.9), окончательно будем иметь оценку

$$(\lambda_1 D - N) w^2(x, t) \leq l \int_0^l \left\{ M\dot{w}_0^2 + (D + \lambda_1^{-1}|N| + \mu_1^{-1}\beta) w''_0^2 \right\} dx,$$

из которой следует теорема.

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполнено условие (3.8), тогда решение $w(x, t)$ уравнения (2.1) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x, 0)$, $w''(x, 0)$, если краевые условия имеют вид (2.3).

4. Исследование условной устойчивости и условной неустойчивости точного решения

Получим достаточные условия условной устойчивости решения дифференциального уравнения (2.1). Пусть имеют место условия:

$$\int_0^l w(x, t) \cdot g_i^{(1)}(x) dx = 0, \quad i = 1 \div s, \quad \int_0^l w(x, t) \cdot g_i^{(2)}(x) dx = 0, \quad i = 1 \div k, \quad (4.1)$$

где $g_i^{(1)}(x)$, $g_i^{(2)}(x)$ - собственные функции краевых задач $\psi'''(x) = -\lambda\psi''(x)$, $\psi'''(x) = \mu\psi(x)$ с краевыми условиями (2.3). Тогда в отличие от оценок (3.6) справедливы неравенства [3]:

$$\int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \lambda_{s+1} \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \mu_{k+1} \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad (4.2)$$

где λ_{s+1} - $(s+1)$ -е собственное значение краевой задачи $\psi'''(x) = -\lambda\psi''(x)$, а μ_{k+1} - $(k+1)$ -е собственное значение краевой задачи $\psi'''(x) = \mu\psi(x)$ с краевыми условиями (2.3). Если же выполняются условия

$$\int_0^l w(x, t) \cdot g_1^{(1)}(x) dx \neq 0, \quad \int_0^l w(x, t) \cdot g_1^{(2)}(x) dx \neq 0, \quad (4.3)$$

то в оценках (4.2) необходимо положить $s = 0$, $k = 0$, т. е. получим (3.6).

С учетом (4.2) из (3.5) будем иметь

$$\int_0^l \{M\dot{w}^2 + (\lambda_{s+1}D - N)w'^2 + \beta w^2\} dx \leq \int_0^l \{M\dot{w}_0^2 + (D + \lambda_{s+1}^{-1}|N| + \mu_{k+1}^{-1}\beta)w_0''^2\} dx. \quad (4.4)$$

Если выполняется условие

$$N < \lambda_{s+1}D, \quad (4.5)$$

и начальные условия (2.2) таковы, что справедливы равенства (4.1), то из неравенства (4.4) следует условная устойчивость в среднем решения $w(x, t)$ уравнения (2.1) и частных производных $\dot{w}(x, t)$, $w'(x, t)$ по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x, 0)$, $w''(x, 0)$, если краевые условия имеют вид (2.3).

Учитывая неравенства (3.9), (4.4), (4.5), получим оценку

$$(\lambda_{s+1}D - N)w^2(x, t) \leq l \int_0^l \{M\dot{w}_0^2 + (D + \lambda_{s+1}^{-1}|N| + \mu_{k+1}^{-1}\beta)w_0''^2\} dx, \quad (4.6)$$

из которой следует теорема.

Т е о р е м а 4.1. Пусть выполнено условие (4.5) и начальные условия (2.2) таковы, что справедливы равенства (4.1). Тогда решение $w(x, t)$ уравнения (2.1) условно устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений \dot{w}_0 , w_0'' , если краевые условия имеют вид (2.3).

Получим достаточные условия условной неустойчивости решения дифференциального уравнения (2.1).

Введем функционал:

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^l Mw^2 dx. \quad (4.7)$$

Найдем производную от $I(t)$ по t .

$$\dot{I}(t) = \int_0^l Mw\dot{w}dx.$$

Найдем вторую производную от $I(t)$ по t .

$$\ddot{I}(t) = \int_0^l (M\dot{w}^2 + Mw\ddot{w}) dx. \quad (4.8)$$

Для функции $w(x, t)$, являющейся решением уравнения (2.1), равенство (4.8) примет вид:

$$\ddot{I}(t) = \int_0^l \{M\dot{w}^2 - w(Dw''' + Nw'' + \beta w)\} dx. \quad (4.9)$$

Интегрируя по частям с учетом (2.3), получим

$$\int_0^l ww'''dx = \int_0^l w''^2dx, \quad \int_0^l ww''dx = - \int_0^l w'^2dx.$$

Из (4.9) следует

$$\ddot{I}(t) = \int_0^l \{M\dot{w}^2 - Dw''^2 + Nw'^2 - \beta w^2\} dx. \quad (4.10)$$

Учитывая равенство (3.4):

$$\int_0^l \{-Dw''^2 + Nw'^2 - \beta w^2\} dx = \int_0^l M\dot{w}^2dx - J(0),$$

окончательно получим

$$\ddot{I}(t) = \int_0^l 2M\dot{w}^2dx - J(0).$$

Если $J(0) < 0$, т. е.

$$N \int_0^l w'^2(x, 0) dx > \int_0^l \{M\dot{w}^2(x, 0) + Dw''^2(x, 0) + \beta w^2(x, 0)\} dx, \quad (4.11)$$

то $\ddot{I}(t) > 0$ (график функции $I(t)$ вогнутый).

Так как $I(t) \geq 0$, $\ddot{I}(t) > 0$ (причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{I}(t) \neq 0$ в силу (4.11)), то для непрерывно дифференцируемой функции $I(t)$ справедливо утверждение: начиная с некоторого момента времени $t_0 \geq 0$, функция $I(t)$ начнет неограниченно возрастать. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^l Mw^2dx = \infty. \quad (4.12)$$

На основании (4.12) доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Если начальные условия (2.2) и параметры механической системы таковы, что справедливо условие (4.11), и краевые условия имеют вид (2.3), то решение $w(x, t)$ уравнения (2.1) условно неустойчиво.*

5. Обобщенный метод Галеркина

Решение уравнения (2.1) будем искать обобщенным методом Галеркина (метод Галеркина-Петрова [2]), подчинив исковую функцию $w(x, t)$ краевым условиям (2.3) и начальным условиям (2.2), которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

Согласно методу Галеркина приближенное решение уравнения (2.1) ищется в виде

$$w_{np(n)}(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)g_k(x), \quad (5.1)$$

где $g_k(x)$ - базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия, а функции $a_k(t)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения к системе поверочных функций $\{h_k(x)\}$. Индексом в скобках в (5.1) указывается длина отрезка ряда, и в дальнейшем это решение будем называть n -м приближением точного решения.

В качестве базисных возьмем функции

$$g_k(x) = A_k \cos \gamma_k x + B_k \sin \gamma_k x + C_k + D_k x, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k и параметр γ_k выберем так, чтобы на каждом из концов отрезка $[0, l]$ выполнялись условия:

$$g_k(x) = g''_k(x) = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3)$$

Тогда функция $w(x, t)$ в виде (5.1) будет удовлетворять условиям (2.3). Заметим, что γ_k и $g_k(x)$ - собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$g'''_k(x) = -\gamma_k^2 g''_k(x) \quad (5.4)$$

с граничными условиями (5.3). Задача (5.4), (5.3) - самосопряженная и полностью определенная, следовательно, система функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ ортогональна на $[0, l]$ в обобщенном смысле, т. е. справедливы равенства

$$\int_0^l g_k(x) g_m''(x) dx = 0, \quad \int_0^l g_k(x) g'''_m(x) dx = 0, \quad k \neq m \quad (5.5)$$

и из них

$$\begin{aligned} \int_0^l g'_k(x) g'_m(x) dx &= 0, & \int_0^l g''_k(x) g''_m(x) dx &= 0, & \int_0^l g''_k(x) g'''_m(x) dx &= 0, & k \neq m, \\ \int_0^l g''_m^2(x) dx &= \int_0^l g_m(x) g'''_m(x) dx = -\gamma_m^2 \int_0^l g_m(x) g''_m(x) dx = \gamma_m^2 \int_0^l g''_m^2(x) dx, & (5.6) \end{aligned}$$

$$\int_0^l g_m''(x)g_m'''(x)dx = -\gamma_m^2 \int_0^l g_m''^2(x)dx = -\gamma_m^4 \int_0^l g_m'^2(x)dx,$$

$$\int_0^l g_m(x)g_m''(x)dx = -\gamma_m^2 \int_0^l g_m'^2(x)dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

В этом случае, согласно теореме о разложении [3], любую функцию $U(x)$, четырехкратно непрерывно дифференцируемую в $(0, l)$ и удовлетворяющую соответствующим краевым условиям, можно разложить в ряд Фурье $U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x)$, абсолютно и равномерно сходящийся в $(0, l)$, где c_k – коэффициенты Фурье:

$$c_k = \left(\int_0^l g_k(x)g_k''(x)dx \right)^{-1} \cdot \int_0^l U(x)g_k''(x)dx.$$

В случае шарнирно закрепленных концов пластины

$$g_k(x) = \sin(\gamma_k x), \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и, поэтому, дополнительно выполняются равенства

$$\int_0^l g_k(x)g_m(x)dx = 0, \quad k \neq m, \quad \int_0^l g_m'^2(x)dx = \gamma_m^2 \int_0^l g_m^2(x)dx, \quad \int_0^l g_m^2(x)dx = \frac{\pi}{2}. \quad (5.7)$$

В силу равенств (5.5) - (5.7), возьмем в качестве поверочных функций $h_k(x) = g_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$.

Условия ортогональности невязки уравнения (2.1) к системе функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ с учетом (5.6), (5.7) позволяют записать систему уравнений для $a_m(t)$:

$$[D\gamma_m^4 a_m(t) - N\gamma_m^2 a_m(t) + Ma_m''(t) + \beta a_m(t)] \delta_m = 0, \quad (5.8)$$

где $\delta_m = \int_0^l g_m^2(x)dx$, $m = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что система (5.8) может быть получена методом разделения переменных.

Условия ортогональности невязки начальных условий (2.2) к системе функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ позволяют найти начальные значения $a_m(0)$:

$$a_m(0) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_1(x)g_m(x)dx, \quad a'_m(0) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_2(x)g_m(x)dx. \quad (5.9)$$

Таким образом, получили задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.8) с начальными условиями (5.9).

6. Устойчивость решения в n -ом приближении

Получим достаточные условия устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений (5.8) по отношению к возмущениям начальных условий. Запишем систему (5.8) в виде

$$A_m a''_m(t) + B_m a_m(t) = 0, \quad (6.1)$$

где

$$A_m = M\delta_m, \quad B_m = (D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta)\delta_m, \quad m = 1, \dots, n.$$

Получим достаточные условия устойчивости по Ляпунову для произвольного решения системы уравнений (6.1). Поскольку уравнения системы линейные, то достаточно исследовать устойчивость тривиального решения $\{a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)\} \equiv \{0, 0, \dots, 0\}$.

Введем функционал:

$$\Phi_n(t) = \sum_{m=1}^n \left(A_m a'^2_m(t) + B_m a_m^2(t) \right). \quad (6.2)$$

Найдем производную от Φ_n по t

$$\dot{\Phi}_n = 2 \sum_{m=1}^n (A_m a'_m(t) a''_m(t) + B_m a_m(t) a'_m(t)). \quad (6.3)$$

Для функций $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$, являющихся решением системы уравнений (6.1), равенство (6.3) примет вид

$$\dot{\Phi}_n(t) = 0 \Rightarrow \Phi_n(t) = \Phi_n(0). \quad (6.4)$$

Таким образом, получим равенство

$$\sum_{m=1}^n \left(A_m a'^2_m(t) + B_m a_m^2(t) \right) = \sum_{m=1}^n \left(A_m a'^2_m(0) + B_m a_m^2(0) \right).$$

из которого следует теорема.

Т е о р е м а 6.1. *Пусть выполнено условие*

$$D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta > 0, \quad (6.5)$$

тогда решение $\{a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)\}$ системы уравнений (6.1) и его производная $\{a'_1(t), a'_2(t), \dots, a'_n(t)\}$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных значений $a_1(0), a_2(0), \dots, a_n(0)$, $a'_1(0), a'_2(0), \dots, a'_n(0)$.

Условие (6.5) теоремы 6.1, в отличие от условия (3.8) теоремы 3.1, учитывает влияние реакции основания на устойчивость решения. При этом $\lambda_1 = \gamma_1^2$.

Определение. Число

$$\Delta_n = J(0) - \Phi_n(0) \quad (6.6)$$

будем называть невязкой решения (5.1), где $\Phi_n(0)$ есть значение функционала (6.2) в момент времени $t = 0$, т. е.

$$\Phi_n(0) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{M}{\delta_m} \left(\int_0^l f_2(x) g_m(x) dx \right)^2 + \frac{D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta}{\delta_m} \left(\int_0^l f_1(x) g_m(x) dx \right)^2 \right),$$

а $J(0)$ в соответствии с начальными условиями (2.2) примет вид:

$$J(0) = \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1'^2(x) - Nf_1'^2(x) + \beta f_1^2(x) \right\} dx. \quad (6.7)$$

7. Сравнение приближенных решений

Докажем, что, начиная с некоторого номера n , последовательность $\{\Phi_k(t)\}_{k=n}^\infty$ возрастающая для любого $t \geq 0$. Для этого сравним два приближения $\Phi_n(t)$, $\Phi_{n+1}(t)$, используя равенство (6.4), справедливое для любого $n \in N$:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t) &= \Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0) = \sum_{m=1}^{n+1} \left(A_m a_m'^2(0) + B_m a_m^2(0) \right) - \\ &- \sum_{m=1}^n \left(A_m a_m'^2(0) + B_m a_m^2(0) \right) = A_{n+1} a_{n+1}'^2(0) + B_{n+1} a_{n+1}^2(0). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\Phi_{n+1}(t) \geq \Phi_n(t), \quad (7.1)$$

если выполняется условие

$$D\gamma_{n+1}^4 - N\gamma_{n+1}^2 + \beta \geq 0. \quad (7.2)$$

При выполнении условия (7.2) получим неравенство $D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta \geq 0$, справедливое для любого $m > n$, а, следовательно, последовательность $\{\Phi_k(t)\}_{k=n}^\infty$ возрастающая для любого $t \geq 0$. Условие (7.2) будет справедливым, в частности, в области устойчивости (3.8).

8. Исследование функционала в предельном случае

Рассмотрим функционал (6.2) при $n \rightarrow \infty$. Введем обозначение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{np(n)}(x, t) = w_{np(\infty)}(x, t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) = \Phi_\infty(t).$$

В дальнейшем решение $w_{np(\infty)}(x, t)$ будем называть предельным приближенным решением.

В силу равенства (6.4) получим

$$\Phi_\infty(t) = \Phi_\infty(0) = \sum_{m=1}^\infty \left(A_m a_m'^2(0) + B_m a_m^2(0) \right). \quad (8.1)$$

$$\Phi_{\infty}(t) = \int_0^l \left\{ M \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a'_m(0) g_m(x)) \right)^2 + D \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a_m(0) g''_m(x)) \right)^2 - \right. \\ \left. - N \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a_m(0) g'_m(x)) \right)^2 + \beta \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a_m(0) g_m(x)) \right)^2 \right\} dx.$$

Так как $a_m(0), a'_m(0)$ в соответствии с (5.9) являются коэффициентами рядов Фурье для функций $f_1(x), f_2(x)$, то в соответствии с (3.4), (4.7) окончательно получим

$$\Phi_{\infty}(t) = \int_0^l \left\{ M f_2^2(x) + D f_1'^2(x) - N f_1'^2(x) + \beta f_1^2(x) \right\} dx = \Phi_{\text{точ}}(0) = \Phi_{\text{точ}}(t).$$

Таким образом, невязку (6.6) приближенного решения $w_{np(n)}(x, t)$ можно вычислить по формуле

$$\Delta_n = |\Phi_{\infty}(t) - \Phi_n(t)|. \quad (8.2)$$

Определение. Функцию $R_{\infty}(x, t)$ будем называть остаточным членом предельного приближенного решения, если

$$w_{\text{точ}}(x, t) = w_{np(\infty)}(x, t) + R_{\infty}(x, t), \quad (8.3)$$

где $w_{\text{точ}}(x, t)$ - точное решение начально-краевой задачи (2.1) - (2.3).

Так как уравнение (2.1) линейное, то, учитывая (8.3), получим уравнение

$$M\ddot{w}_{np(\infty)}(x, t) + Dw'''_{np(\infty)}(x, t) + Nw''_{np(\infty)}(x, t) + \beta w_{np(\infty)}(x, t) + \\ + M\ddot{R}_{\infty}(x, t) + DR''''_{\infty}(x, t) + NR''_{\infty}(x, t) + \beta R_{\infty}(x, t) = 0, \quad x \in (0, l). \quad (8.4)$$

Условия ортогональности невязки уравнения (8.4) к базисным функциям $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ позволяют записать систему уравнений для $R_{\infty}(x, t)$:

$$\int_0^l \left(M\ddot{R}_{\infty}(x, t) + DR''''_{\infty}(x, t) + NR''_{\infty}(x, t) + \beta R_{\infty}(x, t) \right) g_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как система функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ полная, то

$$M\ddot{R}_{\infty}(x, t) + DR''''_{\infty}(x, t) + NR''_{\infty}(x, t) + \beta R_{\infty}(x, t) = 0, \quad x \in (0, l).$$

Таким образом, из (5.7) получим систему уравнений для определения $w_{np(\infty)}(x, t)$:

$$M\ddot{w}_{np(\infty)}(x, t) + Dw'''_{np(\infty)}(x, t) + Nw''_{np(\infty)}(x, t) + \beta w_{np(\infty)}(x, t) = 0, \quad x \in (0, l)$$

с начальными условиями (2.2). Следовательно, в силу единственности решения задачи (2.1) - (2.3), получим

$$w_{\text{точ}}(x, t) = w_{np(\infty)}(x, t), \quad R_{\infty}(x, t) \equiv 0. \quad (8.5)$$

9. Оценка остаточного члена и выбор начального порядка приближения

Определение. Функцию $R_n(x, t)$ будем называть остаточным членом n -го приближения (5.1), если

$$w_{\text{точ}}(x, t) = w_{np(n)}(x, t) + R_n(x, t), \quad (9.1)$$

где $w(x, t)$ есть точное решение начально-краевой задачи (2.1)-(2.3). При этом функция $R_n(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$R_n(x, t) = R_n''(x, t) = 0, \quad x = 0, x = l. \quad (9.2)$$

Так как уравнение (2.1) линейное, то, подставляя решение в виде (9.1), получим уравнение

$$\begin{aligned} M\ddot{w}_{np(n)}(x, t) + D\dot{w}_{np(n)}'''(x, t) + Nw_{np(n)}''(x, t) + \beta w_{np(n)}(x, t) + \\ + M\ddot{R}_n(x, t) + D\dot{R}_n'''(x, t) + NR_n''(x, t) + \beta R_n(x, t) = 0, \quad x \in (0, l). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Условия ортогональности невязки уравнения (9.4) к базисным функциям $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ позволяют записать систему уравнений для $R_n(x, t)$:

$$\int_0^l \left(M\ddot{R}_n(x, t) + D\dot{R}_n'''(x, t) + NR_n''(x, t) + \beta R_n(x, t) \right) g_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.4)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \int_0^l R_n(x, 0) g_m(x) dx = 0, \quad \int_0^l \dot{R}_n(x, 0) g_m(x) dx = 0, \quad m = 1, \dots, n, \\ \int_0^l R_n(x, 0) g_m(x) dx = \int_0^l f_1(x) g_m(x) dx, \\ \int_0^l \dot{R}_n(x, 0) g_m(x) dx = \int_0^l f_2(x) g_m(x) dx, \quad m = n+1, \dots \end{aligned} \quad (9.5)$$

В соответствии с граничными условиями (9.2), запишем первые n уравнений (9.3) в виде

$$Mb_m''(t) + C_m b_m(t) = 0, \quad (9.6)$$

где

$$b_m(t) = \int_0^l R_n(x, t) g_m(x) dx, \quad C_m = D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta, \quad m = 1, \dots, n$$

с начальными условиями

$$b_m(0) = 0, \quad b'_m(0) = 0, \quad m = 1, \dots, n. \quad (9.7)$$

Решение задачи Коши (9.6), (9.7) имеет вид

$$b_m(t) \equiv 0, \Rightarrow \int_0^l R_n(x, t) \sin(\gamma_m x) dx = 0, \quad m = 1, \dots, n. \quad (9.8)$$

Проведем оценку остаточного члена. Пусть невязка приближенного решения (5.1) в момент времени $t = T$ равна Δ_n , тогда

$$\begin{aligned} \Delta_n &= J(0) - \Phi_n(0) = J(T) - \Phi_n(T) = \\ &= \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2(x, T) + Dw''^2(x, T) - Nw'^2(x, T) + \beta w^2(x, T) \right\} dx - \\ &- \int_0^l \left\{ M\dot{w}_{np(n)}^2(x, T) + Dw_{np(n)}''^2(x, T) - Nw_{np(n)}'^2(x, T) + \beta w_{np(n)}^2(x, T) \right\} dx = \\ &= \int_0^l \left\{ M(\dot{w}(x, T) - \dot{w}_{np(n)}(x, T))(\dot{w}(x, T) + \dot{w}_{np(n)}(x, T)) + \right. \\ &\quad \left. + D(w''_{\text{точ}}(x, T) - w''_{np(n)}(x, T))(w''(x, T) + w''_{np(n)}(x, T)) - \right. \\ &\quad \left. - N(w'_{\text{точ}}(x, T) - w'_{np(n)}(x, T))(w'(x, T) + w'_{np(n)}(x, T)) + \right. \\ &\quad \left. + \beta(w(x, T) - w_{np(n)}(x, T))(w(x, T) + w_{np(n)}(x, T)) \right\} dx = \\ &= \int_0^l \left\{ M\dot{R}_n(x, T)(\dot{R}_n(x, T) + 2\dot{w}_{np(n)}(x, T)) + DR_n''(x, T)(R_n''(x, T) + 2w_{np(n)}''(x, T)) - \right. \\ &\quad \left. - NR_n'(x, T)(R_n'(x, T) + 2w_{np(n)}'(x, T)) + \beta R_n(x, T)(R_n(x, T) + 2w_{np(n)}(x, T)) \right\} dx = \\ &= \int_0^l \left\{ M\dot{R}_n^2(x, T) + DR_n''^2(x, T) - NR_n'^2(x, T) + \beta R_n^2(x, T) \right\} dx + \\ &\quad + 2 \int_0^l \left\{ M\dot{R}_n(x, T)\dot{w}_{np(n)}(x, T) + DR_n''(x, T)w_{np(n)}''(x, T) - \right. \\ &\quad \left. - NR_n'(x, T)w_{np(n)}'(x, T) + \beta R_n(x, T)w_{np(n)}(x, T) \right\} dx = \\ &= \int_0^l \left\{ M\dot{R}_n^2(x, T) + DR_n''^2(x, T) - NR_n'^2(x, T) + \beta R_n^2(x, T) \right\} dx + \\ &+ 2 \int_0^l \left\{ M\dot{R}_n(x, T)\dot{w}_{np(n)}(x, T) + w_{np(n)}(x, T)[DR_n'''(x, T) + NR_n''(x, T) + \beta R_n(x, T)] \right\} dx = \\ &= \int_0^l \left\{ M\dot{R}_n^2(x, T) + DR_n''^2(x, T) - NR_n'^2(x, T) + \beta R_n^2(x, T) \right\} dx + \end{aligned}$$

$$+2 \int_0^l \left\{ M \dot{R}_n(x, T) \dot{w}_{np(n)}(x, T) - M \ddot{R}_n(x, T) w_{np(n)}(x, T) \right\} dx.$$

Согласно (9.8), получим

$$\Delta_n = \int_0^l \left\{ M \dot{R}_n^2(x, T) + D R_n'^2(x, T) - N R_n'^2(x, T) + \beta R_n^2(x, T) \right\} dx. \quad (9.9)$$

Согласно граничным условиям (9.2), используя неравенства Рэлея [1, с.138] и Коши-Буняковского, можно записать оценки

$$\int_0^l R_n'^2(x, T) dx \geq \lambda_{n+1} \int_0^l R_n'^2(x, T) dx, \quad \int_0^l R_n'^2(x, T) dx \geq \frac{R_n^2(x, T)}{l}, \quad (9.10)$$

где λ_{n+1} - $(n+1)$ -е собственное значение краевой задачи $\psi'''(x) = -\lambda \psi''(x)$ с краевыми условиями (9.2). При этом $\lambda_{n+1} = \gamma_{n+1}^2$.

Используя (9.10), из (9.9) окончательно получим

$$\Delta_n \geq \int_0^l (D \lambda_{n+1} - N) R_n'^2(x, T) dx \geq \frac{D \lambda_{n+1} - N}{l} R_n^2(x, T), \quad (9.11)$$

если выполняется условие

$$N < \lambda_{n+1} D. \quad (9.12)$$

Таким образом, в любой точке $x \in [0, l]$ в любой момент времени $t \geq 0$ справедлива оценка

$$|R_n(x, t)| \leq \frac{\Delta_n l}{D \lambda_{n+1} - N}, \quad (9.13)$$

при условии (9.12). Следовательно, порядок начального приближения находим из условия (9.12):

$$n_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } N < \lambda_1 D, \\ \left[\frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{N}{D}} \right], & \text{если } N \geq \lambda_1 D. \end{cases} \quad (9.14)$$

10. Пример

Проведем процедуру метода Галеркина для n приближений в случае шарнирного закрепления концов упругой пластины.

Рассмотрим отдельно решение каждого уравнения (5.8):

1) Если $B_i = 0$, то решение задачи Коши (6.1), (5.9)

$$a_i(t) = a_i(0) + \dot{a}_i(0)t. \quad (10.1)$$

Следовательно, если $\dot{a}_i(0) = 0$, то решение i -го уравнения условно устойчиво, иначе условно неустойчиво.

2) Если $B_i > 0$, то решение задачи Коши (6.1), (5.9)

$$a_i(t) = a_i(0) \cos \sqrt{\frac{B_i}{A_i}} t + \sqrt{\frac{A_i}{B_i}} \dot{a}_i(0) \sin \sqrt{\frac{B_i}{A_i}} t. \quad (10.2)$$

Следовательно, решение i -го уравнения условно устойчиво.

3) Если $B_i < 0$, то решение задачи Коши (6.1), (5.9)

$$a_i(t) = \frac{1}{2} \left(a_i(0) + \sqrt{-\frac{A_i}{B_i}} \dot{a}_i(0) \right) e^{\sqrt{-\frac{B_i}{A_i}} t} + \frac{1}{2} \left(a_i(0) - \sqrt{-\frac{A_i}{B_i}} \dot{a}_i(0) \right) e^{-\sqrt{-\frac{B_i}{A_i}} t}. \quad (10.3)$$

Следовательно, если $\sqrt{-B_i} a_i(0) + \sqrt{A_i} \dot{a}_i(0) = 0$, то решение i -го уравнения условно устойчиво, иначе условно неустойчиво.

В некоторых случаях можно найти точное решение задачи (2.1) - (2.3). Пусть заданы начальные условия

$$w(x, 0) = 0,01 \cdot \sin \left(\frac{4\pi x}{l} \right), \quad \dot{w}(x, 0) = 0,01 \cdot \sin \left(\frac{4\pi x}{l} \right), \quad (10.4)$$

тогда условия (5.9) примут вид

$$a_k(0) = \begin{cases} 0, & k \neq 4, \\ 0,01, & k = 4. \end{cases} \quad \dot{a}_k(0) = \begin{cases} 0, & k \neq 4, \\ 0,01, & k = 4. \end{cases} \quad (10.5)$$

Используя решения (10.1) - (10.3), получим точное решение (так как $a_k(t) \equiv 0, k \neq 4$)

$$w(x, t) = \begin{cases} 0,01 \cdot (1+t) \sin \gamma_4 x & \text{при } D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta = 0, \\ 0,01 \cdot \left(\cos \sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}} t + \sqrt{\frac{M}{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}} \sin \sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}} t \right) \times \\ \times \sin \gamma_4 x & \text{при } D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta > 0, \\ 0,01 \cdot \left(ch \sqrt{-\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}} t + \sqrt{-\frac{M}{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}} sh \sqrt{-\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}} t \right) \times \\ \times \sin \gamma_4 x & \text{при } D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую механическую систему: пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{\text{пл}} = 8480$), а параметры механической системы имеют значения $l = 2$, $h = 0,005$, $M = \rho_{\text{пл}} h = 42,4$, $\nu = 0,31$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 806,7$, $N = 1000$, $\beta = 4$ (все значения приведены в системе СИ).

