DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.43–57 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.926:517.929.4

К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора

В. И. Никонов

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Предлагается новый геометрический подход к исследованию частичной устойчивости линейных систем, основанный на применении геометрической теории линейных операторов. Привлекая теорию сопряженных пространств и сопряженных линейных операторов, строятся базисы, в которых исследуемая система принимает канонический вид. Рассматривается циклическое подпространство относительно сопряженного линейного оператора. Строится базис сопряженного пространства линейного оператора, в котором его матрица принимает канонический вид. Этому базису соответствует двойственный базис исходного линейного пространства. Тогда в паре базисов дуальных пространств, исследуемая система принимает наиболее простой вид. Реализация геометрических свойств системы осуществляется с помощью неособого линейного преобразования в пространстве части компонент фазового вектора системы. Это позволяет произвести декомпозицию исследуемой системы с целью получения необходимых и достаточных условий частичной устойчивости линейной системы. В эквивалентной системе выделяется независимая подсистема, характер устойчивости которой определяет поведение исследуемой компоненты фазового вектора исходной системы. Устанавливается взаимосвязь частичной устойчивости системы с существованием инвариантного подпространства линейного оператора, характеризующего динамику системы. Канонический вид полученной подсистемы позволяет легко исключить вспомогательные переменные и записать эквивалентное этой системе уравнение. Показано применение полученных результатов к решению задачи частичной устойчивости для линейных систем с постоянными коэффициентами из классов обыкновенных дифференциальных уравнений, дискретных и систем с отклоняющимся аргументом. Приведен пример линейной системы дифференциальных уравнений, иллюстрирующий полученный результат.

Ключевые слова: частичная устойчивость, циклическое подпространство, минималный аннулирующий многочлен, сопряженное пространство

Для цитирования: Никонов В. И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 43–57. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.43–57

1. Введение

В настоящее время имеется несколько подходов к исследованию частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами [1–4],[6; 7]. Несмотря на то, что теория частичной устойчивости линейных систем изучена достаточно полно, использование новых геометрических свойств этих объектов позволяет получить более полное представление о динамике исследуемых компонент фазового вектора таких систем и использовать их при решении подобных задач.

Данная статья посвящена геометрическим методам исследования частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. Используя геометрическую теорию линейных операторов [5], предлагается дальнейшее развитие результатов работы [8].

2. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A_* x(t), \tag{2.1}$$

где $x \in R^n, A_* \in R^{n\times n}$. Требуется исследовать устойчивость системы (2.1) относительно заданной компоненты фазового вектора x.

Предположим, что требуется исследовать устойчивость относительно первой компоненты. Учитывая это, представим фазовый вектор x в виде $x = (y, z)$, $y \in R$, $z \in R^p$, $n = 1 + p$.

Тогда система (2.1) представима в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay + bz, \\ \frac{dz}{dt} &= cy + Dz, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $y \in R, z \in R^p, a \in R, b \in R^{1\times p}, c \in R^{p\times 1}, D \in R^{p\times p}$.

Отметим, что т. к. исследуется устойчивость только по переменной y, то необходимо, чтобы это свойство системы (2.2) не зависело от выбора системы z-координат пространства, в которой система задана. В связи с этим, в пространстве R^p можно выбирать произвольный базис, что не должно повлиять на характер устойчивости системы (2.2) относительно переменной y.

Следовательно, проведя замену переменных

$$z = S^{-1}\overline{z}, \tag{2.3}$$

получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay + bS^{-1}\overline{z}, \\ \frac{d\overline{z}}{dt} &= Scy + SDS^{-1}\overline{z}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся теорией линейных операторов. Введем в рассмотрение линейные операторы

$$\mathcal{D} : R^p \to R^p, \mathcal{D}^* : R^{p*} \to R^{p*},$$

где R^{p*} – сопряженное пространство к R^p, $\mathcal{D}^*$ – сопряженный оператор к оператору $\mathcal{D}$. При этом, будем предполагать, что в стандартном базисе пространства R^p линейный оператор $\mathcal{D}$ имеет матрицу D.

Пусть $b^* = bz \neq 0$ – элемент сопряженного пространства R^{p*} заданный в стандартном базисе этого пространства. Тогда в силу конечномерности пространства R^{p*} найдется такое число $s \in N$, что векторы $b^*, \mathcal{D}^* b^*, \ldots, \mathcal{D}^{*s-1} b^*$ – линейно независимы, а вектор $\mathcal{D}^{*s} b^*$ является линейной комбинацией предыдущих векторов: $\mathcal{D}^{*s} b^* = -\gamma_{s-1} \mathcal{D}^{*s-1} b^* - \cdots - \gamma_1 b^*$. Таким образом,

$$\sigma(\lambda) = \lambda^s + \gamma_s \lambda^{s-1} + \cdots + \gamma_2 \lambda + \gamma_1,$$

где $0 \leq s \leq p$, является минимальным аннулирующим многочленом вектора b^* относительно линейного оператора $\mathcal{D}^*$. При этом $(\mathcal{D}^*)^k b^* = bD^k z-$ линейный функционал на линейном пространстве R^p.