Так как $D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta > 0$, то получим точное решение

$$w(x, t) = 0,01 \cdot \left(\cos \sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}} t + \sqrt{\frac{M}{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}} \sin \sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}} t \right) \sin \gamma_4 x.$$

В случае, когда бесконечное число членов разложения начальных функций (2.2) в ряд Фурье ненулевые, точное решение получено быть не может.

Рассмотрим предложенную механическую систему. Пусть начальные условия имеют вид $w(x, 0) = 0,01 \cdot x^3 (l-x)^3$, $\dot{w}(x, 0) = -0,005 \cdot x^4 (l-x)^4$.

Применяя теорему 3.1, получим, что при $N < 7961,8$ решение уравнения (2.1) устойчиво, следовательно, решение для нашей механической системы устойчиво по Ляпунову и порядок начального приближения $n_0 = 1$.

Пусть решение уравнения (2.1) необходимо найти с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$. С помощью математической системы Mathcad для данных значений параметров получим, что при $n = 21$ в соответствии с (9.11) выполняется оценка $|R_n(x, t)| \leq 7,085 \cdot 10^{-11}$ и решение имеет вид

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{21} \left(a_i(0) \cos \sqrt{\frac{D\gamma_i^4 - N\gamma_i^2 + \beta}{M}} t + \right. \\ \left. + \dot{a}_i(0) \sqrt{\frac{M}{D\gamma_i^4 - N\gamma_i^2 + \beta}} \sin \sqrt{\frac{D\gamma_i^4 - N\gamma_i^2 + \beta}{M}} t \right) \sin \gamma_i x,$$

где

$$a_i(0) = \frac{0,02}{\pi} \int_0^l x^3 (l-x)^3 \sin \gamma_i x dx, \quad \dot{a}_i(0) = -\frac{0,01}{\pi} \int_0^l x^4 (l-x)^4 \sin \gamma_i x dx.$$

11. Заключение

На основании анализа функционалов типа Ляпунова, построенных для дифференциального уравнения в частных производных, описывающего свободные колебания упругой пластины, доказана абсолютная и равномерная сходимость приближенных решений этого уравнения, полученных обобщенным методом Галеркина, к их точному решению. Получен критерий определения порядка приближенного решения для отыскания точного решения с заданной точностью.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013 г.г.), ГК № П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1990. – 320 с.
2. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503с.

Дата поступления 22.05.2010

Criterion of determination of order of Galerkin's approximation of decision of initially boundary value problems

© A. V. Ankilov³, P. A. Vel'misov⁴

Abstract. On account of analysis of the functional of Lyapounov's type constructed for partial differential equation, describing of the plate free vibrations, the absolute and uniform convergence of the approximate decisions of this equations obtained by the Galerkin's method to the exact decision is proved. The criterion of determination of order of approximate decision for the finding of exact decision with given accuracy is obtained. The developed criterion is maybe used under constructing of the decisions of broad class of others linear partial differential equations.

Key Words: dynamic stability; conditional stability; functional; partial differential equation.

REFERENCES

1. Shestakov A. A. Generalized direct Lyapounov's method for system with divided parameters. – Russia, Moscow: Science, 1990. – 320 p.
2. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Leading into projection-grid methods. – Russia, Moscow: Science, 1981. – 416 p.
3. Kollatc L. Eigenvalue problems. – Russia, Moscow: Science, 1968. – 503 p.

³Associate professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

⁴Professor, Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

УДК 517.938

О топологически несопряженных диффеоморфизмах Морса-Смейла с тривиальными пучками сепаратрис

© В. З. Гринес¹, Е. Я. Гуревич², В. С. Медведев³

Аннотация. Работа посвящена построению примера двух топологически несопряженных сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла трехмерной сферы с тривиальными пучками сепаратрис и изоморфными графиками.

Ключевые слова: Топологическая эквивалентность, диффеоморфизмы Морса-Смейла, граф Пейкшото

1. Введение

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом многообразии M^n , называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

- 1) неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- 2) устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических точек пересекаются трансверсально.

В этой работе мы будем рассматривать диффеоморфизмы Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, то есть такие диффеоморфизмы, для которых устойчивое и неустойчивое многообразия различных седловых точек не пересекаются.

Следуя идеям Е.А. Андроновой-Леонтович, А.А. Майера и М. Пейкшото, каждому такому диффеоморфизму f поставим в соответствие ориентируемый граф $\Gamma(f)$, множество вершин которого изоморфно неблуждающему множеству диффеоморфизма, а множество ребер — множеству сепаратрис седловых периодических точек. Диффеоморфизм f индуцирует на графе $\Gamma(f)$ автоморфизм $P(f)$.

Как следует, в частности, из работ [1], [9], в случае $n = 2$ граф (оснащенный некоторой дополнительной информацией о взаимном расположении сепаратрис) вместе с автоморфизмом является полным топологическим инвариантом. В случае $n = 3$ ситуация принципиально иная: на 3-многообразиях существует счетное множество топологически несопряженных диффеоморфизмов Морса-Смейла с изоморфными графиками. Этот эффект связан прежде всего с возможностью дикого вложения замыкания сепаратрис седловых периодических точек в несущее многообразие, что приводит к необходимости введения новых инвариантов для описания такой ситуации (см. работы [2]-[6] в которых получена классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла в предположениях различной общности).

В случае $n > 3$ одномерные сепаратрисы не могут быть дико вложены и, как показано в работе [10], граф снова является полным топологическим инвариантом для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, множество неустойчивых сепаратрис которых одномерно и не содержит гетероклинических пересечений.

¹Профессор, НГСХА, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

²Старший преподаватель, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; elena_gurevich@list.ru.

³Старший научный сотрудник, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

В связи с вышеизложенным естественно возникает вопрос: является ли для $n = 3$ требование отсутствия дико вложенных пучков сепаратрис седловых периодических точек (точное определение дано ниже) достаточным для того, чтобы граф диффеоморфизма был полным топологическим инвариантом.

В данной работе дается отрицательный ответ на этот вопрос.

2. Вспомогательные определения и формулировка результата

Пусть M^n — топологическое многообразие размерности $n \geq 3$ и $N^k \subset \text{int } M^n$ — компактное топологическое многообразие размерности $k < n$, вообще говоря, с непустым краем. Согласно [7] многообразие N^k называется *локально плоским* в точке $x \in N^k$, если существует окрестность $U(x) \subset M^n$ точки x и гомеоморфизм $\varphi : U(x) \rightarrow \mathbf{R}^n$ такой, что $\varphi(N^k \cap U(x)) \subset \mathbf{R}^k$, где \mathbf{R}^n — евклидово пространство, а $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$ — гиперплоскость размерности k . Если многообразие N^k является локально плоским в каждой своей точке, то оно называется *локально плоским*. Заметим, что в последнем случае множество N^k является подмногообразием многообразия M^n . Если многообразие N^k не является локально плоским хотя бы в одной точке $x \in N^k$, то оно называется *диким* в M^n .

Локальная плоскостность подмногообразия N^k в многообразии M^n в ряде случаев влечет за собой "тривиальность" подмногообразия N^k , означающую, что многообразие N^k может быть переведено в стандартный объект гомеоморфизмом объемлющего многообразия M^n .

Так, из [11] (§1 гл. 4) следует, что локально плоская компактная дуга l^4 в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n (или любом триангулируемом многообразии M^n) является ручной, то есть может быть переведена в отрезок прямой (объединение одномерных граней триангуляции) гомеоморфизмом пространства \mathbf{R}^n (многообразия M^n). В силу [7] локально плоская сфера S^{n-1} в \mathbf{R}^n (S^n) является тривиально вложенной, то есть может быть отображена гомеоморфизмом пространства \mathbf{R}^n (сферы S^n) в стандартную единичную сферу (экватор).

Однако, поведение объединений локально-плоских объектов может быть более сложным. Пусть $\mathbf{L} = \{L^1, \dots, L^k\}$ — множество попарно различных прямолинейных лучей в евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , выходящих из начала координат O ($k > 1$).

Определение 2.1. Подмножество $L \subset \mathbf{R}^3$ называется *k-пучком*, если существует гомеоморфизм $h : \mathbf{L} \rightarrow L$. При этом *k-пучок* L называется *ручным*, если существует гомеоморфизм $H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ такой, что $H(\mathbf{L}) = L$; в противном случае *k-пучок* называется *L диким*.

В работе [8] построен пример так называемого *умеренно дикого k-пучка*, то есть такого дикого *k-пучка* L , что каждая дуга, входящая в этот пучок, является локально-плоской.

В работе [12] построены диффеоморфизмы Морса-Смейла на сфере S^3 , сепаратрисы которых образуют умеренно дикие пучки. Отсюда следует, в частности, что два диффеоморфизма Морса-Смейла, имеющие изоморфные графы, могут быть топологически не сопряженными даже в случае локально-плоских сепаратрис.

Обозначим через $\Sigma_6(S^3)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла сферы S^3 , обладающих следующими свойствами:

- 1) для любого $f \in \Sigma_6(S^3)$ неблуждающее множество $\Omega(f)$ состоит в точности из 6 неподвижных точек: одного источника, четырех седел и пяти стоков;

⁴Компактной дугой $l \subset M^n$ будем называть образ отрезка $[0, 1]$ при отображении $e : [0, 1] \rightarrow M^n$, таком, что сужение e на l является гомеоморфизмом.

- 2) неустойчивые многообразия всех седловых точек одномерны и их замыкания являются ручными дугами;
- 3) существует стоковая точка ω_0 , в области притяжения $W^s(\omega_0)$ которой лежат в частности четыре одномерные неустойчивые сепаратрисы l_1, l_2, l_3, l_4 (по одной от каждой седловой точки);
- 4) множество $L(f) = \bigcup_{i=1}^{i=4} l_i \cup \omega_0$ является тривиальным пучком в $W^s(\omega_0)$ ⁵.

Отметим, что все диффеоморфизмы из класса $\Sigma_6(S^3)$ имеют изоморфные графы.

Т е о р е м а 2.1. *Существуют два топологически несопряженных диффеоморфизма $f, f' \in \Sigma_6(S^3)$.*

3. Доказательство теоремы 2.1.

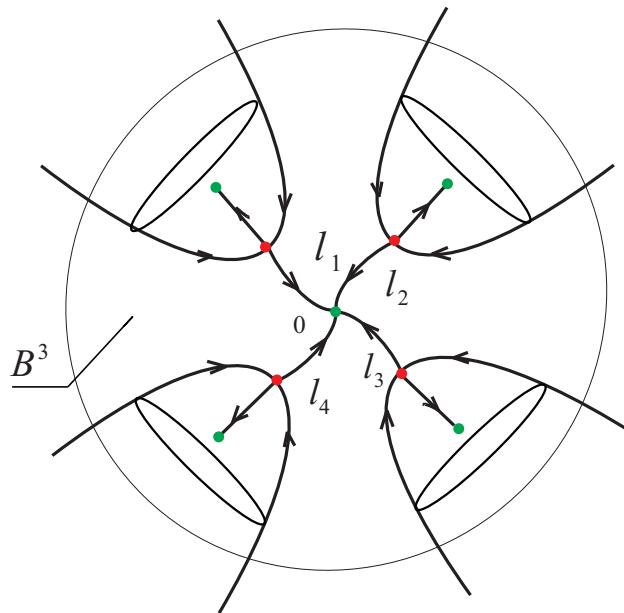


Рисунок 3.1

Фазовый портрет диффеоморфизма из класса $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$.

Обозначим через $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ класс диффеоморфизмов евклидовой плоскости такой, что для любого гомеоморфизма $f \in \Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ выполняются следующие свойства:

- 1) существует шар $B^3 \in \mathbf{R}^3$ такой, что $f(B^3) \subset \text{int } B^3$ и $\Omega(f) \subset \text{int } B^3$;
- 2) $\Omega(f)$ состоит в точности из четырех седловых и пяти стоковых неподвижных гиперболических точек;
- 3) неустойчивые многообразия всех седловых точек одномерны и их замыкания являются ручными дугами;
- 4) начало координат является стоковой точкой ω_0 , в области притяжения которой лежат в частности четыре одномерные неустойчивые сепаратрисы l_1, l_2, l_3, l_4 (по одной от каждой седловой точки диффеоморфизма f);

⁵Мы отождествляем здесь $W^s(\omega_0)$ с \mathbf{R}^3 .

5) множество $L(f) = \bigcup_{i=1}^{i=4} l_i \cup \omega_0$ является тривиальным пучком в $W^s(\omega_0)$.

С помощью одноточечной компактификации пространства \mathbf{R}^3 любой диффеоморфизм $f \in \Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ можно доопределить до диффеоморфизма $\hat{f} \in \Sigma_6(S^3)$ ⁶, ограничение которого на сферу S^3 с одной выколотой точкой N топологически сопряжено диффеоморфизму f , а точка N является для диффеоморфизма \hat{f} гиперболическим источником. Таким образом, для доказательства теоремы 2.1. достаточно построить два топологически несопряженных диффеоморфизма f, f' из $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$.

Схема построения диффеоморфизмов f, f' такова.

Шаг 1. Построение диффеоморфизма f .

Пусть $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi], \rho \in [0, +\infty)$ — сферические координаты в \mathbf{R}^3 . Вначале определим поток X_0^t соотношениями $X_0^t(\theta, \varphi, \rho) = (\theta, \varphi, e^{-t}\rho)$. Поток X_0^t имеет единственное состояние равновесия — гиперболический устойчивый узел, находящийся в начале координат O . Модифицируем поток X_0^t в стиле Черри следующим образом. Фиксируем четыре траектории этого потока и “раздувая” их, присоединим:

- 1) в точности 4 седла, для которых неустойчивые многообразия одномерны и принадлежат прямолинейным лучам, идущим из начала координат;
- 2) 4 устойчивых узла, не совпадающих с началом координат и лежащих в замыкании неустойчивых сепаратрис присоединенных седел.

Обозначим полученный поток X^t и определим диффеоморфизм f как сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока X^t .

Шаг 2 Построение гомеоморфизма g , удовлетворяющего следующим условиям:

- 1) g является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, начала координат.
- 2) $\Omega(g) = \Omega(f)$ и g совпадает с диффеоморфизмом f в инвариантных окрестностях устойчивых и неустойчивых многообразий седловых неподвижных точек.
- 3) g топологически не сопряжен с f ;

Шаг 3 Построение диффеоморфизма f' .

Сгладим отображение g в окрестности начала координат таким образом, чтобы полученный в результате диффеоморфизм f' был топологически сопряжен с g .

По построению диффеоморфизмы f и f' принадлежат классу $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ и не являются топологически сопряженными.

Ниже мы подробно описываем построение каждого диффеоморфизма.

3.1. Реализация шагов 1)-3)

Шаг 1

Для присоединения седловых состояний равновесия мы будем использовать вспомогательный поток Y^t в евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , и который задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi_1(x, y, z) \\ \dot{y} = y\psi_2(x, y, z). \\ \dot{z} = z\psi_3(x, y, z), \end{cases}$$

где $\psi_1: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция, такая, что:

- a) $\psi_1(x, y, z) = -1$ для любых точек (x, y, z) , лежащих вне цилиндра $B_1 = \{(x, y, z) | |x| \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$;

⁶Подробное описание этой процедуры см. в [10].

b) $\psi_1(x, y, z) < 0$ для любых точек (x, y, z) , лежащих вне шара $B_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1/16\}$;

c) $\psi_1(x, y, z) > 0$ для любых точек $(x, y, z) \in B_3$;

d) $\psi_1(x, y, z)$ является регулярной в точках окружности ∂B_3 ;

для $i = 2, 3$ функция $\psi_i : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

a) $\psi_i(x, y, z) = 0$ для любых точек (x, y, z) , лежащих вне цилиндра B_1 ;

b) $\psi_i(x, y, z) < 0$ для любых точек $(x, y, z) \in B_1$;

c) $\psi_i(x, y, z) = -1$ для любых точек (x, y, z) , принадлежащих цилинду $B_2 = \{(x, y, z) | |x| \leq \frac{1}{2}, y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

Поток Y^t имеет ровно два состояния равновесия: седло в точке $P = (-1/4, 0, 0)$ и устойчивый узел в точке $Q = (1/4, 0, 0)$, оба состояния равновесия являются гиперболическими. Неустойчивыми сепаратрисами точки P является интервал $\{|x_1| < \frac{1}{4}, x_2 = 0, x_3 = 0\}$, лежащий в области притяжения точки Q , и множество $\{x_1 < -\frac{1}{4}, x_2 = 0, x_3 = 0\}$.

Для каждого $i = 1, \dots, 4$ положим $\theta_i = \frac{\pi(i-1)}{3}$, $u_i = \{(\theta, \varphi, \rho) | \theta \in [\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon], \varphi \in [-\varepsilon, \varepsilon], \rho \in [e^{-1}, e]\}$, где $\varepsilon = \frac{\pi}{12}$ (области u_1, \dots, u_4 попарно не пересекаются).

Обозначим через $h_i : B_1 \rightarrow u_i$ диффеоморфизм, удовлетворяющий условию $h_i Y^t h_i^{-1}|_{\partial u_i} = X_0^t|_{\partial u_i}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ и переводящий отрезок $\{|x| < 1, y = z = 0\}$ в отрезок $\{\theta = \theta_i, \varphi = 0, \rho \in [e^{-1}, e]\}$.

Определим поток X^t следующим образом:

$$X^t(x) = \begin{cases} X_0^t(x), & \text{если } x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^4 u_i \\ h_i(Y^t(h_i^{-1}(x))), & \text{если } x \in u_i, i \in \{1, \dots, 4\} \end{cases}$$

В каждой области u_i поток X^t имеет два гиперболических состояния равновесия: устойчивый узел и седло, неустойчивые сепаратрисы которого одномерны и лежат на луче $L_i = \{\theta = \theta_i, \varphi = 0\}$.

Сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока X^t является искомым дифеоморфизмом f .

Шаг 2

Определим вспомогательный диффеоморфизм $\Phi : \mathbf{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbf{R}^3 \setminus \{O\}$ соотношением

$$\Phi(\theta, \varphi, \rho) = (\theta, \varphi + 2\pi\psi(\theta), e^{-1}\rho),$$

где $\psi(\theta) : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$ — гладкая функция, равная нулю при $\theta \in [0, \theta_2 + \varepsilon]$, равная единице при $\theta \in [\theta_3 - \varepsilon, \pi]$ и монотонно возрастающая от нуля до единицы при $\theta \in [\theta_2 + \varepsilon, \theta_3 - \varepsilon]$.

ограничение диффеоморфизма Φ на границу каждой области $U_i = \{(\theta, \varphi, \rho) | \theta \in [\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon], \varphi \in [-\varepsilon, \varepsilon], \rho \in [e^{-1}, e]\}$ совпадает с ограничением диффеоморфизма f на границу этой области.

Гомеоморфизм $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ зададим следующим образом.

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x = O \\ f(x), & \text{если } x \in \bigcup_{i=1}^4 U_i \\ \Phi(x), & \text{если } x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^4 U_i. \end{cases}$$

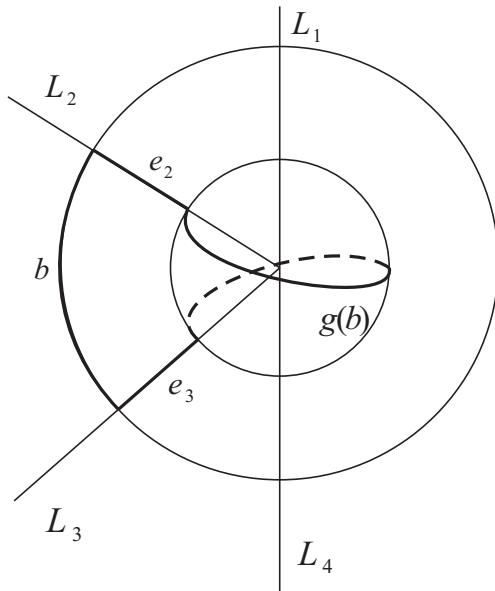


Рисунок 3.2

Нетривиальная дуга $b \cup g(b) \cup e_2 \cup e_3$.

З а м е ч а н и е 3.1. По построению гомеоморфизм g является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, точки O , и обладает следующим свойством:

- любой сингулярный диск⁷ $D^2 \in \mathbf{R}^3$, ограниченный замкнутой дугой, состоящей из дуги $b = \{(\theta, \varphi, \rho) : \theta \in [\theta_2, \theta_3], \varphi = 0, \rho = e^{-1}\}$, ее образа $g(b) = \Phi(b)$ и отрезков $e_2 = \{(\theta, \varphi, \rho) : \theta = \theta_2, \varphi = 0, \rho \in [e^{-1}, e^{-2}]\}$, $e_3 = \{(\theta, \varphi, \rho) : \theta = \theta_2, \varphi = 0, \rho \in [e^{-1}, e^{-2}]\}$, пересекается с объединением лучей $L_1 \cup L_4$ (см. рис. 3.2).

Л е м м а 3.1. Отображения f и g не являются топологически сопряженными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пусть существует гомеоморфизм $h : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ такой, что $g = h^{-1}fh$. Так как множество $Q = \mathbf{R}^3 \setminus (L_1 \cup L_4)$ инвариантно относительно отображений f, g , то верно равенство $g|_Q = h^{-1}fh|_Q$.

Правая часть этого равенства изотопна в области Q тождественному отображению $id : Q \rightarrow Q$ при помощи изотопии $H(x, t) : Q \times [0, 1] \rightarrow Q$, заданной соотношением $H(x, t) = h^{-1}\{f_t[h(x)]\}$, где f_t — диффеоморфизм сдвига на время $t \in [0, 1]$ вдоль траекторий потока X^t , построенного на первом шаге.

Тогда и гомеоморфизм $g|_Q$, стоящий в правой части равенства, изотопен тождественному при изотопии $H(x, t)$. Рассмотрим дугу b из замечания 3.1. и её образ $g(b)$. При изотопии $H(x, t)$ дуга $g(b)$ непрерывно деформируется в дугу b , при каждой дуге $b_t = H(b, t)$ лежит в области Q , и концевые точки дуги b_t принадлежат лучам L_2, L_3 . Тогда объединение $\bigcup_{t \in [0, 1]} b_t$ образует сингулярный диск D^2 , ограниченный замкнутой дугой, состоящей из дуги b , ее образа $g(b)$ и отрезков e_2, e_3 лучей L_2, L_3 соответственно, целиком лежащий в области Q . Получаем противоречие со свойством диффеоморфизма g , описанным в замечании.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Шаг 3

⁷ Сингулярным диском D^2 называется образ стандартного единичного диска при непрерывном отображении.

Обозначим через $A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ линейный диффеоморфизм, полученный сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X_0^t .

Положим $B_\delta = \{(\theta, \varphi, \rho) : \rho \leq \delta\}$, $\delta \in (0, e^{-1})$. $S_0 = \partial B_\delta$, $S_1 = g(S_0)$. Отметим, что по построению $A(S_0) = S_1$.

Определим диффеоморфизм $h : B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta) \rightarrow B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta)$ следующим образом. Для любой точки $x \in S_0$ положим $h(x) = x$, если $x \in S_1$, то положим $h(x) = A[g^1(x)]$, и, наконец, для любой внутренней точки шарового слоя $B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta)$ определим $h(x)$ как произвольное продолжение гомеоморфизмов, заданных на границе. Доопределим гомеоморфизм h до гомеоморфизма $H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ следующим образом:

$$H(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in O \cup \mathbf{R}^3 \setminus B_\delta \\ h(x), & \text{если } x \in B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta) \\ A^k(h(g^{-k}(x))), & \text{если } x \in \text{int } g(B_\delta), \end{cases}$$

где $k \in \mathbf{N}$ — такое, что $g^{-k}(x) \in B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta)$.

По построению $H(x)|_{\text{int } B_\delta} = AHg_{\text{int } B_\delta}^{-1}$. Положим $f' = HgH^{-1}$. По определению диффеоморфизм f' топологически сопряжен с g , для любой точки $x \in R^n \setminus \text{int } B_\delta$ справедливо равенство $f'(x) = g(x)$ и для любой точки $x \in \text{int } B_\delta$ справедливы равенства $f'(x) = HgH^{-1} = AHg^{-1}gH^{-1} = A(x)$. Множество одномерных сепаратрис $L(f')$ диффеоморфизма f' , принадлежащее области притяжения стоковой точки O является ручным пучком, так как множество сепаратрис $L(g)$ отображения g принадлежит семейству прямолинейных лучей, выходящих из точки O , и $L(f') = H(L(g))$.

Авторы благодарят грант РФФИ РАН (грант 08-01-00547а) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Безденежных, В.З. Гринес Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1. – Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. Горький. 1985. – С. 22–38. Имеется перевод: Bezdenezhykh A.N., Grines V.Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I. – Sel. Math. Sov. 1992. V. 11. – P. 1–11.
2. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 . – Journal of Dynamical and Control Systems. 2000. V. 6, n. 4. – P. 579–602.
3. Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, Э.Пеку О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических кривых на три-многообразиях. – Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2002. 236. – С. 58–69.
4. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves. – Topology and its Applications. 2002. V. 111. – P. 335–344.
5. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradientlike diffeomorphisms on 3-manifolds. – Topology. 2004. V. 43. – P. 369–391.
6. Бонатти Хр., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях. – Доклады РАН. 2004. Т. 396, № 4. – С. 439–442.

7. Brown M. Locally flat imbeddings of topological manifold. – Ann. of Math. 1962. V. 75, n. 2. – P. 331–341.
8. Debrunner H., Fox R. A mildly wild imbedding of an n -frame. – Duke Math. J. 1960. V. 27, n. 3. – P. 425–429.
9. Гринес В.З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях. – Матем. заметки. 1993. Т. 54, вып. 3. – С. 3–17.
10. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. Граф Пейкшто диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех. – Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 261. – С. 61–86.
11. Келдыш Л. В. Топологические вложения в евклидово пространство. – Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1966. Т. 81. – 183 С.
12. O. Pochinka. Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices. – Universitatis Iagelonicae Acta Mathematica. 2009. Fasciculus XLVII. – P. 149–154.

Дата поступления 01.06.2010

On topologically non-conjugated Morse-Smale diffeomorphisms with trivial frame of separatrices

© V. Grines⁸, E. Gurevich⁹, V. Medvedev¹⁰

Abstract. The present paper is devoted to construction of example of two topologically non-conjugated orientation preserving Morse-Smale diffeomorphisms of 3-dimensional sphere with trivial frames of separatrices and isomorphic graphs.

Key Words: Topological equivalence, Morse-Smale diffeomorphisms, graph Pexoto

REFERENCES

1. Bezdenezhykh A.N., Grines V.Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I. – Sel. Math. Sov. 1992. V. 11. – P. 1–11.
2. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 . – Journal of Dynamical and Control Systems. 2000. V. 6, n. 4. – P. 579–602.
3. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V.S. Pécou E. On Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds. – Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova. 2002. T. 236. – C. 58–69.
4. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves. – Topology and its Applications. 2002. V. 111. – P. 335–344.
5. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pécou E. Topological classification of gradientlike diffeomorphisms on 3-manifolds. – Topology. 2004. V. 43. – P. 369–391.
6. Bonatti Ch., Grines V.Z., Pochinka O.V. Classification Morse-Smale with diffeomorphisms finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds. – Doklady RAN. 2004. V. 396, n. 4. – P. 439–442.
7. Brown M. Locally flat imbeddings of topological manifold. – Ann. of Math. 1962. V. 75, n. 2. – P. 331–341.
8. Debrunner H., Fox R. A mildly wild imbedding of an n-frame. – Duke Math. J. 1960. V. 27, n. 3. – P. 425–429.
9. Grines V.Z. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces. – Матем.заметки. 1993. V. 54, n. 3. – P. 3–17.
10. Grines V.Z., Gurevich E.Y., Medvedev V.S. Pexoto graph for Morse-Smale diffeomorphisms on manifolds of dimensions grater than three. – Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova. 2008. V. 261. – P. 61–86.
11. Keldysh L. V. Topologycal embedding in Euclidian space. – Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova. 1966. V. 81. – P. 1–183.
12. O. Pochinka. Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices. – Universitatis Iagelonicae Acta Mathematica. 2009. Fasciculus XLVII. – P. 149–154.

⁸Professor, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.

⁹Assistant professor, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; elena_gurevich@list.ru.

¹⁰Senior staff scientist, Institute of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.

УДК 519.624.8

Итеративный метод регуляризации первого порядка для обобщенных вариационных неравенств

© И. П. Рязанцева¹

Аннотация. Для обобщенных вариационных неравенств в банаховом пространстве с операторами некоторого класса при приближенном задании данных исследован итеративный метод регуляризации первого порядка.

Ключевые слова: обобщенное вариационное неравенство, регуляризация, итерация, оператор.

1. Пусть X – вещественное рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным X^* , Ω – выпуклое замкнутое множество из X , $A : X \rightarrow X^*$, $B : X \rightarrow X$ – некоторые отображения, причем $\Omega \subset R(B)$, $M = \{x \mid Bx \in \Omega\} \subset D(A)$, $\langle x, y \rangle$ при $x \in X$ и $y \in X^*$ есть отношение двойственности между пространствами X и X^* .

Задача нахождения элемента $x \in X$ такого, что

$$\langle Ax - f, Bx - u \rangle \leq 0, \quad Bx \in \Omega \quad \forall u \in \Omega, \quad (1.1)$$

называется обобщенным вариационным неравенством (см. [1, 2]).

Определение 1.1. . Оператор $A : X \rightarrow X^*$ называется B -монотонным, если справедливо неравенство

$$\langle Ax - Ay, Bx - By \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in D(A) \cap D(B).$$

Пусть выполнены следующие условия:

- (а) оператор A деминепрерывен, B^{-1} – непрерывное на Ω отображение;
- (б) оператор A является B -монотонным на множестве M , т.е.

$$\langle Ax - Ay, Bx - By \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in M. \quad (1.2)$$

Вводя обозначение $Bx = v$, от (1.1) придем к обычному вариационному неравенству

$$\langle Cv - f, v - u \rangle \leq 0, \quad v \in \Omega \quad \forall u \in \Omega \quad (1.3)$$

на выпуклом замкнутом множестве Ω , $C = AB^{-1}$.

В наших предположениях задача (1.1) некорректна. В данной работе для решения ее будем строить итеративный метод регуляризации первого порядка.

Пусть дополнительно выполнены следующие условия:

- (в) задача (1.1) имеет непустое множество решений N ;
- (г) оператор A ограничен;
- (д) данные в (1.1) возмущены, а именно, вместо $\{f, A, B, \Omega\}$ известны их приближения $\{f_k, A^k, B^k, \Omega_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, причем

$$\|f - f^k\| \leq \delta_k; \quad (1.4)$$

¹Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; ryazantseva@waise.nntu.sci-nnov.ru

$A^k : X \rightarrow X^*$ – B^k -монотонные деминепрерывные операторы, $B^k : X \rightarrow X$ – деминепрерывные операторы, имеющие непрерывные обратные, множество $M^k = \{x \mid B^k x \in \Omega_k\} \subset D(A^k)$;

$$\|A^k x - Ax\| \leq h_k g(\|x\|) \quad \forall x \in D(A) = D(A^k); \quad (1.5)$$

$$\|B^k x - Bx\| \leq \beta_k q(\|x\|) \quad \forall x \in D(B) = D(B^k); \quad (1.6)$$

Ω_k – выпуклое замкнутое множество из $R(B^k)$, $\Omega \subset R(B)$,

$$r(\Omega, \Omega_k) \leq \sigma_k; \quad (1.7)$$

здесь $g(s)$ и $q(s)$ – неотрицательные функции при $s \geq 0$, переводящие ограниченное множество в ограниченное, $r(\Omega, \Omega_k)$ – хаусдорфово расстояние в пространстве X между множествами Ω и Ω_k , $\{\delta_k\}$, $\{h_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\sigma_k\}$ – последовательности неотрицательных чисел.

Если итеративный метод первого порядка из [3] применить для нахождения решения вариационного неравенства (1.3), то одно из достаточных условий сходимости метода принимает вид

$$\|C^k u - Cu\| = \|A^k(B^k)^{-1}u - AB^{-1}u\| \leq \tilde{h}_k \tilde{g}(\|u\|), \quad (1.8)$$

где $\tilde{h}_k \geq 0$ при всех $k = \overline{1, \infty}$, $\tilde{g}(s)$ – функция того же класса, что $g(s)$ и $q(s)$. Проверить справедливость последнего неравенства нелегко, так как нелинейные операторы B^{-1} и $(B^k)^{-1}$ не всегда можно представить в явном виде. Укажем для примера, что нахождение значения оператора J^{-1} , обратного к оператору дуального отображения в пространствах Соболева [4] – [6] в некоторой точке, следует решить краевую задачу (см. [7], с.126). Поэтому в данной работе итеративные методы регуляризации строятся непосредственно для обобщенного вариационного неравенства (1.1). При доказательстве сильной сходимости метода от предположения (1.8) удается отказаться и заменить его неравенствами (1.5), (1.6). Последние легко проверяются для некоторых известных классов нелинейных операторов (см. [5], [8]).

Сделаем дополнительные предположения:

- (е) пусть $\{\alpha_k\}$ – бесконечно малая убывающая последовательность положительных чисел;
- (ж) справедливы неравенства

$$\|Ax\| \leq p(\|Bx\|) \quad \forall Bx \in \Omega, \quad x \in X,$$

$$\|A^k x\| \leq p(\|B^k x\|) \quad \forall B^k x \in \Omega_k, \quad x \in X,$$

здесь $p(s)$ – неотрицательная непрерывная при $s \geq 0$ функция;

(з) масштабная функция $\mu(t)$ дуального отображения J^μ (см. [4] – [6]) обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\mu(t)}{\mu(t)} = +\infty. \quad (1.9)$$

Теперь в силу следствия 1 из [9] заключаем, что последовательность $\{x_k^\alpha\}$ решений обобщенного вариационного неравенства

$$\langle Ax_k^\alpha + \alpha_k J^\mu Bx_k^\alpha - f, Bx_k^\alpha - By \rangle \leq 0, \quad Bx_k^\alpha \in \Omega \quad \forall By \in \Omega \quad (1.10)$$

сходится по норме пространства X к B -нормальному решению x^* обобщенного вариационного неравенства (1.1), т.е.

$$\|v^*\| = \|Bx^*\| = \{\|Bx\| \mid Bx \in \Omega, x \in N\}.$$

Заметим, что в [9] установлена сходимость

$$Bx_k^\alpha \rightarrow Bx^* \quad \text{при} \quad k \rightarrow +\infty. \quad (1.11)$$

Далее будем использовать некоторый оператор обобщенного проектирования из пространства X^* на выпуклое замкнутое множество из пространства X (сравни с [5], [6]). Приведем некоторые результаты, связанные с этим понятием.

Построим функционал

$$V^\mu(x, y) = \Phi(\|J^\mu x\|) - \langle J^\mu x, y \rangle + \Psi(\|y\|), \quad (1.12)$$

где $\Psi(t) = \int_0^t \mu(s)ds$, $\nu(\tau)$ – функция, обратная к $\mu(t)$, $\Phi(\tau) = \int_0^\tau \nu(s)ds$. Тогда (см. [5], [6])

$$S(J^\mu x) = \text{grad}_{J^\mu x} V^\mu(x, y) = x - y, \quad Ty = \text{grad}_y V^\mu(x, y) = J^\mu y - J^\mu x. \quad (1.13)$$

Операторы $S : X^* \rightarrow X$, $T : X \rightarrow X^*$ являются строго монотонными (см. [4], с.313). Теперь в силу теоремы 5.1 из [4] делаем вывод о строгой выпуклости функционала $V^\mu(x, y)$ по переменным $J^\mu x$ и y .

На основании определения оператора J^μ запишем равенство

$$V^\mu(x, x) = \Phi(\mu(\|x\|)) - \|x\|\mu(\|x\|) + \Psi(\|x\|).$$

Кроме того, $\mu(0) = \Phi(0) = \Psi(0) = 0$, что вытекает из определения этих функций. Построим функцию $\xi(s) = \Phi(\mu(s)) - s\mu(s) + \Psi(s)$. Легко убедиться, что $\xi'(s) = \nu(\mu(s))\mu'(s) - \mu(s) - s\mu'(s) + \mu(s) = 0$ (функцию $\mu(t)$ считаем дифференцируемой). Но $\xi(0) = 0$. Тем самым доказано, что

$$V^\mu(x, x) = 0 \quad \forall x \in X. \quad (1.14)$$

Так как $V^\mu(x, y)$ есть выпуклый по $J^\mu x$ функционал, то (см. [4], с.104)

$$V^\mu(z, y) - V^\mu(x, y) \geq \langle J^\mu z - J^\mu x, x - y \rangle \quad \forall x, y, z \in X.$$

Отсюда при $z = y$ в силу (1.14) имеем неравенство

$$\langle J^\mu x - J^\mu y, x - y \rangle \geq V^\mu(x, y). \quad (1.15)$$

Из (1.12) и определения оператора J^μ выводим неравенство

$$V^\mu(x, y) \geq \Phi(\mu(\|x\|)) - \|y\|\mu(\|x\|) + \Psi(\|y\|). \quad (1.16)$$

Поскольку $\Psi(t)/t \sim \mu(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то $V^\mu(x, y) \rightarrow +\infty$ при $\|y\| \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $x \in X$. Теперь с учетом строгой выпуклости функционала $V^\mu(x, y)$ по y делаем вывод о существовании единственного элемента $y \in X$ такого, что

$$V^\mu(x, y) = \min\{V^\mu(x, \xi) \mid \xi \in \Omega\} \quad (1.17)$$

(см. [4], с. 102, 119). Следовательно, можно ввести определение.

Определение 1.2. . Оператор $P_\Omega^\mu : X^* \rightarrow X$ такой, что

$$P_\Omega^\mu z = y \in \Omega, \quad z = J^\mu x, \quad (1.18)$$

а элемент y удовлетворяет (1.17), называется оператором обобщенного проектирования.

Подобно [6], параграф 3.4 доказывается утверждение.

Л е м м а 1.2. . Элемент y из Ω удовлетворяет (1.17), (1.18) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\langle J^\mu y - J^\mu x, y - \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Пусть масштабная функция $\mu(t) = t^{s-1}$ с $s \geq 2$, тогда оператор J^μ и функционал V^μ будем обозначать J^s и V^s соответственно. Это предположение продиктовано тем, что оператор J^s и функционал V^s хорошо изучены и имеют более простой вид, чем J^μ и V^μ при произвольной функции $\mu(t)$ (см. [4] – [6]). Оператор обобщенного проектирования на основе функционала V^s будем обозначать P_Ω^s .

Так как в нашем случае $\nu(\tau) = \tau^{1/(s-1)}$, $\Psi(t) = t^s/s$, $\Phi(\tau) = \tau^m/m$, $1/s + 1/m = 1$, то (1.16) примет вид

$$V^s(x, y) \geq \|x\|^s/m - \|y\|\|x\|^{s-1} + \|y\|^s/s.$$

Используя тривиальное неравенство

$$a^r - b^r \leq r a^{r-1}(a - b), \quad r > 1$$

и связь величин s и m , нетрудно установить, что

$$V^s(x, y) \geq \|x\|^{s-2}(\|x\| - \|y\|)^2/m.$$

Отсюда заключаем, что $V^s(x, y) \geq 0$ при всех x и y из X . Условие (1.9) при нашем выборе масштабной функции принимает вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^s}{p(t)} = +\infty. \quad (1.19)$$

Далее считаем, что (1.19) выполняется.

Рассмотрим метод итеративной регуляризации следующего вида

$$\begin{aligned} B^k u_k &= P_{\Omega_k}^s (J^s B^k u_k - \frac{J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1}}{\tau_k} - \\ &- \gamma_k [A^k u_k + \alpha_k J^s B^k u_k - f^k]), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где элемент $u_0 \in X$ задается, $\{\tau_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел. В силу леммы 1.2. от (1.20) перейдем к обобщенному вариационному неравенству

$$\begin{aligned} \langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1} + \tau_k \gamma_k (A^k u_k + \alpha_k J^s B^k u_k - f^k), B^k u_k - B^k y \rangle &\leq 0 \\ \forall B^k y \in \Omega_k, \quad B^k u_k \in \Omega_k. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Нетрудно убедиться в строгой B^k -монотонности и B^k -коэрцитивности оператора $C^k = J^s B^k + \tau_k \gamma_k (A^k + \alpha_k J^s B^k)$ (см. [9]). Следовательно, по теореме 1 из [9] обобщенное вариационное неравенство (1.20), а значит, и уравнение (1.21) однозначно разрешимы. Исследуем поведение последовательности $\{u_k\}$ при $k \rightarrow \infty$.

Предположим, что существуют положительные постоянные a_1 и a_2 такие, что

$$\|u_k\| \leq a_1, \quad \|B u_k\| \leq a_2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.22)$$

и построим последовательность неотрицательных чисел $\{\rho_k\}$, где

$$\rho_k = V^s(B^k u_k, Bx_k^\alpha) = \|J^s B^k u_k\|^m/m - \langle J^s B^k u_k, Bx_k^\alpha \rangle + \|Bx_k^\alpha\|^s/s, \quad (1.23)$$

здесь $1/m + 1/s = 1$. Используя (1.13) и неравенство (см. [6], с.66)

$$\|x\|^\lambda/\lambda - \|y\|^\lambda/\lambda \geq \langle J^\lambda y, x - y \rangle, \quad \lambda > 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho_k - \rho_{k-1} &\leq \langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1}, B^k u_k - Bx_k^\alpha \rangle + \\ &+ \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

В силу условия (1.7) при каждом $k \geq 1$ найдутся элементы $Bv^k \in \Omega$ и $B^k w_k^\alpha \in \Omega_k$ такие, что

$$\|B^k u_k - Bv_k\| \leq \sigma_k, \quad \|Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha\| \leq \sigma_k. \quad (1.25)$$

Положив в (1.21) $y = w_k^\alpha$, а в (1.1) при $J^\mu = J^s$, умноженном на $\gamma_k \tau_k$, принимая $y = v_k$ и сложив результаты, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1} + \tau_k \gamma_k (A^k u_k + \alpha_k J^s B^k u_k - f^k), B^k u_k - B^k w_k^\alpha \rangle + \\ &+ \tau_k \gamma_k \langle Ax_k^\alpha + \alpha_k J^s Bx_k^\alpha - f, Bx_k^\alpha - Bv_k \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Перепишем последнее неравенство в следующей эквивалентной форме, удобной для получения нужных оценок:

$$\begin{aligned} \langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1}, B^k u_k - Bx_k^\alpha \rangle &+ \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha \rangle + \\ &+ \langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha \rangle - \\ &- \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha \rangle + \\ &+ \tau_k \gamma_k \{ \langle A^k u_k - A^k x_k^\alpha, B^k u_k - B^k x_k^\alpha \rangle + \\ &+ \langle A^k u_k, (B^k x_k^\alpha - Bx_k^\alpha) + (Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha) \rangle + \\ &+ \langle A^k x_k^\alpha - Ax_k^\alpha, Bv_k - Bx_k^\alpha \rangle + \langle A^k x_k^\alpha, (B^k u_k - Bv_k) + (Bx_k^\alpha - B^k x_k^\alpha) \rangle + \\ &+ \alpha_k [\langle J^s B^k u_k - J^s Bx_k^\alpha, B^k u_k - Bx_k^\alpha \rangle + \langle J^s B^k u_k, Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha \rangle + \\ &+ \langle J^s Bx_k^\alpha, B^k u_k - Bv_k \rangle] + \langle f^k, Bv_k - B^k u_k \rangle + \\ &+ \langle f, B^k w_k^\alpha - Bx_k^\alpha \rangle + \langle f - f^k, Bv_k - B^k w_k^\alpha \rangle \} \leq 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

На основании (1.15) имеем

$$\langle J^s B^k u_k - J^s Bx_k^\alpha, B^k u_k - Bx_k^\alpha \rangle \geq \rho_k. \quad (1.27)$$

Далее найдем оценку сверху для $\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|$. В силу (1.10) имеем

$$\langle Ax_{k-1}^\alpha + \alpha_{k-1} J^\mu Bx_{k-1}^\alpha - f, Bx_{k-1}^\alpha - By \rangle \leq 0, \quad Bx_{k-1}^\alpha \in \Omega \quad \forall By \in \Omega.$$

Положив в полученном неравенстве $y = x_k^\alpha$, а в (1.10) – $y = x_{k-1}^\alpha$ и сложив результаты, запишем неравенство

$$\begin{aligned} &\langle Ax_k^\alpha - Ax_{k-1}^\alpha, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha \rangle + \alpha_k \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s Bx_{k-1}^\alpha, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha \rangle + \\ &+ (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \langle J^s Bx_{k-1}^\alpha, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Учитывая здесь B -монотонность оператора A , ограниченность последовательности $\{Bx_k^\alpha\}$ (см. (1.11)) и свойство дуального отображения J^s (см. [6], с.88), приходим к неравенству

$$c\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|^{s-2}\delta_X(\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|/a_4) \leq a_3 \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_k} \|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|,$$

где $a_3 > 0$, $c > 0$, $s \geq 2$, $a_4 = \max\{1, a_5\}$, $\|Bx_k^\alpha\| \leq a_5$ при всех $k = 1, 2, \dots, \delta_X(\tau)$ – модуль выпуклости пространства X . Отсюда выводим оценку

$$\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\| \leq a_4 g_X^{-1} \left(a_5 \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_k} \right), \quad a_5 = \frac{a_3}{c}, \quad (1.28)$$

здесь $g_X^{-1}(\tau)$ – функция, обратная к функции $g_X(\xi)$,

$$g_X(\xi) \leq \delta_X(\xi)\xi^{s-3}. \quad (1.29)$$

Предположения (г), (1.5), (1.6) и (1.22) дают неравенство

$$\|A^k u_k - Au_k\| \leq h_k g(\|u_k\|), \quad \|B^k u_k - Bu_k\| \leq \beta_k q(\|u_k\|),$$

т.е.

$$\|A^k u_k\| \leq a_6(1 + h_k), \quad \|B^k u_k\| \leq \tilde{a}_6(1 + \beta_k), \quad a_6 > 0, \quad \tilde{a}_6 > 0. \quad (1.30)$$

Следовательно, последовательности $\{A^k u_k\}$, $\{B^k u_k\}$ ограничены. Теперь, используя (1.4) – (1.6), (1.24), (1.25), (1.27), (1.28), (1.30), из (1.26) выводим оценку

$$\rho_k \leq (1 - \eta_k)\rho_{k-1} + a_7 \left[\gamma_k \tau_k (\delta_k + h_k + \beta_k + \sigma_k) + \sigma_k + g_X^{-1} \left(a_5 \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_k} \right) \right], \quad (1.31)$$

здесь $a_7 > 0$,

$$\eta_k = \frac{\alpha_k \gamma_k \tau_k}{1 + \alpha_k \gamma_k \tau_k} \geq \frac{\alpha_k \gamma_k \tau_k}{1 + a_0}, \quad (1.32)$$

$a_0 = \sup\{\alpha_k \gamma_k \tau_k \mid k = 1, 2, \dots\} > 0$. Теперь лемма из [10], (1.31) и (1.32) обеспечивают справедливость соотношений

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} V^s(B^k u_k, Bx_k^\alpha) = 0, \quad (1.33)$$

если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k + h_k + \beta_k}{\alpha_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma_k}{\alpha_k \gamma_k \tau_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_X^{-1} \left(a_5 \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_k} \right)}{\alpha_k \gamma_k \tau_k} = 0, \quad (1.34)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \gamma_k \tau_k = +\infty. \quad (1.35)$$

Неравенство (см. [6], с.98)

$$V^s(x, y) \geq \|x - y\|^{s-2} \delta_X(\|x - y\|/a_4), \quad s \geq 2,$$

свойства функции $\delta_X(\xi)$ (см. [6], параграф 1.2) и (1.33) позволяют сделать вывод о том, что $\|B^k u_k - Bx_k^\alpha\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда в силу (1.6), (1.11), (1.22) и (а) имеем сходимость последовательности $\{u_k\}$ к B -нормальному решению обобщенного вариационного неравенства (1.1). Тем самым доказано утверждение.

Т е о р е м а 1.1. . Пусть X – вещественное равномерно выпуклое банахово пространство со строго выпуклым сопряженным, и выполнены предположения (а) – (з), (1.19), (1.22), (1.34), (1.35). Тогда последовательность $\{u_k\}$, однозначно определяемая из (1.20) (или из (1.21)), сильно сходится при $k \rightarrow \infty$ к B -нормальному решению обобщенного вариационного неравенства (1.1).

З а м е ч а н и е 1.2. . Существование функции $g_X(\xi)$, удовлетворяющей (1.29), для известных пространств отмечалось в [3].

З а м е ч а н и е 1.3. . Возможные обобщения теоремы 1.1. указаны в [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siddiqi A.H., Ansari Q.H. General strongly nonlinear variational inequalities// J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 166. No 2. P. 386-392.
2. Коннов И.П. Комбинированный релаксационный метод для обобщенных вариационных неравенств// Известия вузов. Математика. 2001. No 12. С. 46-54.
3. Рязанцева И.П. Регуляризованные методы первого порядка для монотонных вариационных неравенств с оператором обобщенного проектирования// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. No 11. С. 1954-1962.
4. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. – 416с.
5. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. – 410р.
6. Рязанцева И.П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород: НГТУ, 2008. – 272с.
7. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. – 336с.
8. Рязанцева И.П. Устойчивые методы решения нелинейных монотонных некорректных задач. Дис...д.ф.-м.н. Новосибирск: НГУ, 1996. – 344с.
9. Рязанцева И.П. Операторные методы регуляризации обобщенных вариационных неравенств// Труды Средневолжского математического общества. 2009. Т. 11. No 1. С. 52-64.
10. Апарчин А.С. К построению итерационных процессов в гильбертовом пространстве// Труды по прикладной матем. и кибернетике. Иркутск, 1972. С. 7-14.

Дата поступления 07.05.2010

Iterative regularized method of first-order for general variational inequalities

© I. P. Ryazantseva²

Abstract. Iterative first-order regularized method for general variational inequalities with some class operators by perturbation data is investigated.

Key Words: general variational inequality, iteration, regularization, operator.

REFERENCES

1. Siddiqi A.H., Ansari Q.H. General strongly nonlinear variational inequalities// J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 166. No 2. P. 386-392.
2. Konnov I.P. Combinatorial relaxly method for general variational inequations// Izvestiya vuzov. Matematika. 2001. No 12. P. 46-54.
3. Ryazantseva I.P. Regularized first-order methods for monotone variational inequalities with generalized projection operator// Zhurnal vichislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2005. V. 45. No 11. P. 1954-1962.
4. Vainberg M.M. Variational method and method of monotone operators in theory of nonlinear equations. M.: Nauka, 1972. – 416p.
5. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. – 410p.
6. Ryazantseva I.P. Electly chapters of theory monotone type operators. Nizhnii Novgorod: NGTU, 2008. – 272p.
7. Gajewski Kh., Greger K., Zacharias K. Nonlinear operator equations and operator differentital equations. M.: Mir, 1978. – 336p.
8. Ryazantseva I.P. Stable methods of the solutions of nonlinear ill-posed problems, D. Sc. Thesis, Novosibirsk, 1996. – 344p.
9. Ryazantseva I.P. Operator regularized methods for general variational inequalities// Trudi Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva. 2009. V. 11. No 1. P. 52-64.
10. Aparzin A.S. To construction of iterative processes in Hilbert space// Trudi po prikladnoi mathem. i kibernetike. Irkutsk, 1972. P. 7-14.

²Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhnii Novgorod; ryazantseva@waise.nntu.sci-nnov.ru

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.9

Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций

© С. Н. Алексеенко¹, С. Н. Нагорных²

Аннотация. В рамках теории упругости выведено новое уравнение, описывающее динамику плотности дислокаций. Изложена принципиальная схема применения к этому уравнению метода дополнительного аргумента

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, метод дополнительного аргумента

В работе [1] изложена теория упругого кручения стержней на основе уравнения Пуассона для функции кручения на плоскости. Эта теория послужила основой исследований по механике разрушений в фундаментальной работе [2]. В ней для моделирования процессов разрушения используется линейное псевдодифференциальное уравнение, второй порядок которого соответствует задаче для кручения стержней. Однако, в неупругом случае суперпозиция сдвиговых и нормальных напряжений нарушается и уравнение второго порядка становится нелинейным.

Целями настоящей работы являются: изучение процессов скольжения и переползания дислокаций при квазилинейном циклическом кручении; вывод нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка динамики плотности дислокаций; исследование условий разрешимости полученного уравнения; вычисление моментов и жесткости стержней.

Согласно [1] полная дисторсия среды W_{ik} со скользящими и переползающими дислокациями, точечными дефектами, порами, трещинами и т.д. может быть представлена как сумма упругой дисторсии ω_{ik} и пластической дисторсии $\widetilde{\omega}_{ik}$:

$$W_{ik} = \omega_{ik} + \widetilde{\omega}_{ik}. \quad (0.1)$$

Поток дислокаций j_{ik} определяется так:

$$-j_{ik} = \frac{\partial \widetilde{\omega}_{ik}}{\partial t}. \quad (0.2)$$

Пластическая деформация \widetilde{u}_{ik} имеет вид:

$$\frac{\delta \widetilde{u}_{ik}}{\delta t} = -\frac{1}{2}(j_{ik} + j_{ki}). \quad (0.3)$$

Кинетика скольжения плотности дислокаций ν_{lm} задаётся выражением:

$$j_{ik} = e_{ilm}\nu_{lk} V_m, \quad (0.4)$$

¹Профессор кафедры математического анализа, Нижегородский педуниверситет, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

²Доцент кафедры теоретической физики, Нижегородский педуниверситет, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

где V_m - скорость скольжения дислокаций.

Отсюда вытекает

$$\widetilde{\omega_{ik}} = -e_{ilm}\nu_{lk}L_m. \quad (0.5)$$

где L_m - длина пути скольжения дислокации, т.е. $V_m = \frac{dL_m}{dt}$.

Умножим (0.1) на σ_{ik} - напряжение в среде, тогда при кручении цилиндра упругую энергию на единицу длины и площади стержня представим в виде:

$$\sigma_{ik}\omega_{ik} = 2\mu\tau^2(\nabla\nu_{lk})^2, \quad (0.6)$$

где μ - модуль сдвига, $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$, φ - угол поворота стержня длиной dz , $l \neq k$.

В результате получим для произвольной среды с полной деформацией ε_{ik} :

$$\varepsilon_{ik} = e_{ilm}\nu_{lk}L_m + \frac{2\mu\tau^2}{\sigma_{ik}}(\nabla\nu_{lk})^2. \quad (0.7)$$

Обозначим плотность переползающих дислокаций $\nu_{lk} = \nu_H$ при $l \neq k$ во втором члене в правой части формулы (0.7), а в первом члене плотность скользящих дислокаций обозначим $\nu_{lk} = \nu_\delta, l = k, l \neq k$.

Воспользуемся моделью кинетики из [3]:

$$\dot{\nu}_H = \beta\nu_H\nu_\delta - a(\nu_H)\nu_H, \quad (0.8)$$

где β - удельная доля превращения скользящих дислокаций в переползающие, $a(\nu_H)$ - сток в среде (например, на поры).

В итоге приходим к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot{v} + \alpha v(\nabla v)^2 + f(v) = 0, \quad (0.9)$$

где $v := \nu_H(t, x_1, x_2)$, $\alpha := \frac{2\mu\tau^2\beta}{\sigma L}$, $f(v) := (a(v) - \frac{\varepsilon\beta}{L})v$, с начальным условием

$$v(0, x_1, x_2) = \psi_3(x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 \leq R^2. \quad (0.10)$$

В стационарном случае из (0.9) следует

$$\alpha(\nabla v)^2 = \frac{\varepsilon\beta}{L} - a(v). \quad (0.11)$$

Известно, что энергия кручения единицы длины стержня есть интеграл по площади от (0.6) равный $\tilde{c}\tau^2/2$, где \tilde{c} - жесткость. Тем самым

$$\tilde{c} = 4\mu \int (\nabla v)^2 dS. \quad (0.12)$$

В приближении модели [3] при $cv \ll 1$

$$a(v) = a_\mu(1 - cv), \quad (0.13)$$

где a_μ, c - постоянные числа.