Тогда справедливо соотношение

$$\sigma((\mathcal{D}^*)b^*) = 0.$$

Циклическое инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{D}^*$ сопряженного пространства R^{p*} имеет вид $U^* =< b^*, \mathcal{D}^* b^*, \ldots, \mathcal{D}^{*s-1} b^* >$, $\dim U^* = s$.

В качестве базиса пространства R^{p*} выберем

$$e^1 = b^*, e^2 = \mathcal{D}^* b^*, \ldots, e^s = \mathcal{D}^{*s-1} b^*, e^{s+1}, \ldots, e^p,$$

где векторы $e^{s+1}, \ldots, e^p$ дополняют базис циклического подпространства до базиса всего пространства R^{p*}.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_p$ – двойственный базис пространства R^p к введенному базису. При этом $e^j(e_i) = \delta_i^j$, $i, j = 1, \ldots, p$, где δ_i^j – символ Кронекера, а $e^j(e_i)$ – действие функционала e^j на векторе e_i.

Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2.1 *Если* $\mathrm{rang}\{b^*, \mathcal{D}^* b^*, \ldots, \mathcal{D}^{*p-1} b^*\} = s < p$, *то существует базис пространства* R^p, *в котором система* (2.2) *представима в виде*

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = ay + \overline{z}_1,\\
&\frac{d\overline{z}_1}{dt} = bcy + \overline{z}_2,\\
&\frac{d\overline{z}_2}{dt} = bDcy + \overline{z}_3,\\
&\cdots\\
&\frac{d\overline{z}_{s-1}}{dt} = bD^{s-2}cy + \overline{z}_s,\\
&\frac{d\overline{z}_s}{dt} = bD^{s-1}cy - \gamma_1 \overline{z}_1 - \gamma_2 \overline{z}_2 - \cdots - \gamma_s \overline{z}_s,\\
&\frac{d\overline{z}_{s+1}}{dt} = \overline{c}_{s+1} y + \theta_{s+1,1} \overline{z}_1 + \theta_{s+1,2} \overline{z}_2 + \cdots + \theta_{s+1,p} \overline{z}_p,\\
&\cdots\\
&\frac{d\overline{z}_p}{dt} = \overline{c}_p y + \theta_{p,1} \overline{z}_1 + \theta_{p,2} \overline{z}_2 + \cdots + \theta_{p,p} \overline{z}_p.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие теоремы 2.1. Рассмотрим элементы $bz, bDz, \ldots, bD^{s-1}z$, $z \in R^p$ сопряженного пространства R^{p*} в стандартном базисе $g^1 = z_1$, $g^2 = z_2$, ..., $g^p = z_p$. Очевидно, что $U^* =< bz, bDz, \ldots, bD^{s-1}z >$ – линейное подпространство в R^{p*}, такое, что $\dim\, U^* = s < p$. Учитывая, что линейное подпространство U^* – инвариантное подпространство сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$, найдем матрицу оператора $\mathcal{D}^*$ в базисе $\{e^1, e^2, \ldots, e^s, e^{s+1}, \ldots, e^p\}$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{D}^* e^1 = e^2, \\
\mathcal{D}^* e^2 = e^3, \\
\dots \\
\mathcal{D}^* e^{s-1} = e^s, \\
\mathcal{D}^* e^s = -\gamma_1 e^1 - \gamma_2 e^2 - \dots - \gamma_s e^s, \\
\mathcal{D}^* e^{s+1} = \theta_{s+1,1} e^1 + \theta_{s+1,2} e^2 + \dots + \theta_{s+1,p} e^p, \\
\dots \\
\mathcal{D}^* e^p = \theta_{p,1} e^1 + \theta_{p,2} e^2 + \dots + \theta_{p,p} e^p.
\end{array}
\tag{2.6}
$$

Тогда

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{D}^* e^i(e_j) = e^{i+1}(e_j) = \delta_j^{i+1}, (i = 1, \dots, s-1, j = 1, \dots, s), \\
\mathcal{D}^* e^s(e_j) = -\gamma_j, (j = 1, \dots, s), \mathcal{D}^* e^s(e_j) = 0, (j = s, \dots, p), \\
\mathcal{D}^* e^i(e_j) = \theta_{s+1,j}, (i = s+1, \dots, p, j = 1, \dots, p).
\end{array}
\tag{2.7}
$$

Таким образом, учитывая (2.6) и (2.7), в базисе $\{e^1, e^2, \dots, e^s, e^{s+1}, \dots, e^p\}$ матрица линейного оператора D^* примет вид

$$
D^*_{e^*} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\gamma_1 & \theta_{s+1,1} & \cdots & \theta_{p,1} \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\gamma_2 & \theta_{s+1,2} & \cdots & \theta_{p,2} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\gamma_3 & \theta_{s+1,3} & \cdots & \theta_{p,3} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\gamma_{s-1} & \theta_{s+1,s-1} & \cdots & \theta_{p,s-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\gamma_s & \theta_{s+1,s} & \cdots & \theta_{p,s} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \theta_{s+1,s+1} & \cdots & \theta_{p,s+1} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \theta_{s+1,p} & \cdots & \theta_{p,p}
\end{pmatrix}.
$$