Тогда \tilde{c} - для квазиупругой среды будет равна:

$$\tilde{c} = \frac{\pi R^4}{2}\mu \left[1 - \frac{a_\mu L}{\tau R \beta} \left(1 - \frac{c b}{\pi R^2} \right) \right], \quad (0.14)$$

где b - вектор Бюргерса, являющийся функцией от t, x_1, x_2 ; R - радиус стержня.

Квазилинейный момент M для стержня длиной l имеет вид $M = \tilde{c}\tau l$.

В сравнении с [1] M ослаблен за счет стока на поры, но усилен истоком из пор переползающих дислокаций v , с вектором Бюргерса b , динамику которых и распределение в сечении дают решения дифференциального уравнения (0.9). При моменте кручения превышающем критический момент наступает разрушение.

Таким образом, уравнение (0.9) имеет, во-первых, фундаментальный характер, как уравнение динамики плотности дислокаций v , учитывающее различные механизмы стоков и истоков (т.е. видов нелинейностей) в механике разрушения твёрдых тел; а во вторых, прикладное значение, так как с его помощью становится возможным нахождение M в различных конструктивных элементах с различными упрочняющими механизмами.

Существуют различные методы исследования и нахождения численных решений для уравнений в частных производных первого порядка. Отличительной особенностью метода дополнительного аргумента [4, 5, 6] является то, что он даёт возможность анализировать условия существования решений и строить численные решения в исходных координатах.

Опишем принципиальную схему исследования задачи (0.9) - (0.10) с помощью этого метода. Вначале преобразуем уравнение (0.9) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (0.9) по x_1 и x_2 и введя новые неизвестные функции $p_1(t, x_1, x_2) = \frac{\partial v(t, x_1, x_2)}{\partial x_1}$, $p_2(t, x_1, x_2) = \frac{\partial v(t, x_1, x_2)}{\partial x_2}$, придём к системе уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + 2\alpha v \left(p_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \right) = F_i(t, p_1, p_2, v), \quad (i = 1, 2), \quad (0.15)$$

где $F_i(t, p_1, p_2, v) = -\alpha p_i(p_1^2 + p_2^2) - (a(v) - \gamma)p_i - a'(v)v p_i$.

Из (0.9) "сконструируем" ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\alpha v \left(p_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) = F_3(t, p_1, p_2, v), \quad (i = 1, 2), \quad (0.16)$$

где $F_3(t, p_1, p_2, v) = -(a(v) - \gamma)v + \alpha v(p_1^2 + p_2^2)$. Из (0.10) естественным образом следуют начальные условия для p_1 и p_2 :

$$p_i(0, x_1, x_2) = \psi_i(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2), \quad (0.17)$$

где $\psi_i(x_1, x_2) = \frac{\partial \psi_3(x_1, x_2)}{\partial x_i}$.

Ввиду того, что множество значений независимых переменных x_1 и x_2 , на котором заданы начальные данные, ограничено: $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$, то, среди прочих, стоит и задача определения области существования решения, а, главное, выяснения соответствия между решениями задачи и физической моделью. В рамках данной работы примем упрощающее предположение, что функция $\psi_3(x_1, x_2)$, а значит и функции $\psi_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, определены не только при $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$, но и в некоторой окрестности круга $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$, достаточной для корректности нижеследующих выкладок.

Составим для задачи (0.15), (0.16), (0.17), (0.10) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1(s, t, x_1, x_2)}{ds} &= 2\alpha w_3(s, t, x_1, x_2)w_1(s, t, x_1, x_2), & \eta_1(t, t, x_1, x_2) &= x_1, \\ \frac{d\eta_2(s, t, x_1, x_2)}{ds} &= 2\alpha w_3(s, t, x_1, x_2)w_2(s, t, x_1, x_2), & \eta_2(t, t, x_1, x_2) &= x_2, \\ \frac{dw_i(s, t, x_1, x_2)}{ds} &= F_i(s, w_1, w_2, w_3), \quad (i = 1, 2, 3), & & (0.18) \end{aligned}$$

$$w_i(0, t, x_1, x_2) = \psi_i(\eta_1(0, t, x_1, x_2), \eta_2(0, t, x_1, x_2)), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (0.19)$$

Так как в правую часть (0.18) функции η_i , $i = 1, 2$, явным образом не входят, то мы приходим к системе трех интегральных уравнений от трех неизвестных функций:

$$\begin{aligned} w_i(s, t, x_1, x_2) &= \psi_i(x_1 - 2\alpha \int_0^t w_3(\tau, t, x_1, x_2) w_1(\tau, t, x_1, x_2) d\tau, \\ &\quad x_2 - 2\alpha \int_0^t w_3(\tau, t, x_1, x_2) w_2(\tau, t, x_1, x_2) d\tau) + \\ &+ \int_0^s F_i(\tau, w_1(\tau, t, x_1, x_2), w_2(\tau, t, x_1, x_2), w_3(\tau, t, x_1, x_2)) d\tau, \end{aligned} \quad (0.20)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Существует и может быть определена из исходных данных такая величина T_0 , что при $0 < t \leq T_0$ система интегральных уравнений (0.20) имеет непрерывно дифференцируемое решение. Функции $p_i(t, x_1, x_2) = w_i(t, t, x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, $v(t, x_1, x_2) = w_3(t, t, x_1, x_2)$ дают решение задачи (0.15), (0.16), (0.17), (0.10), а функция $v(t, x_1, x_2)$ будет решением задачи (0.9), (0.10).

В зависимости от конкретных свойств функций и величин, входящих в физическую модель, можно указать условия, когда задача (0.9), (0.10) будет иметь решение на заданном отрезке времени $[0, T]$, или когда решение может обратиться в бесконечность. Вместе с тем, система интегральных уравнений (0.20) может быть использована для нахождения численного решения задачи (0.9), (0.10) в исходных координатах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.Наука.1987,с.245.
2. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.Наука.1989,с.224.
3. Крупкин П.Л., Куроев И.Е., Нагорных С.Н., Цыванюк К.И. Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении. ФММ, 1988, т.66, в.5, с.978-984.
4. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема. Доклады Академии наук, 1992, т.323, №3. -5с.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Доклады РАН, 2001, т.379, №1. - 5 с.
6. Алексеенко С.Н., Нагорных С.Н. Математическое моделирование волн в слабодиссипативных структурах стимулированной диффузии. Материалы IV Всероссийской научно-методич.конф.14-16 мая 2009 г."Проблемы современного математич. образования в вузах и школах России". -Киров: Изд-во ВятГГУ, 2009. -С.55.

Дата поступления 02.05.2010

The first-order nonlinear partial differential equation of the dislocation density

© S. N. Alekseenko³, S. N. Nagornyh⁴

Abstract. Within the framework of the theory of elasticity, the new equation governing a dynamics of the dislocation density is obtained. A basic scheme to apply the method of additional argument for solving this equation is presented.

Key Words: dislocation density, nonlinear first-order equation, local reducibility, method of additional argument.

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of elasticity. – M.: Nauka, 1987. – 245 p.
2. Goldshtein R.V., Entov V.M. Qualitative methods in the mechanics of continua.-M.: Nauka, 1989. 224 p.
3. Krupkin P.L., Kurov I.E., Nagornyh S.N., Tcyvanuk K.I. Phenomenological model of evolution of dislocation structures at a cyclical torsion. // FMM. – 1988. – Vol. 66, issue 5. – P. 978-984.
4. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. On the theory of nonlinear integro-partial differential equations of Whitham type. // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. Vol.323 (1992), № 3.
5. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. To a problem of an existence of a smooth bounded solution for a system of two nonlinear differential partial equations of the first order. //Russian Acad. Sci. Dokl. Math. Vol.378 (2001), № 1.
6. Alekseenko S.N., Nagornyh S.N. Mathematical modeling of waves in weakly-dissipative structures of the stimulated diffusion. // Materials of the IV All-Russia scientific-methodical conference, on May, 14 - 16, 2009 - "Problems of the modern mathematical education in universities and schools of Russia "- Kirov: VyatGGU, 2009, P. 55.

³The professor of the mathematical analysis chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

⁴The senior lecture of the theoretical physics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

УДК 517.927

Построение функции Грина для модельных граничных задач со смещением

© Т. Е. Бадокина¹, О. В. Макеева², Д. Э. Рахматуллова³

Аннотация. Для простейших задач Штурма-Лиувилля с одним и двумя смещениями стандартными методами [1] выполнено построение функции Грина. Тем самым доказана фредгольмовость этих задач.

Ключевые слова: задачи Штурма-Лиувилля, смещение в граничных условиях, функция Грина.

1. Введение

В известных работах А.В. Бицадзе, А.А. Самарского [2] и В.А. Ильина, Е.И. Моисеева [3], [4] исследованы математические модели, которые возникают при изучении ряда прикладных проблем, приводящих к рассмотрению нелокальных граничных задач для дифференциальных уравнений. Рассмотренные ниже модельные задачи с одним и двумя смещениями послужили [5], [6] примером иллюстрации метода ложных возмущений для уточнения приближенно заданных спектральных характеристик обыкновенных дифференциальных операторов. При этом существенно использовалась, но не доказывалась фредгольмовость задач. Применением результатов монографии [1] это выполнено в настоящей работе.

Полученные результаты поддержаны программой развития научного потенциала высшей школы, проект 2.1.1/6194 Министерства образования и науки РФ.

2. Одномерная задача Бицадзе-Самарского

В банаевом пространстве $C^2[(0, x_0) \cup (x_0, 1)] \cap C^1[0, 1]$ рассматривается задача Штурма-Лиувилля

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(x_0) = u(1). \quad (2.1)$$

Функцией Грина задачи (2.1) называется функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая условиям:

1. $G(x, \xi)$ непрерывна для всех значений x и ξ из интервала $[0, 1]$.
2. При любом фиксированном $\xi \in [0, 1]$ $G(x, \xi)$ имеет по x непрерывные производные 1-го и 2-го порядка при $x \in [0, \xi] \cup (\xi, 1]$ и $G'_x(\xi + 0, \xi) - G'_x(\xi - 0, \xi) = 1$, и, как функция от x , удовлетворяет уравнению и граничным условиям (2.1).

Указанные условия используются ниже при построении функции Грина.

¹Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; bad_zip@mail.ru

²Доцент кафедры математического анализа, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, г. Ульяновск; omakeeva@hotbox.ru

³Студент физико-математического факультета, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, г. Ульяновск.

Пусть $\nu^2 = \lambda$ и $y_1 = \cos(\nu x)$, $y_2 = \sin(\nu x)$ линейно независимые решения уравнения (2.1). Тогда для $\xi \in [0, x_0]$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), & 0 \leq x < \xi, \\ d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x), & \xi < x < x_0, \\ c_3 y_1(x) + c_4 y_2(x), & x_0 < x \leq 1 \end{cases}$$

и система для определения коэффициентов $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$, $d_1(\xi)$, $d_2(\xi)$, $c_3(\xi)$, $c_4(\xi)$ принимает вид

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ d_1 \cdot \cos(\nu x_0) + d_2 \cdot \sin(\nu x_0) - c_3 \cdot \cos(\nu x_0) - c_4 \cdot \sin(\nu x_0) = 0, \\ -d_1 \cdot \nu \sin(\nu x_0) + d_2 \cdot \nu \cos(\nu x_0) + c_3 \cdot \nu \sin(\nu x_0) - c_4 \cdot \nu \cos(\nu x_0) = 0, \\ c_3 \cdot (\cos(\nu x_0) - \cos \nu) + c_4 \cdot (\sin(\nu x_0) - \sin \nu) = 0, \\ c_1 \cdot \cos(\nu \xi) + c_2 \cdot \sin(\nu \xi) - c_3 \cdot \cos(\nu \xi) + c_4 \cdot \sin(\nu \xi) = 0, \\ c_1 \cdot \nu \sin(\nu \xi) - c_2 \cdot \nu \cos(\nu \xi) - d_1 \cdot \nu \sin(\nu \xi) + d_2 \cdot \nu \cos(\nu \xi) = 1. \end{cases}$$

Откуда вместе с коэффициентами $c_1 = 0$, $d_1 = c_3 = -\frac{\sin(\nu \xi)}{\nu}$, $c_2 = -\frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_0-2\xi+1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_0+1}{2})}$,

$d_2 = c_4 = -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \xi) \sin(\nu \frac{x_0+1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_0+1}{2})}$ определяется функция Грина.

Если $\xi \in (x_0, 1]$, то

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), & 0 \leq x < x_0, \\ c_3 y_1(x) + c_4 y_2(x), & x_0 < x < \xi, \\ d_3 y_1(x) + d_4 y_2(x), & \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

и $c_1 = c_3 = 0$, $d_3 = -\frac{\sin(\nu \xi)}{\nu}$, $c_2 = c_4 = -\frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu(\xi-1))}{\sin(\nu \frac{x_0-1}{2}) \cos(\nu \frac{x_0+1}{2})}$, $d_4 = -\frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu \xi) \cos \nu - \sin(\nu x_0) \cos \nu \xi}{\sin(\nu \frac{x_0-1}{2}) \cos(\nu \frac{x_0+1}{2})}$.

3. Модельные задачи с двумя смещениями

В работах [3], [4] для уравнения Штурма-Лиувилля 2-го порядка рассмотрены спектральные задачи с условиями смещения первого рода $u(0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j u(x_{1j})$, $u(1) = \sum_{j=1}^n \beta_j u(x_{2j})$ или второго рода $u'(0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j u'(x_{1j})$, $u'(1) = \sum_{j=1}^n \beta_j u'(x_{2j})$. Числа α_j , β_j либо неположительные, либо неотрицательные и $-\infty < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq 1$. Множества точек $\{x_{1j}\}$, $\{x_{2j}\}$, где $0 < x_{11} < x_{12} < \dots < x_{1n} < 1$ и $0 < x_{21} < x_{22} < \dots < x_{2n} < 1$ могут находиться между собой в любых соотношениях.

В пространстве $C^2[(0, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, 1)] \cap C^1[0, 1]$, $0 < x_1 < x_2 < 1$ здесь рассматриваются частные случаи этих задач: $\mathbf{A}_{11} u(0) = u(x_1)$, $u(x_2) = u(1)$; $\mathbf{A}_{12} u(0) = u(x_1)$, $u'(x_2) = u'(1)$; $\mathbf{A}_{21} u'(0) = u'(x_1)$, $u(x_2) = u(1)$; $\mathbf{A}_{22} u'(0) = u'(x_1)$, $u'(x_2) = u'(1)$.

Используя приведенное выше определение функции Грина и предложенную в [1] схему ее построения в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), & 0 \leq x < \xi, \\ d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x), & \xi < x < x_1, \\ c_3 y_1(x) + c_4 y_2(x), & x_1 < x < x_2, \\ c_5 y_1(x) + c_6 y_2(x), & x_2 < x \leq 1 \end{cases}$$

получаем следующие результаты.

Задача A₁₁.

Для $\xi \in [0, x_1]$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu\xi) \cos(\nu \frac{x_2-2x_1+1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}, \\ c_2 &= \frac{-1}{2\nu} \frac{\cos(\nu\xi) \cos(\nu \frac{x_2-2x_1+1}{2}) - \cos(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}, \end{aligned}$$

Для $\xi \in (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} c_1 = c_3 &= \frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_1}{2}) \cos(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \\ c_2 = c_4 &= \frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_1}{2}) \cos(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \end{aligned}$$

Для $\xi \in (x_2, 1]$

$$\begin{aligned} c_1 = c_3 = c_5 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu(\xi-1)) \cos(\nu \frac{x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2-1}{2})}, \\ c_2 = c_4 = c_6 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu(\xi-1)) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2-1}{2})}, \end{aligned}$$

Задача A₁₂.

Для $\xi \in [0, x_1)$

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu\xi) \sin(\nu \frac{x_2-2x_1+1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}, \\ c_2 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\cos(\nu\xi) \sin(\nu \frac{x_2-2x_1+1}{2}) - \sin(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}, \end{aligned}$$

Для $\xi \in (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} c_1 = c_3 &= -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2}) \cos(\nu \frac{x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \\ c_2 = c_4 &= -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \end{aligned}$$

Для $\xi \in (x_2, 1]$

$$\begin{aligned} c_1 = c_3 = c_5 &= -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2}) \cos(\nu \frac{x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \\ c_2 = c_4 = c_6 &= -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2-2\xi+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 = c_3 = c_5 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu\xi) \cos(\nu \frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}, \\ d_2 = c_4 = c_6 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu\xi) \sin(\nu \frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 = c_5 &= \frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_2+1}{2}) \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \\ d_4 = c_6 &= \frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2+1}{2}) \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_5 &= \frac{-1}{2\nu} \frac{\sin \nu \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2}) - \sin(\nu\xi) \cos(\nu \frac{2x_2-x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2-1}{2})}, \\ d_6 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\cos \nu \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2}) - \cos(\nu\xi) \cos(\nu \frac{2x_2-x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2-1}{2})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 = c_3 = c_5 &= -\frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu\xi) \sin(\nu \frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}, \\ d_2 = c_4 = c_6 &= \frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu\xi) \cos(\nu \frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 = c_5 &= -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2+1}{2}) \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \\ d_4 = c_6 &= \frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_2+1}{2}) \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_5 &= -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2+1}{2}) \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}, \\ d_6 &= \frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_2+1}{2}) \cos(\nu \frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2-x_1+1}{2})}. \end{aligned}$$

Задача **A₂₁**.

Для $\xi \in [0, x_1)$

$$c_1 = \frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_1}{2}) \cos(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

$$c_2 = -\frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_1}{2}) \cos(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

Для $\xi \in (x_1, x_2)$

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_1}{2}) \cos(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = -\frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_1}{2}) \cos(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

Для $\xi \in (x_2, 1]$

$$c_1 = c_3 = c_5 = \frac{1}{2\nu} \frac{\sin(\nu(\xi - 1)) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2 - 1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = c_6 = \frac{-1}{2\nu} \frac{\sin(\nu(\xi - 1)) \cos(\nu \frac{x_1}{2})}{\cos(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2 - 1}{2})},$$

Задача **A₂₂**.

Для $\xi \in [0, x_1)$

$$c_1 = \frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

$$c_2 = -\frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

Для $\xi \in (x_1, x_2)$

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = -\frac{1}{\nu} \frac{\cos(\nu \frac{x_1}{2}) \sin(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

Для $\xi \in (x_2, 1]$

$$c_1 = c_3 = c_5 = \frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2}) \sin(\nu \frac{x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = c_6 = -\frac{1}{\nu} \frac{\sin(\nu \frac{x_2 - 2\xi + 1}{2}) \cos(\nu \frac{x_1}{2})}{\sin(\nu \frac{x_2 - x_1 + 1}{2})},$$

Для более сложных задач Штурма-Лиувилля с одним или несколькими смещениями функция Грина остается прежней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

2. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739-740.
3. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальные краевые задачи первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1198-1207.
4. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальные краевые задачи второго рода для оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 8. – С. 1422-1431.
5. Логинов Б. В., Макеева О. В. Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения // Доклады РАН. – 2008. – Т. 419, № 2. – С. 160-163.
6. Loginov B. V., Makeeva O. V. Pseudoperturbation methods in generalized eigenvalue problems // ROMAI J. – 2008. – V. 4, № 1. – P. 149-168.

Дата поступления 26.05.2010

Green functions construction for model boundary value problems with displacements

© T. E. Badokina⁴, O. V. Makeeva⁵, D. E. Rakhmatullova⁶

Abstract. For the simplest Sturm-Liouville problem with one or two displacements by standard methods [1] Green functions are constructed. By this the Fredholm property for these problems is proved.

Key Words: Sturm-Liouville problem; displacements in boundary conditions; Green functions.

REFERENCES

1. Naymark M. A. Linear differential operators. – M.: Nauka, 1969. – 528 p.
2. Bitsadze A. V., Samarskii A. A. On some simplest generalizations of linear elliptic boundary value problems // SSSR Doklady. – Mathematics. – 1969. – B. 185, № 4. – P. 739-740.
3. Il'in V. A., Moiseev E. I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for Sturm-Liouville operator in differential and difference treatments // Differentsial'nye Uravneniya. – 1987. – B. 23, № 7. – P. 1198-1207.
4. Il'in V. A., Moiseev E. I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for Sturm-Liouville operator // Differentsial'nye Uravneniya. – 1987. T. 23, № 8. – P. 1422-1431.
5. Loginov B. V., Makeeva O. V. The Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 7, № 2. – P. 194-197.
6. Loginov B. V., Makeeva O. V. Pseudoperturbation methods in generalized eigenvalue problems // ROMAI J. – 2008. – V. 4, № 1. – P. 149-168.

⁴PhD Student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; bad_zip@mail.ru

⁵Associate professor of Mathematics Analyze Chair, Ulyanovsk State Pedagogical University after I. N. Ulyanova, Ulyanovsk; omakeeva@hotbox.ru

⁶Student Phys.-Math. Faculty, Ulyanovsk State Pedagogical University after I. N. Ulyanova, Ulyanovsk.

УДК 517.9

Численное решение краевой задачи для линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка

© М. В. Булатов¹, Н. П. Рахвалов², Та Duy Phuong³

Аннотация. В работе рассмотрены численные методы решения краевой задачи для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка. Выделены условия, при выполнении которых предложенные алгоритмы являются устойчивыми и сходятся к точному решению. Приведены результаты численных расчетов

Ключевые слова: линейные дифференциально - алгебраические системы, матричный полином, краевая задача, метод матричной прогонки.

1. Введение

В данной работе рассмотрены численные методы решения краевой задачи для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка. Выделены условия, при выполнении которых предложенные алгоритмы являются устойчивыми и сходятся к точному решению.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_N, \quad (2.2)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ – заданная вектор функция, $x(t)$ – искомая вектор функция и $\det(A) \equiv 0$. В этом случае систему (2.1) принято называть дифференциально-алгебраическим уравнением (ДАУ) второго порядка.

Краевые условия будем считать согласованными и будем полагать, что на отрезке интегрирования решение задачи (2.1), (2.2) существует и единственno. В данной работе рассмотрена задача, у которой матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$, где λ и μ – скалярные параметры, удовлетворяет условиям:

$$\text{rank } A(t) = k = \text{const} \text{ для любого } t \in [0, 1]; \quad (2.3)$$

$$\text{rank}(A(t)|B(t)) = k + l = \text{const} \text{ для любого } t \in [0, 1]; \quad (2.4)$$

¹Главный научный сотрудник, ИДСТУ СО РАН, г. Иркутск; mvbul@icc.ru.

²Ассистент кафедры Информатики и МОИ, ГОУ ВПО ВСГАО, г. Иркутск; nikolar@mail.ru

³Старший научный сотрудник ИМ ВАНТ, г. Ханой; Вьетнам; tdphuong@math.ac.vn

$$\det(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)) = a_0(t)\lambda^k\nu^l + \dots \text{ причем } a_0(t) \neq 0 \text{ для любого } t \in [0, 1]. \quad (2.5)$$

Известно [1], что для таких матричных полиномов существуют невырожденные для любого $t \in [0, 1]$ матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ такие что, умножая слева (2.1) на матрицу $P(t)$ и заменяя переменную $x(t) = Q(t)y(t)$, исходная система может быть приведена к виду $PA(Qy)'' + PB(Qy)' + PCQy = (PAQ)y'' + (2PAQ' + PBQ)y' + (PAQ'' + PBQ' + PCQ)y = Pf(t)$, с матрицами

$$\begin{aligned} PAQ &= \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ 2PAQ' + PBQ &= \begin{pmatrix} J_1(t) & 0 & J_2(t) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ PAQ'' + PBQ' + PCQ &= \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) & 0 \\ C_3(t) & C_4(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где E_k, E_l и E_{n-k-l} единичные матрицы размерности k, l и $n - k - l$ соответственно, J_1, J_2 и $C_i, i = 1, \dots, 4$ матричные блоки соответствующих размеров.

Таким образом, исходную систему (2.1) путем неособенных преобразований привели к виду

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} J_1(t) & 0 & J_2(t) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) & 0 \\ C_3(t) & C_4(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix} y = F(t) \quad (2.6)$$

Опишем численный метод решения задачи (2.1), (2.2) для которой выполнены условия (2.3), (2.4), (2.5).

На отрезке $[0, 1]$ введем сетку $t_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = 1/N$, и применим для численного решения задачи (2.1), (2.2) разностную схему вида

$$\bar{A}_i \Delta_1 x_{i+1} + h \bar{B}_i \Delta_2 x_{i+1} + h^2 \bar{C}_i \Delta_3 x_{i+1} = \bar{f}_i(t), \quad i = 0, \dots, N, \quad x_0 = x(0), \quad x_N = x(1), \quad (2.7)$$

где $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i$ - значения матриц $A(t), B(t), C(t)$ вычисленные в точке $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$, а разностные операторы $\Delta_1 g_{i+1}, \Delta_2 g_{i+1}, \Delta_3 g_{i+1}$ на вектор функцию g_{i+1} определены по правилам:

$$\Delta_1 g_{i+1} = g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1},$$

$$\Delta_2 g_{i+1} = \rho_0 g_{i+1} + \rho_1 g_i + \rho_2 g_{i-1}, \quad (2.8)$$

$$\Delta_3 g_{i+1} = \sigma_0 g_{i+1} + \sigma_1 g_i + \sigma_2 g_{i-1}.$$

Конкретный выбор точки \bar{t}_i и коэффициентов $\rho_j, \sigma_j, j = 0, 1, 2$ будет указан ниже. Такая аппроксимация приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) блочно-трехдиагонального вида

$$R_i x_{i-1} + L_i x_i + M_i x_{i+1} = F_i, \quad x_0 = x(0), \quad x_N = x(1), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.9)$$

с матрицами

$$R_i = \bar{A}_i + \rho_2 h \bar{B}_i + \sigma_2 h^2 \bar{C}_i, \quad (2.10)$$

$$L_i = -2\bar{A}_i + \rho_1 h \bar{B}_i + \sigma_1 h^2 \bar{C}_i, \quad (2.11)$$

$$M_i = \bar{A}_i + \rho_0 h \bar{B}_i + \sigma_0 h^2 \bar{C}_i, \quad (2.12)$$

$$F_i = h^2 \bar{f}_i. \quad (2.13)$$

Если матрицы L_i являются невырожденными, то СЛАУ (2.6) может быть решена методом матричной прогонки [2], описание которого приведено ниже.

Решение системы (2.6) ищется в виде

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2,, \quad (2.14)$$

где матрицы α_{i+1} и вектора β_{i+1} определены по правилу

$$\alpha_{i+1} = -(R_i \alpha_i + L_i)^{-1} M_i, \quad \beta_{i+1} = -(R_i \alpha_i + L_i)^{-1} (F_i - R_i \beta_i), \quad i = 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = x_0.$$

Обычно для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений применяют аппроксимацию в точке t_i . В этом случае разностные операторы $\Delta_2 g_{i+1}$, $\Delta_3 g_{i+1}$ определены следующим образом:

$$\Delta_2 g_{i+1} = \frac{1}{2}(g_{i+1} - g_{i-1}),$$

$$\Delta_3 g_{i+1} = g_i.$$

Матрицы L_i из формулы (2.11) имеют вид $L_i = -2A(t_i) + h^2 C(t_i)$. Эти матрицы будут невырождены только в случае регулярности матричного пучка $\lambda A_i + C_i$, что значительно сужает класс рассматриваемых задач. Мы предлагаем применить другую аппроксимацию задачи, которая сохраняет второй порядок аппроксимации и охватывает более широкий класс задач, а именно будем аппроксимировать задачу (2.1), (2.2) в точках $\bar{t}_i = t_{i-1}$ или $\bar{t}_i = t_{i+1}$.

Приведем аппроксимацию в точке t_{i-1} . Условиями аппроксимации второго порядка будут (см., напр., [3].)

$$\begin{cases} \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = 0, \\ \rho_0 - \rho_2 - 1 = 0, \\ \rho_2 + \rho_0 + 2 = 0, \\ \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 1, \\ \sigma_0 - \sigma_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты ρ_j , $j = 0, 1, 2$, определены единственным образом,

$$\rho_0 = -\frac{1}{2}, \quad \rho_1 = 2, \quad \rho_2 = -\frac{3}{2}$$

а коэффициенты σ_j , $j = 0, 1, 2$ удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_1 \geq 1.$$

При такой аппроксимации матрицы R_i , L_i , M_i (см. формулы (2.10), (2.11), (2.12)) имеют вид:

$$R_i = \bar{A}_i - \frac{3}{2}h\bar{B}_i + (1 - \frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \quad (2.16)$$

$$L_i = -2\bar{A}_i + 2h\bar{B}_i + \sigma_1 h^2\bar{C}_i, \quad (2.17)$$

$$M_i = \bar{A}_i - \frac{1}{2}h\bar{B}_i + (-\frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \quad (2.18)$$

где \bar{A}_i , \bar{B}_i , \bar{C}_i – значения матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ вычисленные в точке t_{i-1} , а $F_i = h^2f(t_{i-1})$

Аналогично, аппроксимируя задачу (2.1), (2.2) в точке t_{i+1} , получим следующие разностные коэффициенты

$$\rho_0 = \frac{3}{2}, \quad \rho_1 = -2, \quad \rho_2 = \frac{1}{2},$$

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_1 \geq 1,$$

а матрицы R_i, L_i, M_i имеют вид

$$R_i = \bar{A}_i + \frac{3}{2}h\bar{B}_i + (1 - \frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \quad (2.19)$$

$$L_i = -2\bar{A}_i - 2h\bar{B}_i + \sigma_1 h^2\bar{C}_i, \quad (2.20)$$

$$M_i = \bar{A}_i + \frac{1}{2}h\bar{B}_i + (-\frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \quad (2.21)$$

здесь \bar{A}_i , \bar{B}_i , \bar{C}_i – значения матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ вычисленные в точке t_{i+1} , а $F_i = h^2f(t_{i+1})$.

Таким образом, при выполнении условий (2.3), (2.4), (2.5) матрицы будут невырожденны и формально мы можем применить метод матричной прогонки.

3. Численные эксперименты

Были проведены численные эксперименты на ряде модельных примеров удовлетворяющих условиям (2.3), (2.4), (2.5).

Самый простой пример имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x''(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Как уже отмечалось выше, стандартная аппроксимация в точке t_i

$$\bar{A}_i = A(t_i), \quad \bar{B}_i = B(t_i), \quad \bar{C}_i = C(t_i),$$

$$\Delta_1 g_{i+1} = g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1},$$

$$\Delta_2 g_{i+1} = \frac{1}{2}(g_{i+1} - g_{i-1}),$$

$$\Delta_3 g_{i+1} = g_i,$$

приведет к СЛАУ (2.9) с матрицами R_i, L_i, M_i

$$R_i = \bar{A}_i - \frac{1}{2}h\bar{B}_i,$$

$$L_i = -2\bar{A}_i + h^2\bar{C}_i,$$

$$M_i = \bar{A}_i + \frac{1}{2}h\bar{B}_i.$$

Легко заметить, что матрицы L_i будут тождественно вырождены для данного примера, таким образом метод матричной прогонки принципиально не применим (см. формулы (2.14), (2.15)). Предлагаемые аппроксимации свободны от этого недостатка и методы (2.9), (2.14), (2.15) имеют второй порядок.

Другой пример получен следующим образом. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y''(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t + t^2 \\ t^3 \end{pmatrix},$$

которую умножим на матрицу $P(t)$ и произведем замену переменной $x(t) = Q(t)y(t)$ где

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^t & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(t+1-6e^t)e^{-t} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}(t+1)e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1} & 0 & 0 \\ t^2 & \frac{t}{8} & e^{-t} \\ e^{-2t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

В итоге получим ДАУ вида (2.1) с переменными матрицами $A(t), B(t), C(t)$, причем матрица $C(t)$ не имеет нулевых элементов, а матрица $B(t)$ имеет две полностью заполненные строки. Конкретный вид этих матриц не приводится ввиду их громоздкости. Результаты расчетов полученного примера приведены в таблице.

h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
er_1	0.062738	0.016628	0.004272	0.001082	0.000272
er_2	0.037279	0.010199	0.002691	0.000695	0.000177

Здесь $er_j = \max_i \|y(t_i) - y_i\|$, $j=1, 2$, погрешность методов (2.9), (2.14), (2.15), у которых матрицы R_i, L_i, M_i вычислены в точках t_{i-1} и t_{i+1} , соответственно, а $\|\cdot\|$ -максимум по модулю элементов вектора $y(t_i) - y_i$.

Был проведен ряд численных расчетов, которые показали, что при выполнении условий (2.3), (2.4) и (2.15) для рассматриваемых задач методы (2.16)-(2.18) и (2.19)-(2.21) сходятся к точному решению со вторым порядком. Обоснование метода предполагается провести в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов М. В., Минг Гонг Ли. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка// Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, №10.– С.1299-1305.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
3. Хайрер Э., Ваннер Г., Нёрсетт С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1999. – 512 с.

Дата поступления 12.04.2010

Numerical solution boundary problem for linear differential-algebraic equations of second order

© M. V. Bulatov⁴, N. P. Rahvalov⁵, Ta Duy Phuong⁶

Abstract. In this paper the numerical methods of solution of boundary-value problem for differential-algebraic equations of the second order are considered. We found conditions fulfillment of which ensures stability and convergence to exact solution of proposed algorithms. The results of numerical calculations are given.

Key Words: linear differential-algebraic systems, matrix polynomial, boundary-value problem, matrix sweep method.

REFERENCES

1. Bulatov M. V., Ming-Gong Lee. Application of Matrix Polynomials to the Analysis of Linear Differential-Algebraic Equations of the Higher Order – Differential Equations. – 2008. – Vol. 44, – №10.–P. 1353-1360.
2. Samarskiy A.M. Introduction in the Theory of Difference Schemes. M:Nauka, 1977. –552 p.
3. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equation I. Nonstiff Problems.– Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, – 1987. – 512 p.

⁴Chif researcher, ISDCT SB RAS, Irkutsk; mybul@icc.ru.

⁵Ph.D. student Irkutsk State Pedagogical Academy, Irkutsk; nikolar@mail.ru

⁶Assoc. Prof. Institute of Mathematics, VAST, Hanoi, Vietnam; tdphuong@math.vn

УДК 517.938

Динамика диффеоморфизмов класса SV , сосредоточенная в базовых полноториях

© Е. В. Жужома¹, Н. В. Исаенкова², Л. А. Куприна³

Аннотация. Обобщается конструкция С. Смейла диффеоморфизма полнотория с аттрактором, являющимся одномерным соленоидом.

Ключевые слова: соленоид, диффеоморфизм Смейла-Виеториса, базисные множества.

Первые примеры соленоидов были построены Виеторисом [12] в 1927 году и независимо Ван Данцигом [7] в 1930 году. В теории динамических систем соленоид был использован в книге [4] (гл.4, п.8) для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических траекторий. Специальные потоки с соленоидальными инвариантными множествами рассматривались в [8]. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [11], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1], [2], [5], [10]). В данной статье обобщается конструкция Смейла, и изучаются типы возможных базисных множеств.

Рассмотрим полноторий $S^1 \times D^2$, где $S^1 = [0; 1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, наделенная естественной параметризацией $[0; 1] \rightarrow S^1$, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$ в евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами (x, y) . Сюръективное C^1 отображение $g : S^1 \rightarrow S^1$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$ [9]. Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной Dg . Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$, удовлетворяющий аксиоме А Смейла, замкнутого 3-многообразия M^3 принадлежит классу SV ⁴, если существует вложенный в M^3 полноторий \mathcal{B}^3 (далее мы отождествляем полноторий $S^1 \times D^2$ с его вложением $\mathcal{B}^3 \subset M^3$, *базовым* полноторием) такой, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^3} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^3 \rightarrow F(\mathcal{B}^3) \subset \mathcal{B}^3$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид

$$F(t, z) = (g(t), w(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^2, \quad (1.1)$$

где $g : S^1 \rightarrow S^1$ – неособый C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$;

- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\} \times D^2} : \{t\} \times D^2 \rightarrow \mathcal{B}^3$ является равномерно сжимающим C^1 вложением

$$\{t\} \times D^2 \rightarrow \text{int}(\{g(t)\} \times D^2) \quad (1.2)$$

т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что

$$\text{diam}(F^n(\{t\} \times D^2)) \leq C\lambda^n \text{diam}(\{t\} \times D^2), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

¹Профессор, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

²Аспирант, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru.

³Доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

⁴Аббревиатура SV составлена из первых букв фамилий Smale, Vietoris

Отметим, что так как неособый эндоморфизм g имеет степень $d \geq 2$, то для любой точки $t \in S^1$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_d \in S^1$ попарно различны и $g(t_1) = \dots = g(t_d)$. Тогда

$$F(t_i, D^2) \cap F(t_j, D^2) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (1.4)$$

т.е. диски $F(t_1, D^2), \dots, F(t_d, D^2)$ попарно не пересекаются.

В классическом примере Смейла [11] эндоморфизм g представляет собой линейный растягивающий эндоморфизм $E_d : S^1 \rightarrow S^1$ вида $E_d(x) = dx \bmod 1$ степени $d \geq 2$. В этом случае неблуждающее множество диффеоморфизма $f|_{\mathcal{B}^3} = F$ совпадает с соленоидом $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B}^3)$. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет то, что неблуждающее множество растягивающего эндоморфизма E_d совпадает с окружностью S^1 . В общем случае неблуждающее множество диффеоморфизма F принадлежит соленоиду, но не обязательно совпадает с ним.

В [6] рассматривалась аналогичная конструкция построения диффеоморфизма $(2n+2)$ -мерной сферы S^{2n+2} , отталкиваясь от эндоморфизма n -многообразия K^n . Типы базисных множеств при этом не изучались.

Л е м м а 1.1. *Пересечение $Sol(F) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B})$ является соленоидом.*

Доказательство. Из условия (1.3) для отображения F вытекает, что $F^i(\mathcal{B}) \supset F^{i+1}(\mathcal{B})$ для любого $i \geq 0$. Поэтому $F^i(\mathcal{B})$ образуют последовательно вложенные друг в друга полнотории $\mathcal{B} \supset F(\mathcal{B}) \supset \dots \supset F^i(\mathcal{B}) \supset F^{i+1}(\mathcal{B}) \supset \dots$. Из (1.1) следует, что ось полнотория $F^{i+1}(\mathcal{B})$ обходит $d \geq 2$ раз ось полнотория $F^i(\mathcal{B})$, не образуя крюков. В силу (1.3), пересечение каждого диска $\{t\} \times D^2$ с $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B})$ является нигде не плотным множеством. Из неравенства $d \geq 2$ вытекает, что это пересечение является совершенным и, следовательно, канторовым множеством в $\{t\} \times D^2$. Отсюда следует, что $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B})$ – соленоид. \square

Поскольку соленоид является притягивающим множеством, то неблуждающее множество в базисном полнотории принадлежит соленоиду, и самая интересная динамика сосредоточена в $Sol(f)$. Следующая теорема описывает возможные базисные множества в $Sol(f) \subset \mathcal{B}^3$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ – диффеоморфизм из класса SV замкнутого 3-многообразия M^3 . Тогда*

1. *Ограничение $f|_{Sol(f)}$ сопряжено обратному пределу отображения g .*
2. *Неблуждающее множество, принадлежащее базовому полноторию, содержит ровно одно нетривиальное базисное множество $\Lambda(f)$, которое есть либо*
 - *одномерный растягивающийся аттрактор, и тогда $\Lambda(f) = Sol(f)$, либо*
 - *нульмерное базисное множество, и тогда пересечение $NW(f) \cap \mathcal{B}^3 \subset Sol(f)$ состоит из $\Lambda(f)$, конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.*

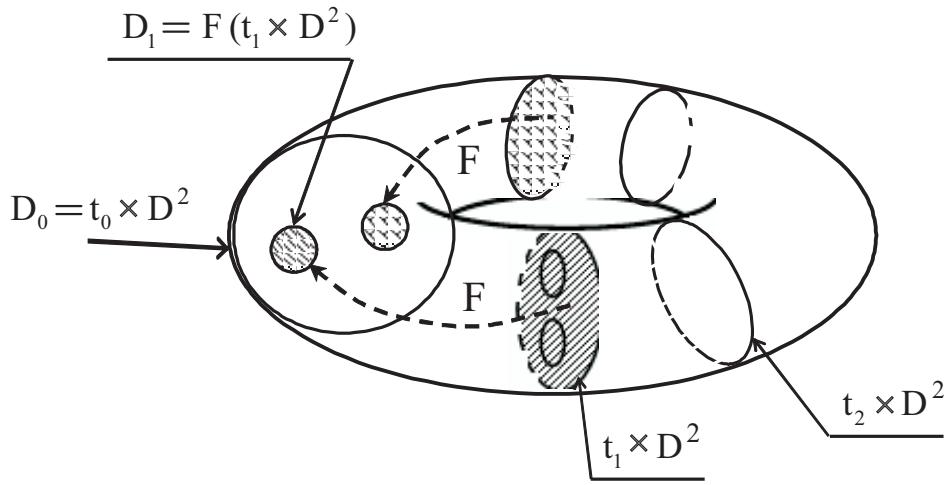
Обе возможности реализуются.

В данной статье приводится доказательство первого пункта теоремы 1.1., который является ключевым (доказательство второго пункта основано на первом). Докажем следующую лемму, необходимую для построения символической модели ограничения отображения F на соленоид $Sol(F)$.

Л е м м а 1.2. Каждой точке $p \in Sol(F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$, и соответствующая последовательность замкнутых двумерных дисков $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ такие, что

- $p \in \cdots \subset D_i \subset \cdots \subset D_0$, $p = \cap_{i \geq 0} D_i$;
- $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Доказательство. Лемма тривиальна для $i = 0$ и $i = 1$. Для удобства читателя приведем геометрическую иллюстрацию для соленоида размерности $n = 3$, см. рис. 1.1.



Р и с у н о к 1.1

Для фиксированной точки p существует единственная точка $t_0 \in S^1$ такая, что $p \in \{t_0\} \times D^{n-1}$. Положим $D_0 = \{t_0\} \times D^{n-1}$. Из (1.1) следует, что существуют попарно различные $s_1, \dots, s_d \in S^1$ такие, что $g(s_1) = g(s_2) = \dots = g(s_d) = t_0$, а диски $F(\{s_i\} \times D^{n-1})$ принадлежат диску D_0 , $F(\{s_i\} \times D^{n-1}) \subset D_0$. Согласно (1.4), диски $F(\{s_i\} \times D^{n-1})$, $i = 1, \dots, d$, попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(\{s_j\} \times D^{n-1})$. Положим $t_1 = s_j$, $D_1 = \{t_1\} \times D^{n-1}$. Таким образом, $p \in D_1 \subset D_0$.

Пусть по предположению индукции, существует единственная последовательность точек $\{t_l\}_0^{k-1}$, $t_l \in S^1$, и $k-1$ замкнутых двумерных дисков $D_l = F^l(\{t_l\} \times D^{n-1})$ таких, что $p \in D_{k-1} \subset \cdots \subset D_l \subset \cdots \subset D_0$, где $D_l = \{t_l\} \times D^{n-1}$. Таким образом, $p \in \cap_{l \geq 0} D_l$. Из (1.1) следует, что существуют

$$S_1, S_2, \dots, S_d \in S^1 \text{ такие, что } g(S_1) = g(S_2) = \dots = g(S_d) = t_{k-1},$$

а диски $F^k(\{S_i\} \times D^{n-1})$ принадлежат диску D_{k-1} , $F^k(\{S_i\} \times D^{n-1}) \subset D_{k-1}$. Из (1.4) следует, что существует единственное S_j такое, что $p \in F^k(\{S_j\} \times D^{n-1})$. Положим $t_k = S_j$, $D_k = \{t_k\} \times D^{n-1}$. Тогда $p \in D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_0$. Из построения вытекает, что $t_i = g(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Из (1.3) следует, что $diam D_i = diam (F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому пересечение $\cap_{i \geq 0} D_i$ есть одноточечное множество, совпадающее с p .

Покажем, что для любой точки $p \in Sol(F)$ последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$ определяется единственным образом от противного. Допустим, для точки p существуют две различные последовательности точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$ и $\{t'_i\}_0^\infty$, $t'_i \in S^1$, т.е. найдется i , для которого $t_i \neq t'_i$. Это означает существование двух дисков $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ и $D'_i = F^i(\{t'_i\} \times D^{n-1})$, такие что $p \in D_i$ и $p \in D'_i$, но это противоречит условию (1.4), так как диски попарно не пересекаются $F(t_i, D^{n-1}) \cap F(t'_i, D^{n-1}) = \emptyset$. \square

Обозначим через $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией (напомним, что в этой топологии база образована множествами $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в S_i^1 , и только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от S_i^1 , см. [3], стр. 155), где $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ - множество целых неотрицательных чисел. Точками множества $\prod_{i \in \mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_{i=0}^\infty$, где $t_i \in S_i^1$.

Обозначим через \prod_g подмножество множества $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_{i=0}^\infty$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Топология на \prod_g индуцируется топологией на $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$. Определим на \prod_g отображение $\hat{g} : \prod_g \rightarrow \prod_g$, положив

$$\hat{g}(\{t_0, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_0), t_0, \dots, t_i, \dots\}.$$

Следуя [13] (см. также [10]), пространство \prod_g с отображением \hat{g} будем называть *обратным пределом преобразования* g .

Л е м м а 1.3. \hat{g} – взаимнооднозначное отображение.

Доказательство. Докажем инъективность отображения \hat{g} . Для этого возьмем две различные последовательности $\{t_i\}_{i=0}^\infty, \{t'_i\}_{i=0}^\infty \in \prod_g$, т.е. существуют такие i, j , что $t_i \neq t_j$. Отсюда и способа задания отображения \hat{g} следует, что образы этих последовательностей $\hat{g}(\{t_i\}_{i=0}^\infty) \neq \hat{g}(\{t'_i\}_{i=0}^\infty)$.

Пусть $\{t_i\}_{i=0}^\infty = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Существует последовательность $\{t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$ которая при действии отображения \hat{g} , с учетом равенства $t_0 = g(t_1)$, переходит в исходную $\hat{g}(\{t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_1), t_1, \dots, t_i, \dots\} = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$, что и доказывает сюръективность этого отображения. \square

Л е м м а 1.4. Отображение \hat{g} непрерывно.

Доказательство. Пусть $\{r_0, \dots, r_i, \dots\} \in \prod_g$, и пусть U_ε – окрестность точки

$$\hat{g}(\{r_0, \dots, r_i, \dots\}) = \{g(r_0), r_0, \dots, r_i, \dots\}.$$

Согласно определению тихоновской топологии, не уменьшая общности, можно считать, что существуют некоторые $k \in \mathbb{Z}^+$ и сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ такие, что для любой точки $r' = \{r'_0, \dots, r'_i, \dots\} \in U_\varepsilon$ выполняются неравенства:

$$|g(r_0) - g(r'_0)| < \varepsilon, \quad |r_i - r'_i| < \varepsilon \quad \text{для любого } i = 1, \dots, k-1.$$

Так как g непрерывно, то существует $\delta > 0$ такое, что $|r_0 - r'_0| < \delta$ влечет $|g(r_0) - g(r'_0)| < \varepsilon$. Ясно что, можно считать $\delta \leq \varepsilon$. Зададим окрестность U_δ точки $\{r_0, \dots, r_i, \dots\}$, положив $r' = \{r'_0, \dots, r'_i, \dots\} \in U_\delta$, если $|r_i - r'_i| < \delta$ для любого $i = 1, \dots, k-1$. Тогда $\hat{g}(U_\delta) \subset U_\varepsilon$. \square

Определим отображение $\theta : Sol(F) \rightarrow \prod_g$ следующим образом. Согласно лемме 1.2., любой точке $p \in Sol(F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ такая, что $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Положим $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$.

Множество $\{t\} \times D^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} D_t^{n-1}$ назовем *t-сечением*, где $t \in S^1$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с D^{n-1} посредством проекции $p_2 : S^1 \times D^{n-1} \rightarrow D^{n-1}$. Согласно (1.2), диффеоморфизм F переводит *t*-сечение в $g(t)$ -сечение. Поэтому естественным образом определяется диаметр множества $F^n(D_t^{n-1})$: $\text{diam } F^n(D_t^{n-1}) = \text{diam } p_2(F^n(D_t^{n-1}))$.

Для точек $\alpha, \beta \in S^1$ положим $D_{\alpha\beta}^{n-1} = I_{\alpha\beta} \times D^{n-1}$, где $I_{\alpha\beta} \subset S^1$ – открытый интервал минимальной длины с концевыми точками α, β . Другими словами, $D_{\alpha\beta}^{n-1}$ есть $\frac{|\beta-\alpha|}{2}$ -окрестность $\frac{\beta+\alpha}{2}$ -сечения в B^n .

Л е м м а 1.5. *Отображение θ является гомеоморфизмом таким, что $\theta \circ F|_{Sol(F)} = \hat{g} \circ \theta$.*

Доказательство. Докажем сперва инъективность отображения θ . Возьмем различные $p_1, p_2 \in Sol(F)$. Согласно лемме 1.2., каждой точке p_i , $i = 1, 2$, соответствует последовательность замкнутых дисков $D_j^i = F^j(\{t_j^i\} \times D^{n-1})$ таких, что $p_i = \cap_{j \geq 0} D_j^i$. Поскольку $p_1 \neq p_2$ и диаметры дисков стремятся к нулю, то существует k такое, что

$$D_1^1 = D_1^2, \dots, D_{k-1}^1 = D_{k-1}^2, D_k^1 \neq D_k^2.$$

Поэтому $t_k^1 \neq t_k^2$ и, следовательно, $\theta(p_1) \neq \theta(p_2)$.

Докажем сюръективность отображения θ . Возьмем $\{t_0, t_1, \dots\} \in \prod_g$. Из $t_i = g(t_{i+1})$ и условия (1.3) вытекает что

$$\{t_0\} \times D^{n-1} \supset F(\{t_1\} \times D^{n-1}) \supset \dots \supset F^i(\{t_i\} \times D^{n-1}) \supset \dots$$

Более того, так как $diam(F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то пересечение $\bigcap_{i \geq 0} F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ состоит ровно из одной точки, скажем p . Из определения множества $Sol(F)$ следует, что $p \in Sol(F)$. Таким образом, $\theta(p) = (t_0, t_1, \dots, t_i, \dots)$.

Докажем непрерывность отображения θ . Пусть U – окрестность точки $\theta(p) = \{t_i\}_0^\infty$, где $p \in Sol(F)$. Согласно определению топологии на множестве \prod_g , можно считать, что U задается числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такими, что $U = \{\{x_i\}_0^\infty \in \prod_g : |x_i - t_i| < \varepsilon\}$, для $i = 0, \dots, r$. В силу леммы 1.2.,

$$p \in F^r(D_{t_r}^{n-1}) \subset F^{r-1}(D_{t_{r-1}}^{n-1}) \subset \dots \subset F(D_{t_1}^{n-1}) \subset D_{t_0}^{n-1}.$$

Поскольку, согласно Поскольку, согласно инвариантности множества $Sol(F)$ относительно F , имеют место равенства $F(Sol(F)) = F^{-1}(Sol(F)) = Sol(F)$, то ограничение $F|_{Sol(F)}$ есть диффеоморфизм $Sol(F) \rightarrow Sol(F)$. Поэтому существуют однозначно определенные точки $p_i \in D_{t_i}^{n-1} \cap Sol(F)$, $1 \leq i \leq r$, такие, что $p = F^i(p_i)$.

Из (1.2) вытекает, что p является внутренней точкой множества $F^r(D_{t_r}^{n-1})$ в топологии t_0 -сечения $D_{t_0}^{n-1}$. Пусть V_0 – окрестность точки p в этой топологии, принадлежащая $F^r(D_{t_r}^{n-1})$. Отметим, что для любой точки $q \in V_0$ имеет место включение $\theta(q) \in U$, так как $q \in F^r(D_{t_r}^{n-1}) \subset \dots \subset F(D_{t_1}^{n-1}) \subset D_{t_0}^{n-1}$. Наша задача – сделать из V_0 "объемную" окрестность точки p в D_1^{n-1} .

Так как $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, где $t_0 = g(t_1)$, $t_1 = g(t_2)$, $t_2 = g(t_3)$, \dots $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$, то $t_0 = g(t_1) = g^2(t_2) = \dots = g^i(t_i)$, $t_1 = g(t_2) = g^2(t_3) = \dots = g^{i-1}(t_i)$, $t_2 = g(t_3) = g^2(t_4) = \dots = g^{i-2}(t_i), \dots, t_i = g^{i-j}(t_i)$ для всех $1 \leq j \leq i$ и некоторого i . Поэтому $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots\} = \{g^i(t_i), g^{i-1}(t_i), \dots, g(t_i), t_i, \dots\}$.

Поскольку для точки $\theta(p)$ в ее окрестности U , заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j} = g^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение g непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \dots, r$, см. рис. 1.2.

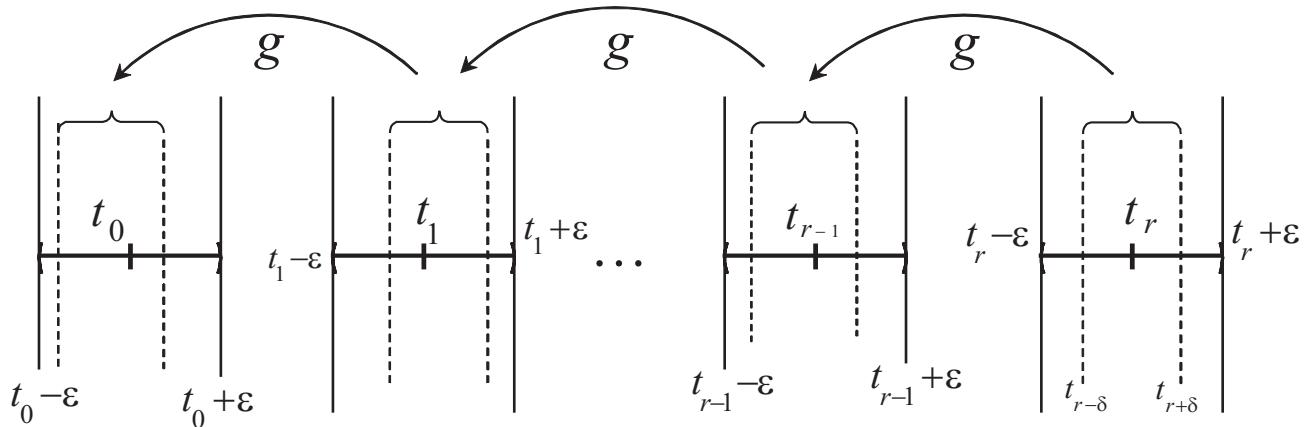


Рисунок 1.2

Следовательно, $F^j(D_{t_j-\delta, t_j+\delta}^{n-1}) \subset D_{t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon}^{n-1}$ для всех $j = 0, \dots, r$. Множество $F^r(D_{t_r-\delta, t_r+\delta}^{n-1})$ имеет вид $D_{t_0-\nu_1, t_0+\nu_2}^{n-1}$ для некоторых $\nu_1, \nu_2 > 0$. Тогда множество $(S^1 \times V_0) \cap D_{t_0-\nu_1, t_0+\nu_2}^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} V$ является искомой "объемной" окрестностью точки p в \mathcal{B}^n . Из определения отображений F и θ вытекает, что $\theta(q) \in U$ для любой точки $q \in V$. Следовательно, θ – непрерывное отображение. Аналогичным образом доказывается непрерывность отображения θ^{-1} . Таким образом, θ – гомеоморфизм.

Докажем равенство $\theta \circ F|_{Sol(F)} = \hat{g} \circ \theta$, которое можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Sol(F) & \xrightarrow{F} & Sol(F) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \prod_g & \xrightarrow{\hat{g}} & \prod_g \end{array}$$

Согласно лемме 1.2., любой точке $p \in Sol(F)$ соответствует единственная последовательность $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$, где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Образ точки $\theta(p)$ относительно отображения $\hat{g} : \prod_g \rightarrow \prod_g$ есть по определению

$$\hat{g}(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}.$$

Из условия (1.2) вытекает, что $F(p) \in F(\{t_0\} \times D^{n-1}) \subset \{g(t_0)\} \times D^{n-1}$. В силу леммы 1.2., образом точки $F(p)$ относительно отображения θ является последовательность $\{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$. Следовательно, $\hat{g}[\theta(p)] = \theta[F(p)]$. Лемма доказана. \square

Из этой леммы следует, что ограничение $f|_{Sol(f)}$ сопряжено обратному пределу отображения g .

Авторы благодарят РФФИ грант 08-01-00547 за финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Аносов Д.В. Исходные понятия. – В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники). том 1. 1985. Динамические системы - 1 (под ред. Д. В. Аносова). – С. 156–178.
- Аносов Д.В., Солодов В.В. Гиперболические множества. – В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники). том 66. 1991. Динамические системы - 9 (под ред. Д. В. Аносова). – С. 12–99.

3. Куратовский Л. Топология. том 1. – М. Мир. 1966.
4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М. ОГИЗ. 1947.
5. Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E. Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. – Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc. 1996. – 153 P.
6. Block L. Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms. – Trans. Amer. Math. Soc. 1975. 214. – P. 403–413.
7. van Danzig D. Über topologisch homogene Kontinua. – Fund. Math. 1930. 14. – P. 102–105.
8. Ittai Kan. Strange attractors of uniform flows. – Trans. of Amer. Math. Soc. 1986. 293. – P. 135–159.
9. Nitecki Z. Nonsingular endomorphisms of the circle. – Proc. Symp. Pure Math. 1970. 14. – P. 203–220.
10. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. – Studies in Adv. Math. Sec. edition. CRC Press. 1999.
11. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. – P. 747–817. Имеется русский перевод: УМН. 1970. 25. – С. 113–185.
12. Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. – Math. Ann. 1927. 97. – P. 454–472.
13. Williams R. Expanding attractors. – Publ. Math. I.H.E.S. 1974. 43. – P. 169–203.

Дата поступления 01.06.2010

The dynamics of SV -diffeomorphisms on basic solid torus

© E. V. Zhuzhoma⁵, N. V. Isaenkova⁶, L. A. Kuprina⁷

Abstract. S. Smale construction of diffeomorphism of the solid torus with one-dimensional solenoidal attractor is generalized.

Key Words: solenoid, Smale-Vietoris diffeomorphism, basic sets.

REFERENCES

1. Anosov D.V. Basic Concepts. Elementary Theory. – In Dynamical Systems 1 (VINITI, Moscow, 1). Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravl. 1985. P. 156–204. Engl. transl. in Dynamical Systems I (Springer, Berlin, 1988). Encycl. Math. Sci. 1.
2. Anosov D.V., Solodov Hyperbolic sets. – In Dynamical Systems1 (VINITI, Moscow, 66). Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravl. 1999. – P. 12–99.
3. Kuratowski K. Topology. Volume 1. – Academic Press. New York–London. 1966.
4. Nemytskii V., Stepanov V.: Qualitative Theory of Differential Equations. – Princeton University Press. Princeton. N.J. 1960.
5. Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E. Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. – Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc. 1996. – 153 P.
6. Block L. Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms. – Trans. Amer. Math. Soc. 1975. 214. – P. 403–413.
7. van Danzig D. Über topologisch homogene Kontinua. – Fund. Math. 1930. 14. – P. 102–105.
8. Ittai Kan. Strange attractors of uniform flows. – Trans. of Amer. Math. Soc. 1986. 293. – P. 135–159.
9. Nitecki Z. Nonsingular endomorphisms of the circle. – Proc. Symp. Pure Math. 1970. 14. – P. 203–220.
10. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. – Studies in Adv. Math. Sec. edition. CRC Press. 1999.
11. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. – P. 747–817. Имеется русский перевод: УМН. 1970. 25. – С. 113–185.
12. Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. – Math. Ann. 1927. 97. – P. 454–472.
13. Williams R. Expanding attractors. – Publ. Math. I.H.E.S. 1974. 43. – P. 169–203.

⁵Professor, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

⁶Post-graduate student, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; nisaenkova@mail.ru.

⁷Assistant professor, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

УДК 517.958:537.84

Численный анализ реакционной способности олефиновых и ацетиленовых соединений в реакции циклоалюминирования

© Ю. С. Лаврентьева¹, И. М. Губайдуллин², Р. Н. Кадикова³,
И. Р. Рамазанов⁴

Аннотация. Получена количественная информация о поведении реакционной способности олефиновых и ацетиленовых соединений в реакции циклоалюминирования путем проведения вычислительного эксперимента на однопроцессорных вычислительных системах. Мольные соотношения начальных данных катализатора и триэтилалюминия, а также температуры проведения изотермической реакции, варьировались в определенной последовательности. Численно подтверждены результаты натурных экспериментов. Сделаны прогнозы поведения реакции в областях, трудно реализуемых на лабораторных установках.

Ключевые слова: натурный и вычислительный эксперимент, сравнение изменений скоростей стадий, интервалы поиска кинетических параметров

При изучении реакционной способности тех или иных веществ необходимо проводить натурный эксперимент при разных начальных данных об исходных реагентах и при разных условиях проведения эксперимента.

Как известно, на подготовку и проведение натурного эксперимента уходит много времени и средств. Иногда приходится для каждого опыта разрабатывать специальную измерительную аппаратуру и методику измерения, чтобы получить качественную и количественную информацию о поведении изучаемого объекта.

В Институте нефтехимии и катализа РАН (ИНК РАН) ведутся исследования сложных реакций, катализируемых металлокомплексными катализаторами, путем параллельного проведения натурного и вычислительного эксперимента [1]. Вычислительный эксперимент проводится с использованием информационно-аналитической системы (ИАС), разработанной в лаборатории математической химии. ИАС включает математические модели прямой и обратной кинетических задач, методы и алгоритмы их решения, а также систему управления базой данных кинетических исследований [2]. Прямая кинетическая задача - это задача расчета состава реагирующей смеси по заданной кинетической модели. Математическое описание прямой задачи состоит из системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (СОНДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= F_i, i = 1 \dots M; \\ F_i &= \sum_{j=1}^N S_{ij} w_j; \\ w_j &= P_j * \prod_{i=1}^M (X_i)^{\text{abs}(\alpha_{ij})} - Q_j * \prod_{i=1}^M (X_i)^{\text{abs}(\beta_{ij})} \\ P_j &= P_j^0 * \exp\left(-\frac{E_j^P}{RT}\right) \\ Q_j &= Q_j^0 * \exp\left(-\frac{E_j^Q}{RT}\right) \end{aligned}$$

¹ Аспирант, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; uliyalavr@mail.ru.

² Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru.

³ Аспирант, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа

⁴ Старший научный сотрудник лаборатории каталитического синтеза, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа

с начальными условиями: при $t=0$, $X_i(0) = X_i^0$,

где X_i — концентрации веществ (мольные доли), участвующих в реакции; M — количество веществ; N — количество стадий; S_{ij} — стехиометрическая матрица; w_j — скорость j -ой стадии ($1/c$); P_j, Q_j — приведенные константы скорости прямой и обратной реакции ($1/c$) соответственно; E_j^P, E_j^Q — энергии активации прямой и обратной реакции (кДж/моль) соответственно; R — газовая постоянная, равная $8,31$ Дж/(моль·К); T — температура, К; a_{ij} — отрицательные элементы S_{ij} , b_{ij} — положительные элементы S_{ij} .

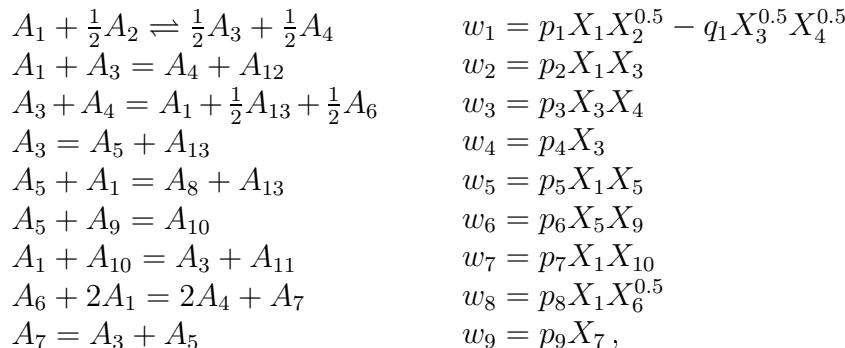
Обратная кинетическая задача — это задача восстановления по экспериментальному материалу вида кинетической модели и ее параметров.

Поиск кинетических констант осуществляется многократным решением прямой кинетической задачи и минимизацией критерия отклонения (ЕЕ) экспериментальных X_{lj}^E и расчетных X_{lj}^R данных .

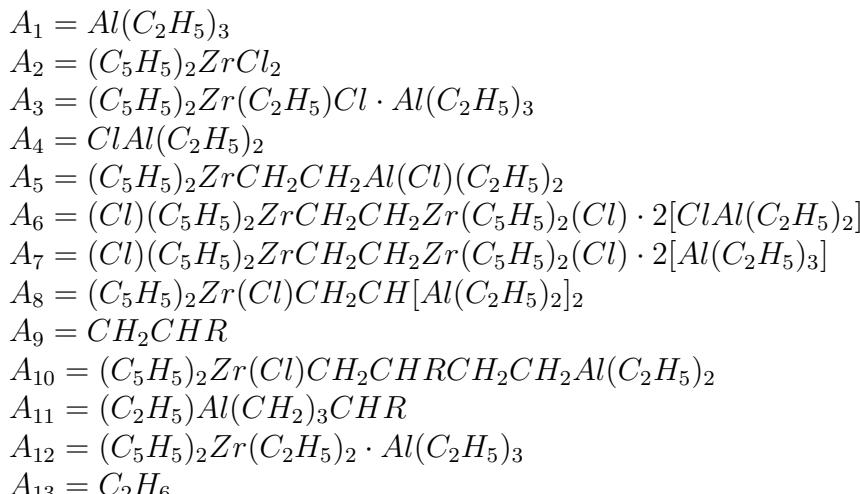
$$EE = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M \text{abs}(X_{ij}^E - X_{ij}^R)$$

где K — количество точек замеров, M — количество веществ.

В лаборатории каталитического синтеза ИНК РАН, в группе под руководством к.х.н., доцента Рамазанова И.Р., ведутся исследования по определению реакционной способности олефиновых и ацетиленовых соединений в реакции циклоалюминирования. В качестве предварительной схемы вышеуказанной реакции взята схема из работы [3]:



В качестве A_i выступают вещества:



В данной работе были определены кинетические параметры только при одной температуре ($25^\circ C$) и рассмотрена реакция циклоалюминирования с тремя олефинами (гексен-1, стирол, винилтриэтилсиликат). Для построения полной кинетической модели необходимо

определить энергии активации всех отдельных стадий, т.е. получить зависимость скорости реакции от температуры. Обратная задача была решена на основе натурного эксперимента при температурах $0^\circ, 18^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ C$ для различных олефинов (октен-1, аллилнафталин, стирол, аллилбензол, норборнен, trimетилвинилсилан) и ацетиленов (октин-1, фенилацетилен, октин-4).

Отправной точкой при решении обратной задачи методом параболического спуска являлись значения констант при $25^\circ C$ [4], полученные в работе [3]. В таблице 1 приведены найденные значения кинетических констант при всех рассматриваемых температурах.

	$18^\circ C$	$25^\circ C$	$30^\circ C$	$40^\circ C$	$50^\circ C$	$E.ak$ [kcal/mol]
k1	62.427	156.980	263.856	97.151	488.170	9.685
k2	0.045	0.798	0.0498	3.913	9.208	31.546
k3	3.279	23.840	35.652	67.264	176.043	23.569
k4	1.610	3.044	26.851	215.645	799.536	38.973
K5	0.209	3.035	5.413	9.999	24.445	27.318
k6	196.628	8750.00	844.371	1313125	2991.713	17.813
k7	30.491	963.00	361.950	1020.716	1560.023	25.667
k8	0.670	3.424	23.240	13.287	36.006	23.444
K9	0.448	0.871	9.714	10.930	61.432	28.447
k10	0.048	1.171	1.056	10.609	53.242	43.482

Таблица 1. Кинетические параметры для реакции циклоалюминирования с олефином октен-1

Сравнение расчетных с экспериментальными данными представлены на рисунке 1:

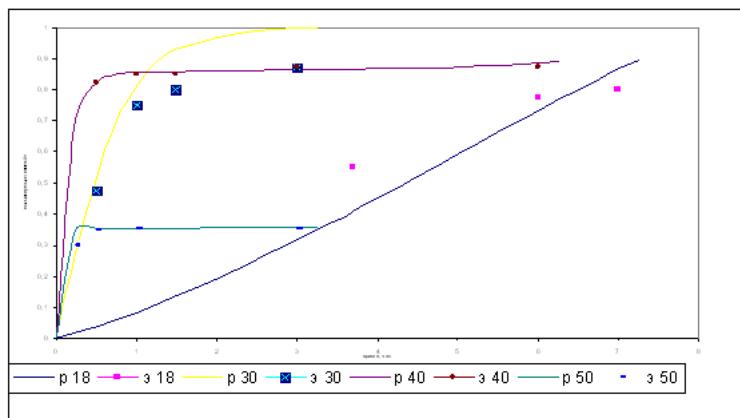


Рисунок 1.

Графики соответствий экспериментальных данных и расчетных значений продукта циклоалюминирования $(C_2H_5)Al(CH_2)_3CHR$ (октен-1)

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Слабая тенденция роста k_7 в случае октин-4 с увеличением температуры может быть связана с большими стерическими (пространственными) затруднениями, возникающими на стадии перemetаллирования.

2. Реакционная способность октин-1 выше, чем у октин-4, что может быть вызвано большей поляризацией связей в октин-1.

На рисунке 2 представлены графики зависимостей скоростей 6 и 7 стадий от времени, из которых можно сделать вывод о том, что в начальный момент времени реакции происходит накопление каталитически активных компонентов, которое приводит к увеличению скорости 6 и 7 стадий. По мере протекания реакции, концентрации реагентов уменьшаются, вследствие чего наблюдается максимум на графике зависимости скорости от времени.

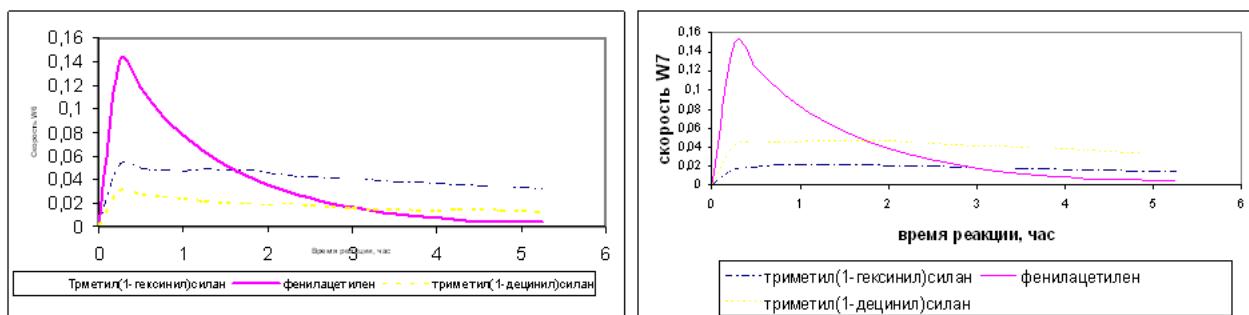


Рисунок 2

На рисунке 3 представлены графики зависимостей скоростей 6 стадии от времени для разных олефинов и ацетиленов. В таблицах 2, 3 приведены значения точек максимума.

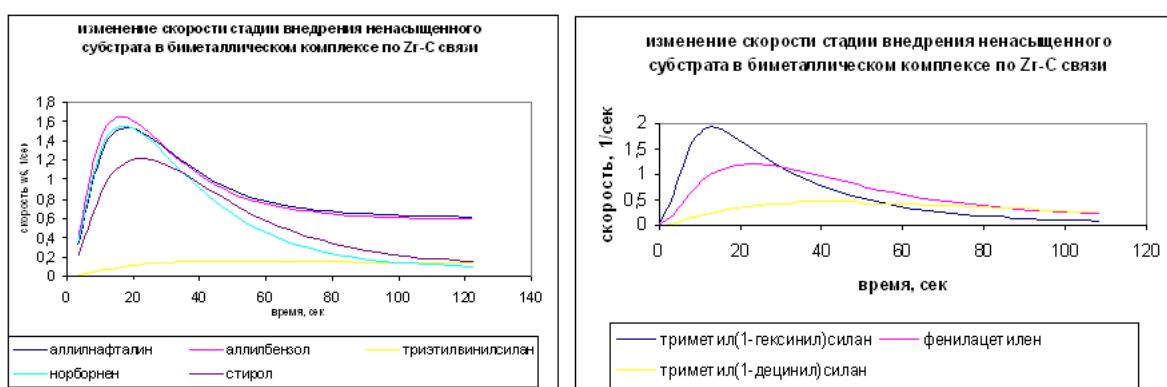


Рисунок 3

40°C	Аллилнафталин	Аллилбензол	Триэтилвинилсилан	Норборнен	стирол
Время, сек	18	18	57,6	18	21,6
Скорость, с ⁻¹	1,529	1,641	0,164	1,551	1,218

Таблица 2

40°C	Триметил(1-гексинил)силан	фенилацетилен	Триметил(1-децинил)силан
Время, сек	14,4	21,6	43,2
Скорость, с ⁻¹	1,887	1,207	0,441

Таблица 3

Рассмотрим изменения скорости 6 стадии для различных температур на примере октин-1. С увеличением температуры наблюдается смещение максимума к начальному моменту времени и увеличение скорости реакции (рисунок 4).

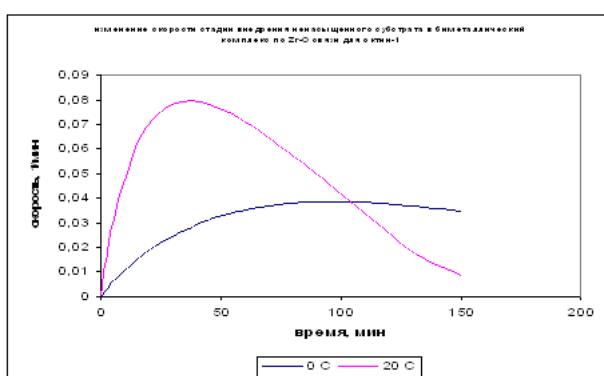


Рисунок 4

При решении обратной задачи приходилось решать прямую задачу с точностью 10^{-3} , что было вызвано необходимостью решения системы дифференциальных уравнений за разумное время.

Полученные значения констант были взяты в качестве начальных приближений для адаптации к рассматриваемым задачам численных методов решения жестких систем дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З.М. Царева, Е.А. Орлова Теоретические основы химтехнологии - Киев: ВШ, 1986г. - 271с.
2. Губайдуллин И.М., Спивак С.И. Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики// Системы управления и информационные технологии, 2008, 1.1(31). - С. 150-153
3. А.В.Балаев, Л.В.Парфенова, С.В.Русаков, И.М.Губайдуллин, С.И.Спивак, Л.М.Халилов, У.М.Джимелев. Механизм реакции циклоалюминирования алкенов триэтилалюминием в алюмациклогептана, катализируемой Cp_2ZrCl_2 .// ДАН, 2001, том 381, №3.

4. А.Я. Розовский Гетерогенные химические реакции (кинетика и макрокинетика) М.: Наука, 1980. 324с.

Дата поступления 05.05.2010

Numerical analysis of the reactivity of olefinic and acetylenic compounds in the cycloalumination reaction.

© Y. S. Lavrent'eva⁵, I. M. Gubaidullin⁶, R. N. Kadikova⁷, I. R. Ramazanov⁸

Abstract. Quantitative information about the behavior and reactivity of olefinic and acetylenic compounds in the cycloalumination reaction is obtained. Numerical experiments is conducted on single-processor computer systems. Molar ratio of the initial data of the catalyst and triethylaluminium and the temperature of the isothermal reaction varied in a certain sequence. The results of experiments are confirmed numerically. Reaction behavior predictions in the areas difficult produced in laboratory settings is done.

Key Words: natural and computer experiment, a comparison of changes in the stage rates, the search intervals of the kinetic parameters

REFERENCES

1. Tsarev Z.M., Orlova E.A. Theoretical basis Chimtechologiya - Kiev: HS, 1986. - 271s.
2. Gubaidullin I.M., Spivak S.I. Information-analytical system of inverse problems of chemical kinetics // Control Systems and Information Technology, 2008, 1.1 (31). - S. 150-153
3. Balaev A.V., Parfenova L.V. Gubaidullin I.M., Rusakov S.V., Spivak S.I., Khalilov L.M., Dzhemilev U.M. The Mechanism of Cp₂ZrCl₂-Catalyzed Alkene Cycloalumination with Triethylaluminum to Give Alumacyclopentanes.// J. Doklady Physical Chemistry, 2004, V. 381, №3.
4. Rozovsky A.Y. Heterogeneous chemical reactions (kinetics and microkinetics), Moscow: Nauka, 1980. 324s.

⁵Postgraduate, Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS, Ufa; uliyalavr@mail.ru.

⁶Chief researcher of the Mathematical chemistry laboratory, the Institute of petrochemistry and catalysis, RAS, Ufa; irekmars@mail.ru.

⁷Postgraduate, Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS, Ufa

⁸Chief researcher of the catalytic synthesis laboratory, the Institute of petrochemistry and catalysis, RAS, Ufa

УДК 517.938

Полная управляемость линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

© И. С. Потапова¹

Аннотация. В статье изучается проблема полной управляемости линейной системы дифференциальных уравнений с управлением специального вида, найдены необходимые и достаточные условия полной управляемости, исследуется проблема приведения матрицы с переменными к диагональному виду, найдены необходимые и достаточные условия неособенного преобразования.

Ключевые слова: линейные системы дифференциальных уравнений, полная управляемость, фундаментальная матрица.

1. Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1.1)$$

где $A(t) - n \times n$, $B(t) - n \times m$ матрицы, $u - m$ -мерный вектор-управление.

Предположим, что на сегменте $[0, T]$ матрицы $A(t)$ и $B(t)$ определены и непрерывны, где $T > 0$ – некоторое число. Множество допустимых управлений определим равенством $U = \{u(t)\}$, в котором $u(t)$ кусочно-непрерывная на сегменте $[0, T]$.

Определение 1.1. Система (1.1) называется вполне управляемой на сегменте $[0, T]$ во множестве допустимых управлений U , если для любых векторов α и β пространства \mathbb{E}^n существует управление $u(t) \in U$, при котором система (1.1) имеет решение $x(t) \in E^n$, определенное на сегменте $[0, T]$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0, \alpha, u) = \alpha$, $x(T, \alpha, u) = \beta$.

2. Постановка задачи

Ставится задача – найти условия полной управляемости линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1.1) на сегменте $[0, T]$ во множестве допустимых управлений U .

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, $u(t)$ – произвольная, но фиксированная вектор-функция. Тогда решение системы (1.1) определится равенством

$$x(t, \alpha, u) = X(t)\alpha + X(t) \int_0^t X^{-1}(\xi)B(\xi)u(\xi)d\xi.$$

¹ Аспирант кафедры Математики и МПМД, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, г. Рязань; irina00000@yandex.ru.

Следовательно, для того, чтобы система (1.1) была вполне управляемой во множестве допустимых управлений U , необходимо и достаточно, чтобы для любых векторов $\alpha \in \mathbb{E}^n$ и $\beta \in \mathbb{E}^n$ существовало допустимое управление $u(t) \in U$, удовлетворяющее равенству

$$\int_0^T X^{-1}(t)B(t)u(t)dt = \gamma, \quad (2.1)$$

в котором $\gamma = X^{-1}(T)\beta - \alpha$.

Определим множество управлений

$$U = \{u(t) : u(t) = R(t)v\}, \quad (2.2)$$

$R(t) = (r_{ij}(t))_{11}^{mn}$, $r_{ij}(t) = \sum_{\lambda=1}^k r_{ij}^{(\lambda)} \varphi_{\lambda}(t)$, $r_{ij}^{(\lambda)}$ – действительные числа, при любом $\lambda \in \overline{1, k}$ $\varphi_{\lambda}(t)$ – известные функции, определенные и кусочно-непрерывные на сегменте $[0, T]$, v – n -мерный постоянный вектор.

Следовательно, для того, чтобы система (1.1) была вполне управляемой во множестве допустимых управлений U , определенном равенством (2.2), необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $R(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$\det \int_0^T X^{-1}(t)B(t)R(t)dt \neq 0$$

Пусть $P = \int_0^T X^{-1}(t)B(t)R(t)dt$, r – $m n k$ -мерный вектор, определенный равенством $r = (r_1, r_2, \dots, r_{mn}, \dots, r_{mnk})$, в котором $r_1 = r_{11}^{(1)}$, $r_2 = r_{21}^{(1)}, \dots, r_{mn} = r_{mn}^{(1)}, \dots, r_{mnk} = r_{mn}^{(k)}$. Непосредственным вычислением устанавливаем, что $\det P = \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in D \\ 1, m n k}} a_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}$, где D – множество сочетаний из натуральных чисел по n .

3. Необходимые и достаточные условия полной управляемости

Т е о р е м а 3.1. Для того чтобы система (1.1) была вполне управляемой на сегменте $[0, T]$ во множестве допустимых управлений U , определенном равенством (2.2), необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно сочетание $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in D$, при котором $a_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} \neq 0$.

Согласно теореме 3.1 для решения проблемы полной управляемости конкретных линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами необходимо иметь явное представление фундаментальной матрицы системы $\dot{x} = A(t)x$.

4. Приведение матрицы с переменными коэффициентами к диагональному виду

Т е о р е м а 4.1. Пусть $A(t)$ – $n \times n$ матрица, определенная на сегменте $[0, T]$. Тогда для того чтобы существовали постоянная неособенная матрица Y и диагональная матрица $C(t)$, удовлетворяющие равенству

$$A(t)Y = YB(t), \quad (4.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы

1. матрицу $A(t)$ можно представить следующим равенством

$$A(t) = \sum_{s=1}^m A_s f_s(t), \quad (4.2)$$

в котором $m \leq n$, матрицы A_s постоянные, $f_s(t)$ – известные и определенные на промежутке $[0, T]$ функции, при любом $s \in \overline{1, n}$

$$A_s = k_s h_s, \quad (4.3)$$

$k_s = \text{colon}(k_{1s}, k_{2s}, \dots, k_{ns})$, $k_{is} \in R$, $h_s = \text{colon}(h_{s1}, h_{s2}, \dots, h_{sn})$, $h_{sj} \in R$, $K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ – $n \times m$ постоянная матрица, $\text{rang}(K) = m$;

2. при любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняются соотношения

$$i \neq j (h_i, k_j) = 0, \quad (4.4)$$

$$i = j (h_i, k_i) \neq 0, \quad (4.5)$$

(\cdot, \cdot) – скалярное произведение.

5. Вычисление векторов h_s , k_s удовлетворяющих соотношениям (4.4), (4.5)

Пусть матрица $A(t)$ определена равенством

$$A(t) = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + \dots + A_m f_m(t), \quad (5.1)$$

в котором при любом $s \in \overline{1, m}$, $A_s = (a_{ij}^{(s)})_1^n$, $a_{ij}^{(s)}$ – постоянные действительные числа, $f_s(t)$ – непрерывная функция на сегменте $[0, T]$. Интерес представляет тот случай, когда A_s – ненулевая матрица.

Пусть $s \in \overline{1, m}$ произвольное, но фиксированное число. Заметим, что $h_s k_s = (h_{is} k_{sj})_1^n$ матрица. Найдем условия, при которых выполняется равенство

$$(a_{ij}^{(s)})_1^n = (h_{is} k_{sj})_1^n. \quad (5.2)$$

Для простоты рассуждения предположим, что отличным от нуля является элемент $a_{11}^{(s)}$, тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 5.1. Для того чтобы существовали векторы h_s , k_s , удовлетворяющие равенству (5.2) необходимо и достаточно, чтобы для любых $i, j \in \overline{1, n}$ выполнялось равенство

$$a_{11}^{(s)} a_{ij}^{(s)} = a_{i1}^{(s)} a_{1j}^{(s)}. \quad (5.3)$$

Предположим для определенности, что для любого $q \in \overline{1, m}$ ненулевым элементом матрицы A_q является элемент $a_{11}^{(q)}$. Тогда на основании теоремы 5.1 получим справедливость равенства (5.2) при $s = q$. Следовательно, $k_{iq} = \frac{a_{i1}^{(q)} k_{1q}}{a_{11}^{(q)}}$. Таким образом, имеем равенства

$$k_{iq} = \frac{a_{i1}^{(q)} k_{1q}}{a_{11}^{(q)}}, h_{sj} = \frac{a_{1j}^{(s)}}{k_{1s}}. \quad (5.4)$$

Пусть $k_q^* = \text{colon}(a_{11}^q, a_{21}^q, \dots, a_{n1}^q)$, $h_s^* = (a_{11}^s, a_{12}^s, \dots, a_{1n}^s)$. Тогда из равенства (5.4) следует, что

$$k_q = \frac{k_{1q}}{a_{11}^{(q)}} k_q^*, h_s = \frac{1}{k_{1s}} h_s^*. \quad (5.5)$$

Теорема 5.2. Для того чтобы векторы k_q , h_s определенные равенством (5.5), удовлетворяли соотношениям (4.4), (4.5) необходимо и достаточно, чтобы при $(h_s^*, k_q^*) = 0$ при $q \neq s$ и $(h_s^*, k_s^*) \neq 0$.

Матрицу K^* определим равенством $K^* = (k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*)$.

Теорема 5.3. Для того чтобы $\text{rang}K = m$ ($K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$) необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang}K^* = m$.

Теорема 5.4. Если выполнены условия теорем 5.1, 5.2, 5.3, то неособенная матрица Y и диагональная матрица $C(t)$, удовлетворяющие равенству (4.1), определяются равенствами

$$Y = (k_1, k_2, \dots, k_m, y_{m+1}, \dots, y_n),$$

$$C(t) = \text{diag}((h_1 k_1) f_1(t), (h_2 k_2) f_2(t), \dots, (h_m k_m) f_m(t), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}).$$

Таким образом, приходим к выводу – теоремы 5.1, 5.2 и 5.3 полностью описывают множество матриц $A(t)$, определенных равенством (5.1), для которых существуют постоянная неособенная матрица Y и диагональная матрица $C(t)$, удовлетворяющие равенству (4.1) при любом $t \in [0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ретюнских Н.В. Критерий приведения матрицы к диагональному или треугольному виду с помощью постоянной матрицы // Известия РАН. Дифференциальные уравнения. – 2002. – №6. – С. 72-76.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 574 с.

Дата поступления 12.05.2010

Full controllability of linear systems the differential equations with variables coefficients

© I. S. Potapova²

Abstract. In article the problem of full controllability of linear system is studied the differential equations with management of a special kind, are found Necessary and sufficient conditions of full controllability, it is investigated Problem of reduction of a matrix with variables to a diagonal kind, necessary and sufficient conditions nonexceptional Transformations.

Key Words: Linear systems of the differential equations, The full controllability, fundamental matrix.

REFERENCES

1. Retjunsikh N.V. Criterion of reduction of a matrix to diagonal or triangular To kind by means of a constant matrix//News of the Russian Academy of Natural Sciences. The differential equations. – 2002. – №6. – P. 72-76.
2. Li A.B., Markus L. Bases of the theory of the optimum control. – M.: Science, 1972. – 574 p.

²The post-graduate student of chair of Mathematics and technique of teaching of mathematical disciplines, Ryazan State University after S.A. Esenin, Ryazan; irina00000@yandex.ru.

УДК 517.9

Об одном способе продолжения функций в пространствах С. Л. Соболева-Л. Н. Слободецкого

© Г. А. Смолкин¹

Аннотация. В работе исследована проблема продолжения функции за пределы рассматриваемой области в неизотропных пространствах С. Л. Соболева, Л. Н. Слободецкого с помощью задания следов ее производных на границе области. В доказательстве соответствующей теоремы использованы элементы теории псевдодифференциальных операторов [1,3,4], специальное разбиение единицы двойственной переменной, статья Л. Н. Слободецкого [2]. Полученные результаты могут быть применены при изучении априорных оценок в краевых задачах для уравнений с частными производными.

Ключевые слова: продолжение функций, пространства С.Л.Соболева – Л.Н.Слободецкого, псевдодифференциальные операторы.

В статье приняты следующие обозначения:

n — натуральное число, $n \geq 2$, R^n — мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$; $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — двойственная переменная, $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$, $i^2 = -1$,

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(\xi) = \int e^{-ix\xi} W(x) dx — преобразование Фурье функции W(x).$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс с целочисленными неотрицательными координатами, то

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n; \quad \partial_k^j = \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Кроме этого, всюду ниже предполагается, что $U(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$, $\Gamma = \{x : x_1 = 0\}$; $s \geq 0$, $[s]$ — целая часть числа s ; m — целое неотрицательное число, $\mu = 1/(m+1)$, $\lambda(\xi) = (1 + |\xi_1|^{2(m+1)} + |\xi'|^2)^{\mu/2}$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $y' = (y_2, \dots, y_n)$, $\alpha' = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$.

Нормы $\|\cdot\|_{s,m}$, $\|\cdot\|_{s,m,\Omega}$, $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$, определяются следующим образом:

$$\|U\|_{s,m}^2 = \int |\tilde{U}(\xi)|^2 \lambda^{2s}(\xi) d\xi,$$

$$\|U\|_{s,m,\Omega}^2 = \int_\Omega \left(\sum_{j \leq [s]} |\partial_1^j U|^2 + \sum_{|\alpha'| \leq [s]\mu} |\partial_{x'}^{\alpha'} U|^2 \right) dx + C_{1,U} + C_{2,U},$$

$$\|U\|_{s,\Gamma}^2 = \int_\Omega \sum_{|\alpha'| \leq [s]} |\partial_{x'}^{\alpha'} U(0, x')|^2 dx' + C_{3,U}, \text{ где}$$

$$C_{1,U} = \begin{cases} 0, & \text{если } s = [s] \\ \sum_{j \leq [s]} \int_\Omega \int_0^\infty dy_1 \frac{|\partial_1^j U(x) - \partial_1^j U(y_1, x')|^2}{|x_1 - y_1|^{1+2(s-[s])}} dx, & \text{если } s \neq [s], \end{cases}$$

¹Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г.Саранск.

$$C_{2,U} = \begin{cases} 0, & \text{если } s\mu = [s\mu] \\ \sum_{|\alpha'| \leq [s\mu]} \int_{\Omega} dx \int \frac{|\partial_x^{\alpha'} U(x) - \partial_y^{\alpha'} U(x_1, y')|^2}{|x' - y'|^{n-1+2(s\mu - [s\mu])}} dy', & \text{если } s\mu \neq [s\mu], \end{cases}$$

$$C_{3,U} = \begin{cases} 0, & \text{если } s = [s] \\ \sum_{|\alpha'| \leq [s\mu]} \int \int \frac{|\partial_x^{\alpha'} U(0, x') - \partial_y^{\alpha'} U(0, y')|^2}{|x' - y'|^{n-1+2(s\mu - [s\mu])}} dx' dy', & \text{если } s \neq [s]. \end{cases}$$

Пополнение пространства $C_0^\infty(R^n) \cap C^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{s,m,\Omega}$ называется пространством С.Л.Соболева-Л.Н.Слободецкого в Ω .

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой C с индексами.

Введем разбиение единицы двойственной переменной ξ . Пусть $H(t) \in C_0^\infty(R)$, $0 \leq H(t) \leq 1$; $H(t) = 1$, если $|t| \leq 1$; $H(t) = 0$, если $|t| \geq 2$. Пусть

$$g_k(t) = H(t - k) / \sum_{j=0}^{\infty} H(t - j),$$

$$\Psi_k(\xi) = g_k(\ln(\lambda(\xi))), \quad k = 0, 1, \dots.$$

Очевидно, что в каждой точке $\xi \in R^n$ пересекается конечное число носителей функций $\Psi_k(\xi)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\xi) = 1,$$

$$e^{-2}\lambda(\xi) \leq e^k \leq e^2\lambda(\xi), \quad \text{если } \xi \in \text{supp} \Psi_k(\xi).$$

Функции $\Psi_k(\xi)$ соответствует псевдодифференциальный оператор $\Psi_k(D)$, определяемый по формуле

$$\Psi_k(D)W(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \Psi_k(\xi) \widetilde{W}(\xi) d\xi.$$

Пусть $q(\xi') = (1 + |\xi'|)^{\mu}$, j – натуральное число, l – целое и неотрицательное,

$$\Phi_l(x) = \partial_1^l U(x),$$

$$V_l = V_l(x) = (2\pi)^{-n+1} x_1^l \int e^{ix'\xi'} H(x_1 q) \int e^{-iy'\xi'} \Phi_l(0, y') dy' d\xi' / l!$$

$$= x_1^l H(x_1 q(D')) \Phi_l(0, x') / l! .$$

Положим

$$W_j(x) = 2 \sum_{l=0}^{[j/2]} V_{2l}, \quad \text{если } j \text{ – нечетное;} \\ W_j(x) = 2 \sum_{l=0}^{-1+j/2} V_{2l+1}, \quad \text{если } j \text{ – четное;} \quad (0.1)$$

$$U_j = U_j(x) = \begin{cases} U(x), & \text{если } x_1 \geq 0 \\ (-1)^j U(-x_1, x') + W_j(x), & \text{если } x_1 < 0. \end{cases}$$

Теорема. Функция U_j имеет непрерывные производные до порядка j включительно и существуют постоянные $C_{j,s}$, не зависящие от $U(x) \in C_0^\infty(R^n) \cap C^\infty(\Omega)$, такие, что для всех $s \in [0, j+1]$, $s \neq [s] + 1/2$ справедливы оценки:

$$\|U_j\|_s \leq C_{j,s} (\|U\|_{s,m,\Omega} + \sum_{l=0}^{j-1} \|\partial_1^l U(x)\|_{(s-l)\mu-\mu/2,\Gamma}). \quad (0.2)$$

Доказательство. Непрерывность производных U_j вытекает из равенств:

$$\partial_1^l((-1)^j U(-x_1, x') + W_j(x))_{x_1=0} = \partial_1^l U(x)_{x_1=0}, \quad l = 0, \dots, j. \quad (0.3)$$

Очевидно, что

$$\|U_j\|_{s,m}^2 \leq C_1 \int (1 + |\xi'|^{2s\mu}) |\tilde{U}_j|^2 d\xi + C_2 \int |\xi_1|^{2s} |\tilde{U}_j|^2 d\xi, \quad (0.4)$$

$$\int (1 + |\xi'|^{2s\mu}) |\tilde{U}(\xi)_j|^2 d\xi \leq C_3 (\|U\|_{s,m,\Omega}^2 + \sum_{l=0}^{j-1} \|\partial_1^l U(x)\|_{(s-l)\mu-\mu/2,\Gamma}^2).$$

Оценим второе слагаемое неравенства (0.4). Пусть s – целое. Из (0.3) следует

$$\partial_1^s U_j = \begin{cases} \partial_1^s U(x), & \text{если } x_1 \geq 0 \\ (-1)^j \partial_1^s U(-x_1, x') + \partial_1^s W_j(x), & \text{если } x_1 < 0. \end{cases}$$

Положим

$$F_l(\xi') = \int \exp^{-ix'\xi'} \partial_1^l U(0, x') dx'.$$

Из равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \int |\partial_1^s W_j(x)|^2 dx &\leq C_4 \int \int \sum_{l=0}^{j-1} |\partial_1^s (H(x_1(1 + |\xi'|^\mu) x_1^l))|^2 dx_1 |F_l(\xi')|^2 d\xi' \\ &\leq C_5 \sum_{l=0}^{j-1} \left| \int (1 + |\xi'|)^{(2s-2l)\mu-\mu/2} |F_l(\xi')|^2 d\xi' \right|. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему для целого s .

Пусть s – нецелое, $\gamma = s - [s]$.

Сначала предположим, что одновременно $[s], j$ – четные, или нечетные. Тогда справедливо равенство

$$\partial_1^{[s]} U_j = U_{j,1} + U_{j,2},$$

где

$$\begin{aligned} U_{j,1} &= \begin{cases} \partial_1^{[s]} U(x), & x_1 \geq 0 \\ \partial_1^{[s]} U(z, x'), & z = -x_1, x_1 < 0, \end{cases} \\ U_{j,2} &= \begin{cases} 0, & x_1 \geq 0 \\ \partial_1^{[s]} W_j(x), & x_1 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Из [2] имеем

$$\int |\xi_1|^{2s} |\tilde{U}_j(\xi)|^2 d\xi \leq C_6 \left(\int |\xi_1|^{2\gamma} |\tilde{U}_{j,1}(\xi)|^2 d\xi + \int |\xi_1|^{2\gamma} |\tilde{U}_{j,2}(\xi)|^2 d\xi \right), \quad (0.5)$$

$$\int |\xi_1|^{2\gamma} |\tilde{U}_{j,1}(\xi)|^2 d\xi \leq C_7 \|U\|_{s,m,\Omega}^2, \quad (0.6)$$

$$\begin{aligned}
\int |\xi_1|^{2\gamma} |\tilde{U}_{j,2}(\xi)|^2 d\xi &\leq C_8 \left(\int_{x_1 < 0} \int_{y_1 > 0} |\partial_1^{[s]} W_j(x)|^2 / |x_1 - y_1|^{1+2\gamma} dy_1 dx \right. \\
&+ \left. \int_{x_1 < 0} \int_{y_1 < 0} |\partial_1^{[s]} W_j(x) - \partial_1^{[s]} W_j(y_1, x')|^2 / |x_1 - y_1|^{1+2\gamma} dy_1 dx + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|^2 \right) \\
&\leq C_9 (\|W_j\|_{s,m}^2 + \int |\partial_1^{[s]} W_j(x)|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx). \tag{0.7}
\end{aligned}$$

Если $[s]$ – четное, то

$$|\partial^{[s]}(H(x_1(1+|\xi'|)^{\mu})x_1^{2l+1})|/|x_1|^{\gamma} \leq C_{10}(1+|\xi'|)^{(2l+1-\gamma-[s])\mu}.$$

Если $[s]$ – нечетное, то

$$|\partial^{[s]}(H(x_1(1+|\xi'|)^{\mu})x_1^{2l})|/|x_1|^{\gamma} \leq C_{11}(1+|\xi'|)^{(2l-\gamma-[s])\mu}.$$

Поэтому, получаем

$$\int |\partial_1^{[s]} W_j(x)|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx \leq C_{12} \sum_{l=0}^{j-1} \|\partial_1^l U(x)\|_{(s-l)\mu-\mu/2,\Gamma}..$$

Отсюда и из (0.5)-(0.7) получаем оценку (0.2).

Пусть $[s]$ – четное, а j – нечетное, или $[s]$ – нечетное, а j – четное.

Положим

$$\begin{aligned}
G = G(x) &\in C_0^\infty(R^n), \quad G(x) = \partial_1^{[s]} U(z, x')_{z=-x_1}, \text{ если } x_1 \leq 0, \\
Q(x) &= -2G(x) + \partial_1^{[s]} W_j(x), \quad x \in R^n.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\partial_1^{[s]} U_j = U_{j,1} + U_{j,3}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
U_{j,1} &= \begin{cases} \partial_1^{[s]} U(x), & \text{если } x_1 \geq 0 \\ \partial_1^{[s]} U(z, x'), & z = -x_1 \text{ если } x_1 < 0, \end{cases} \\
U_{j,3} &= \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 > 0 \\ Q(x), & \text{если } x_1 \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Из [2] следует

$$\|U_{j,1}\|_\gamma \leq C_{13} \|U(x)\|_{s,m,\Omega}.$$

Как и в неравенствах (0.7), имеем

$$\int |\xi_1|^{2\gamma} |\tilde{U}_{j,3}|^2 d\xi \leq C_{14} (\|U\|_{s,m,\Omega}^2 + \int |Q(x)|^2 dx + \int |Q(x)|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx).$$

Так как

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\xi) &= 1, \quad \text{то} \quad \int |Q(x)|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx \\
&\leq \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx + \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,2}(x) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx,
\end{aligned} \tag{0.8}$$

где

$$G_{k,1}(x) = (1 - H(x_1 e^k))G_k(x), \quad G_{k,2}(x) = H(x_1 e^k)G_k(x), \quad G_k(x) = \Psi_k(D)Q(x).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} |G_{k,1}(x)|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx \\ & + 2 \int \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \sum_{j=k+1}^{\infty} \overline{G}_{j,1}(x) / |x_1|^{2\gamma} dx \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 \exp(2k\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\| \exp(2k\gamma). \end{aligned}$$

На носителе функции $G_{k,1}(x)$ справедливо неравенство $|x_1| \geq \exp(-k)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx = \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx \\ & + 2 \int \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \sum_{j=k+1}^{\infty} \overline{G}_{j,1}(x) / |x_1|^{2\gamma} dx \\ & \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{2k\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\| e^{2k\gamma} \right). \end{aligned}$$

Так как $\Psi_k(\xi) e^{k\gamma} \leq \Psi_k(\xi) e^{2\lambda\gamma}(\xi)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{2k\gamma} \leq C_{14} (\|G(x)\|_{\gamma,m}^2 + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|_{\gamma,m}^2).$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\| e^{2k\gamma} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{4k\gamma - 2j\gamma + (j-k)\gamma} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\|^2 e^{2j\gamma - (j-k)\gamma} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{2\gamma} \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{k\gamma - 2j\gamma + (j-k)\gamma} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\|^2 e^{2\gamma} e^{-(j-k)\gamma} \leq C_{15} (\|G(x)\|_{\gamma,m}^2 + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|_{\gamma,m}^2), \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\|^2 e^{2\gamma} e^{-(j-k)\gamma} \\ & = e^{2\gamma} (\|G_{2,1}(x)\|^2 e^{-\gamma} + \|G_{3,1}(x)\|^2 e^{-2\gamma} + \dots + \|G_{\nu,1}(x)\|^2 e^{-(\nu-1)\gamma} + \dots \\ & + \|G_{3,1}(x)\|^2 e^{-\gamma} + \dots + \|G_{\nu,1}(x)\|^2 e^{-(\nu-2)\gamma} + \dots \\ & \quad \dots \dots \dots \\ & \quad + \|G_{\nu,1}(x)\|^2 e^{-\gamma} + \dots) \\ & \leq C_{16} (\|G(x)\|_{\gamma,m}^2 + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|_{\gamma,m}^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\int \left| \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx \leq C_{17} (\|G(x)\|_{2\gamma}^2 + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|_{\gamma,m}^2).$$

Осталось оценить второе слагаемое правой части неравенства (0.8). Ясно, что

$$\begin{aligned} & \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,2}(x) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx \leq I_1 + I_2, \text{ где} \\ & I_1 = \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} (G_{k,2}(x) - H(x_1 e^k) G_k(0, x')) \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx, \\ & I_2 = \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} H(x_1 e^k) G_k(0, x') \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx; \\ & I_1 = \int_{x_1 < 0} \left| \sum_{k=1}^{\infty} H(x_1 e^k) \int \partial_t G_k(t, x') dt \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx \\ & \leq C_{18} \int \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} H(x_1 e^k) H(x_1 e^j) / |x_1|^{-1+2\gamma} dx_1 \|\partial_{x_1} G_k(x)\| \|\partial_{x_1} G_j(x)\| \\ & \leq C_{19} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \exp(-2j + 2\gamma j) \|\partial_{x_1} G_k(x)\| \|\partial_{x_1} G_j(x)\| \\ & \leq C_{20} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\partial_{x_1} G_k(x)\|^2 \exp(-2k + 2\gamma k) \sum_{j=k}^{\infty} \exp(-2j + 2k) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \|\partial_{x_1} G_j(x)\|^2 \exp(-2j + 2\gamma j) \sum_{k=1}^j \exp(-2\gamma k) \right) \leq C_{21} \|G(x)\|_{2\gamma}^2. \end{aligned}$$

Оценка интеграла I_2 следует из того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(0, x') = 0, \quad I_2 = \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} (1 - H(x_1 e^k)) G_k(0, x') \right|^2 / |x_1|^{2\gamma} dx.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа.
- М.: Наука, 1984. - 360 с.
2. Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных.-Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, 197, 54-112.
3. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. -М.: Мир, 1985. - 472 с.
4. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения// Псевдодифференциальные операторы. - М.: Мир, 1967. - С.297-367.

Дата поступления 19.05.2010

About some method of extending of the function in spaces of Sobolev and Slobodetskii

© G. A. Smolkin²

Abstract. The problem of extending of the function out the region considered in anisotropic spaces of Sobolev and Slobodetskii defined traces its derivatives on the boundary. Elements of the theory pseudodifferential operators, a special partition of unity of the dual variable are used in the proof of the theorem. The results can be applied in the study of a priory estimates in the boundary value problems for partial differential equations.

Key Words: extending of functiobns, spaces of Sobolev and Slobodetskii, Pseudodifferential operators.

REFERENCES

1. Egorov, Yu. V. Linear differential equations of principal type.
- M.: Naula, 1984. - 360 p.
2. Slobodetskii, L.N., Generalized Sobolev spaces and their application to boundary-value problems for partial differential equations. - Sci. notes of Leningrad pedagogical institute, 1958, 197, 54-112.
3. Taylor, M. E. Pseudodifferential operators. – M.: Mir, 1985. - 472 p.
4. Hormander L. Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations // Pseudodifferential operators. - M.: Mir, 1967. – P. 297 – 367.

²Associate professor of differential equations chair, Mordovian state university after N. P. Ogarev, Saransk.

УДК 004.032.26

Об одном методе сегментации растровых изображений с помощью нейронных сетей встречного распространения

© А. А. Ферцев¹

Аннотация. В работе приведены теоретические основания сегментации изображений с помощью нейронных сетей встречного распространения. Описаны практические подходы, использованные при построении программного комплекса.

Ключевые слова: сегментация изображений, обучение с учителем, нейронные сети встречного распространения, метод выпуклой комбинации.

1. Введение

Основной математической моделью, используемой в данной работе, является дискретная модель изображения. Согласно [1] и [2] будем представлять дискретное изображение в виде прямоугольной матрицы $A = (a_{ij})$, $n \times m$. Элементы матрицы a_{ij} есть пиксели изображения, величина a_{ij} показывает яркость пикселя (или уровень серого). В данной работе используются черно-белые изображения, имеющие 256 градаций яркости (8-битные изображения).

2. Сегментация изображений

Сегментацией изображения называется процесс разбиения изображения на области по заранее известному критерию. Предполагается, что области соответствуют реальным объектам, или их частям, а границы областей соответствуют границам объектов.

Задачи сегментации делятся на два класса:

- выделение областей изображения с известными свойствами
- разбиение изображения на однородные области

В первом случае задача сегментации состоит в поиске определенных областей, о которых имеется априорная информация (например, известен цвет, форма областей, или области представляют собой изображения известного объекта).

Во втором случае никакая априорная информация о свойствах областей не используется, зато на само разбиение изображения накладываются некоторые условия (например, все области должны быть однородны по цвету и текстуре). Так как при такой постановке задачи сегментации не используется априорная информация об изображенных объектах, то методы этой группы универсальны и применимы к любым изображениям.

¹Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; Alex.Fertsev@metaproducts.com

3. Нейронная сеть встречного распространения

Нейронная сеть встречного распространения объединяет два типа нейронных сетей – самоорганизующаяся карта Кохонена [3] и «звезда» Гроссберга [4]. Их объединение ведет к свойствам, которых нет ни у одного из них в отдельности. Обобщающая способность сети позволяет получать правильный выход даже при приложении входного вектора, который является неполным или слегка неверным. Это позволяет использовать данную сеть для распознавания образов, восстановления образов и усиления сигналов.

На рисунке 3.1 показана упрощенная версия сети встречного распространения, используемая в данной работе.

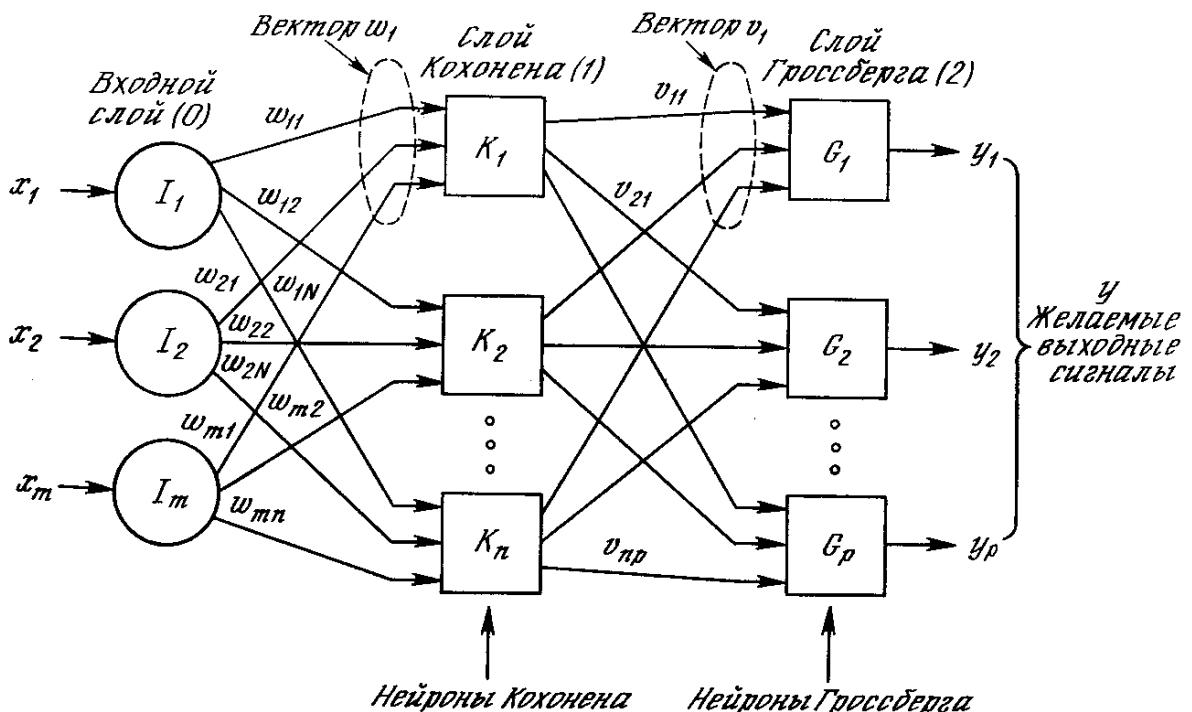


Рисунок 3.1

Сеть встречного распространения

Нейроны слоя 0 (показанные кружками) служат лишь точками разветвления и не выполняют вычислений. Каждый нейрон слоя 0 соединен с каждым нейроном слоя 1 (называемого слоем Кохонена) отдельным весом w_{mn} . Эти веса в целом рассматриваются как матрица весов W . Аналогично, каждый нейрон в слое Кохонена (слой 1) соединен с каждым нейроном в слое Гроссберга (слой 2) весом v_{np} . Эти веса образуют матрицу весов V .

Как и многие другие сети, встречное распространение функционирует в двух режимах: в нормальном режиме, при котором принимается входной вектор X и выдается выходной вектор Y , и в режиме обучения, при котором подается входной вектор и веса корректируются, чтобы дать требуемый выходной вектор.

Каждый обрабатывающий элемент слоя Кохонена подсчитывает свою входную интенсивность I_j в соответствии в формулой:

$$I_j = D(W_j, X) \quad (1), \quad (3.1)$$

где $D(W_j, X)$ – некоторая мера расстояния между W и X . В текущей реализации $D(W_j, X) = \sum_i x_i w_{ji}$

При реализации закона Кохонена, как только каждый обрабатывающий элемент (нейрон) подсчитал свою входную интенсивность, между ними происходит соревнование, цель которого – нахождение элемента с наибольшим значением интенсивности. Как только будет найден победитель такого соревнования, его выход полагается равным 1. После этого происходит изменение весов в соответствии с законом обучения Кохонена:

$$W_j(t+1) = \begin{cases} (1 - \alpha) W_j(t) + \alpha X, & j = k(\text{победитель}) \\ W_j(t), & j \neq k \end{cases}, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (3.2)$$

В начале процесса обучения $\alpha \cong 1$, а затем по мере обучения уменьшается до величины $\alpha = 0.1$. Использования коэффициента α объясняется тем, что вначале векторы входных данных и векторы весов нейронов могут сильно различаться и поэтому величина изменения весов должна быть достаточно большой. С течением процесса обучения значение весов нейронов Кохонена стремится к средним значениям обучающих векторов, поэтому величина изменения весов нейронов должна уменьшаться.

Слой Гроссберга функционирует следующим образом. Его выход NET является взвешенной суммой выходов k_1, k_2, \dots, k_n слоя Кохонена, образующих вектор K . Вектор соединяющих весов, обозначенный через V , состоит из весов $v_{11}, v_{21}, \dots, v_{np}$. Тогда выход NET каждого нейрона Гроссберга есть

$$NET_j = \sum_i k_i v_{ij} \quad (3.3)$$

где NET_j – выход j -го нейрона Гроссберга.

Слой Гроссберга обучается по следующему алгоритму. Входной вектор, являющийся выходом слоя Кохонена, подается на слой нейронов Гроссберга, и выходы слоя Гроссберга вычисляются, как при нормальном функционировании. Далее, каждый вес корректируется. Величина коррекции веса пропорциональна разности между весом и требуемым выходом нейрона Гроссберга, с которым он соединен

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + \beta(y_j - v_{ij}(t))k_i \quad (3.4)$$

где k_i – выход i -го нейрона Кохонена; y_j – j -ая компонента вектора желаемых выходов.

Первоначально β берется равным ≈ 0.1 и затем постепенно уменьшается в процессе обучения.

Отсюда видно, что веса слоя Гроссберга будут сходиться к средним величинам от желаемых выходов, тогда как веса слоя Кохонена обучаются на средних значениях входов. Обучение слоя Гроссберга – это обучение с учителем, алгоритм располагает желаемым выходом, по которому он обучаются. Обучающийся без учителя, самоорганизующийся слой Кохонена дает выходы в недетерминированных позициях. Они отображаются в желаемые выходы слоем Гроссберга.

Метод обучения Кохонена обладает полезной и интересной способностью извлекать статистические свойства из множества входных данных. Как показано Кохоненом [3], для полностью обученной сети вероятность того, что случайно выбранный входной вектор (в соответствии с функцией плотности вероятности входного множества) будет ближайшим к любому заданному весовому вектору, равна $1/k$, где k – число нейронов Кохонена. Это является оптимальным распределением весов на гиперсфере. (Предполагается, что используются все весовые векторы).

Также необходимо отметить ряд практических подходов, примененных в текущей реализации сети встречного распространения для сегментации изображений.

Вначале все векторы обучающей выборки нормируются. В этом случае процесс обучения представляет собой перемещение вектора весов нейрона навстречу вектору обучающей выборки на гиперсфере. На рисунке 3.2 показан двумерный случай обучения.

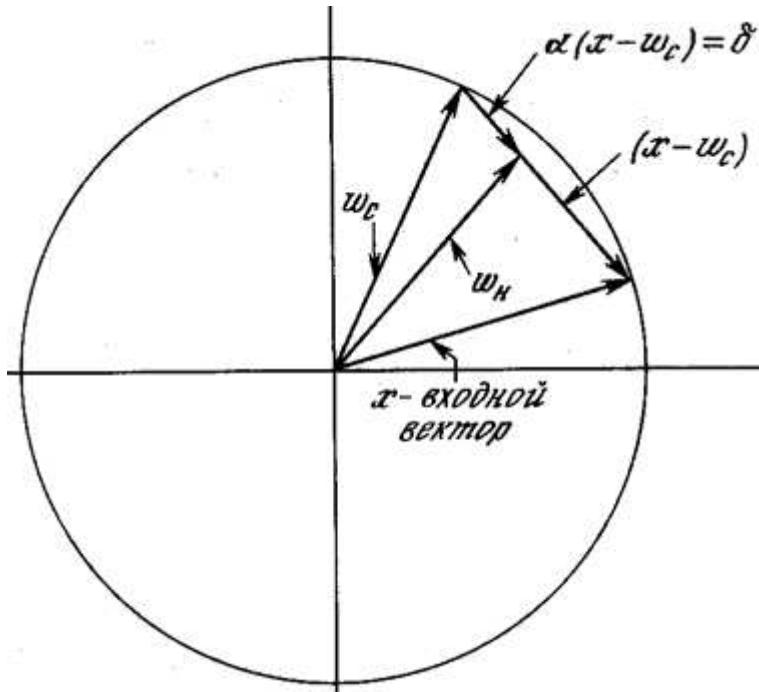


Рисунок 3.2

Вращение весового вектора в процессе обучения;

На рисунке 3.2 w_H – вектор новых весовых коэффициентов, w_C – вектор старых весовых коэффициентов.

Немаловажным является вопрос выбора начальных значений весов нейронов. Классическим является подход, в ходе которого веса нейронов получают небольшие случайные значения. В результате этого весовые векторы равномерно распределяются по поверхности гиперсферы. Однако, на практике векторы входных данных часто имеют распределение, близкое к нормальному, то есть группируются в относительно малой части гиперсферы. В текущей реализации сети встречного распространения для сегментации изображений применяются два подхода, призванные минимизировать негативные последствия начального задания весов нейронов.

Первый подход модифицирует веса и входные данные по методу *выпуклой комбинации* (convex combination method). Его суть состоит в том, что все веса приравниваются одной и той же величине

$$w_i = 1/\sqrt{n} \quad (3.5)$$

где n – число компонент каждого весового вектора. Благодаря этому все весовые векторы совпадают и имеют единичную длину. Каждой же компоненте вектора обучающей выборки придается значение

$$x_i = \alpha x_i + \frac{1 - \alpha}{\sqrt{n}} \quad (3.6)$$

где n – число входов. Вначале α очень мало, вследствие чего все входные векторы имеют длину, близкую к $1/\sqrt{n}$, и почти совпадают с векторами весов. В процессе обучения сети α постепенно возрастает, приближаясь к единице. Это позволяет разделять входные векторы и окончательно приписывает им их истинные значения.

Второй подход, предложенный DeSieno [8], модифицирует закон обучения Кохонена таким образом, что каждый нейрон Кохонена получает ячейку памяти, в которой хранится число эпох обучения, в которые нейрон становился «победителем». Как только это число достигает определенного значения (например, $1/k$, где k – число нейронов Кохонена), нейрон временно исключается из поиска «победителя». Это также позволяет сгладить влияние начального задания весов нейронов и входных данных.

В приложении к сегментации изображений обучающая выборка состоит из окрестностей 3×3 каждого пикселя изображения (получается массив векторов $X_j = x_1, \dots, x_9$). Число нейронов Кохонена равно числу компонент обучающих векторов, а число нейронов Гроссберга – числу классов пикселей, выделяемых на изображении. Данная конфигурация не является единственной, в настоящее время идет ее тестирование. В частности, в [7] предложена конфигурация сети с другими параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 312 с.
2. Р. Гонсалес, Р. Вудс Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
3. Kohonen, T. Self-organization and Associative Memory. Springer-Verlag: New York, 1997, 428р
4. Grossberg S. 1971. Embedding fields: Underlying philosophy, mathematics, and applications of psycho-logy, phisiology, and anatomy. Journal of Cybernetics, 1:28-50.
5. Hecht-Nielsen R. 1987b. Counterpropagation networks. Applied Optics 26(23): 4979-84.
6. Hecht-Nielsen R. 1988. Applications of Counterpropagation networks. Newral Networks 1: 131-39.
7. С.В.Ильин, М.Н.Рычагов Сегментация ультразвуковых изображений с помощью нейронных сетей встречного распространения: Труды Нижегородской акустической научной сессии, ННГУ, 2002.
8. DeSieno D. 1988. Adding a conscience to competitive learning Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, pp. 117-24. San Diego, CA: SOS Printing.

Дата поступления 19.05.2010

One method of segmentation of raster images using counter-propagation neural networks

© A. A. Fertsev²

Abstract. In the work theoretical bases of image segmentation using counter-propagation neural networks are considered. A review of practical approaches used in software is included.

Key Words: image segmentation, supervised learning, counter-propagation neural networks, convex combination method.

REFERENCES

1. Pratt W. Digital image processing. Wiley: New York , 1978, 312 p.
2. R. Gonzalez, R. Woods Digital Image Processing, Addison-Wesley Publishing Company, 1992, 528p.
3. Kohonen, T. Self-organization and Associative Memory. Springer-Verlag: New York, 1997, 428p
4. Grossberg S. 1971. Embedding fields: Underlying philosophy, mathematics, and applications of psychology, physiology, and anatomy. Journal of Cybernetics, 1:28-50.
5. Hecht-Nielsen R. 1987b. Counterpropagation networks. Applied Optics 26(23): 4979-84.
6. Hecht-Nielsen R. 1988. Applications of Counterpropagation networks. Neural Networks 1: 131-39.
7. S. V. Il'in, M. N. Rychagov Segmentation of ultrasound images using counter-propagation neural networks: Trudy Nizhegorodskoj akusticheskoy nauchnoy sessii, NNGU, 2002.
8. DeSieno D. 1988. Adding a conscience to competitive learning Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, pp. 117-24. San Diego, CA: SOS Printing.

²Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; Alex.Fertsev@metaproducts.com

УДК 517.937

Естественные расширения одного класса квазиэндоморфизмов пространства Лебега

© В. Г. Шарапов¹

Аннотация. В статье предлагается метод построения естественных расширений квазиэндоморфизмов пространства Лебега и показывается, что эти расширения могут использоваться для нахождения инвариантной меры.

Ключевые слова: квазиэндоморфизмы пространства Лебега, естественные расширения, инвариантная мера.

1. Введение

Пусть (M, \mathcal{F}, μ) — пространство Лебега, т.е. пространство, изоморфное отрезку $(0, 1]$ с мерой Лебега.

Квазиэндоморфизмом называется измеримое несингулярное (прообраз множества меры 0 имеет меру 0) преобразование пространства M . Квазиавтоморфизмом называется взаимнооднозначный квазиэндоморфизм, обратный к которому есть также квазиэндоморфизм.

Измеримое разбиение ξ пространства M есть разбиение на прообразы точек для некоторого измеримого преобразования пространства M .

Для всякого измеримого разбиения ξ M/ξ есть фактор-пространство, т.е. пространство, элементами которого являются элементы разбиения ξ .

2. Постановка задачи

Пусть $M = (0, 1]$, f — действительная функция, определённая на $(0, 1]$ и удовлетворяющая условиям: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 2. f непрерывна и строго возрастает. 3. Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) > x_2 - x_1$. 4. $f(1) = K$, где K — натуральное число или $+\infty$.

Пусть $y = Tx = f(x) \pmod{1}$, $x \in (0, 1]$, $T1 = 1$. Вследствие свойства 2 почти всюду существует производная $f'(x)$, а в силу свойства 3 $f'(x) > 1$. Отрезок $(0, 1]$ разбивается на конечное или счётное число отрезков Δ_i , $\Delta_i = (x_{i-1}, x_i]$, такие что $x_0 = 0$ и $f(x_i) = 1$, $i \geq 1$. При этом $\forall x \in \Delta_i$; $Tx = x_{i-1} + \int_0^x m_i(y) dy$, где $m_i(y) = \frac{1}{f'(x)}$, $x \in \Delta_i$ и $y = f(x) \pmod{1}$.

3. Приведение квазиэндоморфизмов данного класса к инвариантной мере

Пространство M изоморфно множеству, состоящему из отрезков $M_i = \left\{ (x, y) : 0 < x \leq 1, y = 1 + \frac{1}{i} \right\}$, соответствующих отрезкам Δ_i . Элемент разбиения

¹Доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления, Волгоградский государственный университет, г. Волгоград; vsharapov99@mail.ru.

ξ — множество $C_x = \left\{ x, 1 + \frac{1}{i} \right\}$ с фиксированной координатой x , точка которой $\left(x, 1 + \frac{1}{i} \right)$ имеет условную меру $m_i(x)$. В случае эндоморфизмов, т.е. сохраняющих меру преобразований, мера μ_ξ в пространстве M/ξ , индуцированная мерой μ , обладает свойством $\mu_\xi(C_x) = 1 \quad \forall x \in (0, 1]$. В случае квазиэндоморфизмов меры $\mu_\xi(C_x)$ образуют измеримую функцию $g(x) = \sum_i m_i(x)$ со свойствами $g(x) \geq 0, \int_0^1 g(x)dx = 1$. В дальнейшем удобнее использовать замену x на y и y на x , т.е. вместо C_x писать C_y , а вместо $g(x)$ писать $g(y)$.

Приведём квазиэндоморфизм T к инвариантной мере следующим образом: в каждом элементе C_y введём условные меры $m_i^*(y^*)$, где $m_i^*(y^*) = \frac{m_i(y)}{g(y)}$, а $y^* = \int_0^y g(t)dt$.

Рассмотрим пример.

$$y = Tx = \begin{cases} \frac{5}{2}x, & 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{5}{8} + \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{4} \right), & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 \left(x - \frac{1}{2} \right), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

$$m_1(y) = \frac{1}{f'(x)} = \begin{cases} \frac{2}{5}, & 0 < y \leq \frac{5}{8}, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{3}, & \frac{5}{8} < y \leq 1, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$m_2(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2}, \quad 0 < y \leq 1, \quad \frac{1}{2} < x \leq 1.$$

T не сохраняет меру, так как, например,

$$\mu \left(T^{-1} \left(0, \frac{5}{8} \right] \right) = \mu \left(\left(0, \frac{1}{4} \right] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{16} \right] \right) = \frac{9}{16} \neq \mu \left(\left(0, \frac{5}{8} \right] \right).$$

Функция плотности меры μ_ξ

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}, & 0 < y \leq \frac{5}{8}, \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}, & \frac{5}{8} < y \leq 1. \end{cases} \quad \int_0^1 g(y)dy = 1.$$

Приводим к инвариантной мере

$$m_1^*(y^*) = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{9}, \quad 0 < y^* \leq \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{16},$$

$$m_1^*(y^*) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7}, \quad \frac{9}{16} < y^* \leq 1,$$

$$m_2^*(y^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}, \quad 0 < y^* \leq \frac{9}{16},$$

$$m_2^*(y^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{7}, \quad \frac{9}{16} < y^* \leq 1.$$

В результате получаем эндоморфизм T_1 с инвариантной мерой

$$y = T_1 x = \begin{cases} \frac{9}{4}x, & 0 < x \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < y \leq \frac{9}{16}, \\ \frac{9}{16} + \frac{7}{4} \left(x - \frac{1}{4} \right), & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{16} < y \leq 1 \\ \frac{9}{5} \left(x - \frac{1}{2} \right), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{13}{16}, \quad 0 < y \leq \frac{9}{16}, \\ \frac{9}{16} + \frac{7}{3} \left(x - \frac{13}{16} \right), & \frac{13}{16} < x \leq 1, \quad \frac{9}{16} < y \leq 1. \end{cases}$$

4. Построение естественных расширений

В [1] показано, как для эндоморфизмов T пространства M строятся естественные расширения — автоморфизмы пространства $M \times (0, 1]$. Используя эту технику можно построить расширения кусочно-монотонных квазиэндоморфизмов.

Пусть T_1 — квазиэндоморфизмы рассматриваемого семейства и $T_1^{-1}x = (x_1, x_2, \dots) = C_x$ — элемент разбиения $\xi = T_1^{-1}\varepsilon$, где ε — разбиение на точки. При этом точки x_i имеют условные меры $m_i(x) = \frac{1}{|f'(x_i)|}$. Согласно построению естественных расширений эндоморфизмов (см. [1]) полагаем

$$\begin{aligned} T_2(x_1, y) &= (x, ym_1(x)), 0 < y \leq 1; \\ T_2(x_2, y) &= (x, m_1(x) + ym_2(x)), 0 < y \leq 1; \quad (1) \\ \dots \\ T_2(x_n, y) &= (x, m_1(x) + \dots + m_{n-1}(x) + ym_n(x)), 0 < y \leq 1; \end{aligned}$$

T_2 не есть квазиэндоморфизм, так как его образом является не $Mx(0, 1]$, а множество точек (x, y) , для которых $x \in (0, 1]$, а y удовлетворяет условию $0 < y \leq g(x)$, т.е. образ — криволинейная трапеция, в которой один из отрезков $(0, 1]$ заменён кривой $g(x) = \sum_i m_i(x), 0 < x \leq 1$.

T_2 является взаимнооднозначным квазигомоморфизмом пространства $M \times (0, 1]$ на указанную криволинейную трапецию площади 1. Для рассмотренного выше примера

$$y = T_2(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{5}{2}x, \frac{2}{5}y \right), & 0 < x \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < y \leq 1, \\ \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{2}(x - \frac{1}{4}), \frac{2}{3}y \right), & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < y \leq 1, \\ \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right), \frac{2}{5} + \frac{1}{2}y \right), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{13}{16}, \quad 0 < y \leq 1, \\ \left(\frac{5}{8} + 2(x - \frac{13}{16}), \frac{2}{3} + \frac{1}{2}y \right), & \frac{13}{16} < x \leq 1, \quad 0 < y \leq 1. \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}, & 0 < y \leq \frac{5}{8}, \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}, & \frac{5}{8} < y \leq 1. \end{cases} \int_0^1 g(y) dy = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{8} = 1.$$

Образом куба $(0, 1] \times (0, 1]$ получается множество $\left(\left(0, \frac{5}{8}\right] \times \left(0, \frac{9}{10}\right] \right) \cup \left(\left(\frac{5}{8}, 1\right] \times \left(0, \frac{7}{6}\right] \right)$ (3) меры 1.

Чтобы сделать T_2 автоморфизмом, нужно вторые сомножители в декартовых произведениях в (3) сделать отрезками $(0, 1]$, т.е. умножить $\left(0, \frac{9}{10}\right]$ на $\frac{10}{9}$, а $\left(0, \frac{7}{6}\right]$ умножить на $\frac{6}{7}$. Чтобы площади прямоугольников не изменились, длины первых сомножителей в декартовых произведениях нужно разделить соответственно на $\frac{10}{9}$ и на $\frac{6}{7}$. То есть надо заменить (3) на $\left(\left(0, \frac{9}{16}\right] \times (0, 1]\right) \cup \left(\left(\frac{9}{16}, 1\right] \times (0, 1]\right)$.

Чтобы было $0 < y \leq 1$, мы умножили y на $\frac{10}{9}$ при $x \leq \frac{5}{8}$ и умножили на $\frac{6}{7}$ при $x > \frac{5}{8}$. Поэтому в (2) мы тоже умножим y на эти числа при соответствующих x , а чтобы общая площадь не стала больше 1, умножим в (2) x соответственно на $\frac{9}{10} \left(\frac{7}{6}\right)$. В результате получится автоморфизм T_3 пространства $(0, 1] \times (0, 1]$

$$T_3(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{9}{4}x, \frac{4}{9}y\right), & 0 < x \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < y \leq 1, \\ \left(\frac{9}{16} + \frac{7}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right), \frac{4}{7}y\right), & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < y \leq 1, \\ \left(\frac{9}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right), \frac{4}{9} + \frac{5}{9}y\right), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{13}{16}, \quad 0 < y \leq 1, \\ \left(\frac{9}{16} + \frac{7}{3}x, \frac{4}{7} + \frac{3}{7}y\right), & \frac{13}{16} < x \leq 1, \quad 0 < y \leq 1. \end{cases}$$

Мы получили естественное расширение автоморфизма T_2 , т.е. приведение к инвариантной мере расширения (1) квазиэндоморфизма T приводит к естественному расширению эндоморфизма T_1 , полученного из T приведением к инвариантной мере. Отсюда получается, что построение расширения (1) может быть использовано для нахождения инвариантной меры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Шарапов В.Г. Измеримые разбиения и естественные расширения эндоморфизмов пространства Лебега// Труды СВМО, 2006, т. 8, №2, С.24—27.

Дата поступления 19.05.2010

Natural extensions of one class of quasiendomorphisms of Lebesgue space

© V. G. Sharapov²

Abstract. In the article a construction of natural extensions of quasiendomorphisms of Lebesgue space is given. It is shown that these extentions can be used for construction of invariant measure.

Key Words: quasiendomorphisms of Lebesgue space,natural extensions, invariant measure.

REFERENCES

1. Sharapov V. G. Measurable partitions and natural extensions of endomorphisms of Lebesgue spaces//Trudy SVMO, 2006, V.8, No2, 24–27. In Russian

²Associate Professor of Fundamental Informatics and Optimal Control Chair, Volgograd State University, Volgograd;vsharapov99@mail.ru

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Erratum to: Stability of equilibrium and periodic solutions of a delay equation modeling leukemia

© Anca-Veronica Ion¹, Raluca-Mihaela Georgescu²

Annotation. Published in MVMS Journal, 11, 2(2009), 146-157.

Key words: delay differential equations; stability; Hopf bifurcation; normal forms.

Unhappily, in our paper some errors are present. First, in Subsection 4.2, the common correct value for e_{11} and e_{22} is $e_{11} = e_{22} = 1 - e^{\mu r}$, that becomes zero only when $\mu = 0$. This does not affect the computations for the first Lyapunov coefficient, since this one is computed on the center manifold, where $\mu = 0$.

The second and more important error is contained in Subsection 4.4, where the second general relation that determines the functions w_{jk} should have been written as:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(0) u^j \bar{u}^k + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} g_{jk} u^j \bar{u}^k \varphi_1(0) + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} \bar{g}_{jk} \bar{u}^j u^k \varphi_2(0) = \\ = -(B_1 + \delta) \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(0) u^j \bar{u}^k + k B_1 \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(-r) u^j \bar{u}^k + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} f_{jk} u^j \bar{u}^k. \end{aligned}$$

The determination of the functions w_{20} and w_{11} is, of course, affected by this error. The correct forms of the values in 0 and $-r$ of these two functions are:

$$\begin{aligned} w_{20}(0) = c \left[e^{2\omega^* ir} f_{20} + g_{20} \left(-\frac{k B_1 i}{\omega^*} + \frac{k B_1 i}{\omega^*} e^{i\omega^* r} - e^{2i\omega^* r} \right) + \right. \\ \left. + \bar{g}_{02} \left(-\frac{k B_1 i}{3\omega^*} + \frac{k B_1 i}{3\omega^*} e^{3i\omega^* r} - e^{2i\omega^* r} \right) \right], \\ w_{20}(-r) = c \left[f_{20} + g_{20} \left(1 - 2e^{\omega^* ir} - \frac{B_1 + \delta}{\omega^*} i (1 - e^{\omega^* ir}) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \bar{g}_{02} \left(1 + 2e^{3\omega^* ir} + \frac{B_1 + \delta}{\omega^*} i (1 - e^{3\omega^* ir}) \right) \right], \end{aligned}$$

where $c = [-kB_1 + (B_1 + \delta) \cos(2\omega^* r) - 2\omega^* \sin(2\omega^* r) - i(2\omega^* \cos(2\omega^* r) + (B_1 + \delta) \sin(2\omega^* r))] / [(kB_1)^2 + (B_1 + \delta)^2 + (2\omega^*)^2 - 2kB_1(B_1 + \delta) \cos(2\omega^* r) + 4kB_1\omega^* \sin(2\omega^* r)]$, and

$$\begin{aligned} w_{11}(0) = c_1 \left[f_{11} - g_{11} - \bar{g}_{11} + \frac{k B_1 i}{\omega^*} (g_{11}(1 - e^{-\omega^* ir}) - \bar{g}_{11}(1 - e^{\omega^* ir})) \right], \\ w_{11}(-r) = c_1 \left[f_{11} - g_{11} - \bar{g}_{11} + \frac{(B_1 + \delta)i}{\omega^*} (g_{11}(1 - e^{-\omega^* ir}) - \bar{g}_{11}(1 - e^{\omega^* ir})) \right], \end{aligned}$$

¹"Gh. Mihoc-C. Iacob" Institute of Mathematical Statistics and Applied Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania

²University of Pitești, Romania

with $c_1 = 1/(B_1 + \delta - kB_1)$.

We posted the correct form of the paper on the web page <http://arxiv.org>, at <http://arxiv.org/abs/1001.5354>.

We apologize to the readers of "Journal of Middle Volga Mathematical Society" for the confusion generated by our mistakes.

Accepted 28.04.2010

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе ТЕХ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой \input в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Внимание! Новые правила. Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду \headerRus. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность,  
место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, го-  
род; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать комманду \headerEn. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы,  
город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-  
mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду \headerFirstEn с такими же параметрами, как для команды \headerRus.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды \sect с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами \subsection, \subsubsection и \paragraph.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами \proof и \proofend (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtou{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , D_i в текст статьи, необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\Delta}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатия

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`.

Для оформления списка литературы на английском языке следует использовать окружение `thebibliographyEn`.

Сам список оформляется в виде последовательности команд `\bibitem`, имеющих один параметр:

`\bibitem{метка для ссылки на источник}`

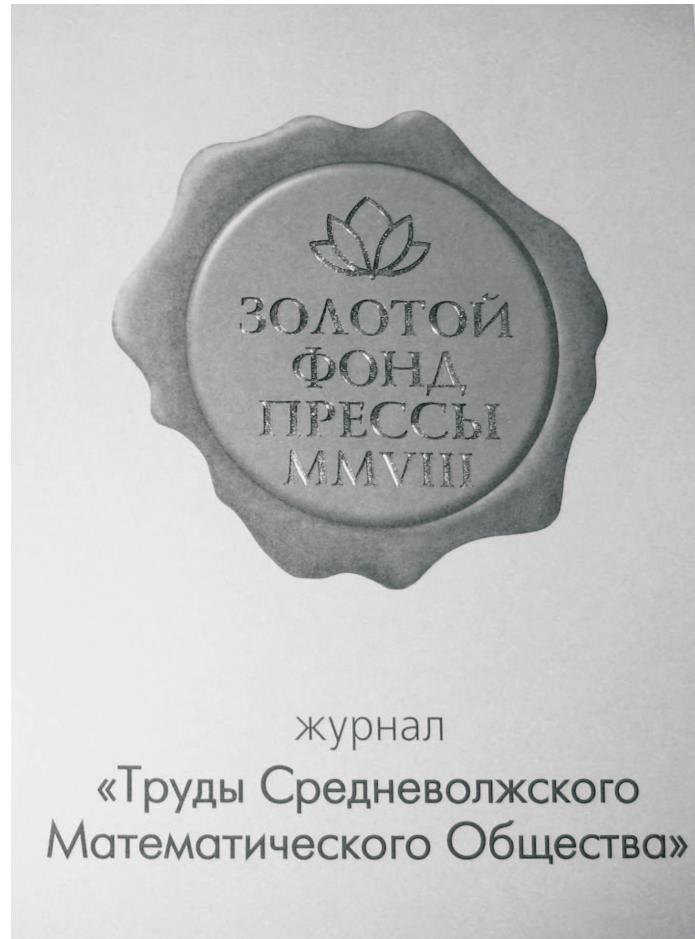
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcitem` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiK_TE_X 2.2, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Алексеенко С. Н.	41	Медведев В.С.	24
Анкилов А. В.	7	Нагорных С. Н.	41
Бадокина Т. Е.	46	Потапова И. С.	74
Булатов М. В.	52	Рамазанов И. Р.	67
Вельмисов П. А.	7	Рахвалов Н. П.	52
Гринес В. З.	24	Рахматуллова Д. Э.	46
Губайдуллин И. М.	67	Рязацева И.П.	33
Гуревич Е. Я.	24	Смолкин Г. А.	79
Жужома Е. В.	59	Ферцев А. А.	86
Исаенкова Н. В.	59	Шарапов В. Г.	92
Кадикова Р. Н.	67		
Куприна Л. А.	59	Georgescu R. - M.	97
Лаврентьева Ю. С.	67	Ion A. - V.	97
Макеева О. В.	46	Ta Duy Phuong	52



журнал
«Труды Средневолжского
Математического Общества»

**Журнал Средневолжского
математического общества**

Том 12, № 1

Для заметок

Для заметок