Исходя из связи матриц операторов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ в двойственных базисах получим матрицу

$$
D_e = D^{*T}_{e^*} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \cdots & -\gamma_{s-1} & -\gamma_s & 0 & \cdots & 0 \\
\theta_{s+1,1} & \theta_{s+1,2} & \theta_{s+1,3} & \cdots & \theta_{s+1,s-1} & \theta_{s+1,s} & \theta_{s+1,s+1} & \cdots & \theta_{s+1,p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\theta_{p1} & \theta_{p2} & \theta_{p3} & \cdots & \theta_{p,s-1} & \theta_{ps} & \theta_{p,s+1} & \cdots & \theta_{pp}
\end{pmatrix}.
$$

Это значит, что в паре выбранных двойственных базисов система (2.2) представима в виде (2.5).
Доказательство завершено.

Замечание 2.1 *Действительно, переход от исходных базисов пространств R^{p^*} и R^p к соответствующим двойственным базисам этих пространств* *осуществляется с помощью линейного преобразования* (2.3)*, где матрицы* S^{-1} *и* S *имеют, соответственно, вид*

$$S^{-1} = (E_1, E_2, \ldots, E_s, E_{s+1}, \ldots, E_p)\,, S = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \ldots \\ E^s \\ E^{s+1} \\ \ldots \\ E^p \end{pmatrix},$$

где E^j *– координатные строки векторов* $e^1, e^2, \ldots, e^s, e^{s+1}, \ldots, e^p$ *в стандартном базисе пространства* R^{p*}*,* E_i *– координатные столбцы векторов* $e_1, e_2, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_p$ *в стандартном базисе пространства* R^p*.*

Таким образом, в паре двойственных базисов имеем

$$bS^{-1} = E^1 \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_s & E_{s+1} & \cdots & E_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E^1E_1 & E^1E_2 & \cdots & E^1E_s & E^1E_{s+1} & \cdots & E^1E_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Sc = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \ldots \\ E^s \\ E^{s+1} \\ \ldots \\ E^p \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} E^1c \\ E^2c \\ \ldots \\ E^sc \\ E^{s+1}c \\ \ldots \\ E^pc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ bDc \\ \ldots \\ bD^sc \\ E^{s+1}c \\ \ldots \\ E^pc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ bDc \\ \ldots \\ bD^sc \\ \overline{c}_{s+1} \\ \ldots \\ \overline{c}_p \end{pmatrix},$$

$$SDS^{-1} = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \ldots \\ E^s \\ E^{s+1} \\ \ldots \\ E^p \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_s & E_{s+1} & \cdots & E_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E^1DE_1 & E^1DE_2 & \cdots & E^1DE_s & E^1DE_{s+1} & \cdots & E^1DE_p \\ E^2DE_1 & E^2DE_2 & \cdots & E^2DE_s & E^2DE_{s+1} & \cdots & E^2DE_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E^{s-1}DE_1 & E^{s-1}DE_2 & \cdots & E^{s-1}DE_s & E^{s-1}DE_{s+1} & \cdots & E^{s-1}DE_p \\ E^sDE_1 & E^sDE_2 & \cdots & E^sDE_s & E^sDE_{s+1} & \cdots & E^sDE_p \\ E^{s+1}DE_1 & E^{s+1}DE_2 & \cdots & E^{s+1}DE_s & E^{s+1}DE_{s+1} & \cdots & E^{s+1}DE_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E^pDE_1 & E^pDE_2 & \cdots & E^pDE_s & E^pDE_{s+1} & \cdots & E^pDE_p \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
E^2E_1 & E^2E_2 & \cdots & E^2E_{s+1} & \cdots & E^2E_p \\
E^3E_1 & E^3E_2 & \cdots & E^3E_{s+1} & \cdots & E^3E_p \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
E^sE_1 & E^sE_2 & \cdots & E^sE_{s+1} & \cdots & E^sE_p \\
-\sum\limits_{k=1}^{s}\gamma_kE^kE_1 & -\sum\limits_{k=1}^{s}\gamma_kE^kE_2 & \cdots & -\sum\limits_{k=1}^{s}\gamma_kE^kE_{s+1} & \cdots & -\sum\limits_{k=1}^{s}\gamma_kE^kE_p \\
\sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{s+1,k}E^kE_1 & \sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{s+1,k}E^kE_2 & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{s+1,k}E^kE_{s+1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{s+1,k}E^kE_p \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{p,k}E^kE_1 & \sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{p,k}E^kE_2 & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{p,k}E^kE_{s+1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p}\theta_{p,k}E^kE_p
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots & -\gamma_s & 0 & \cdots & 0 \\
\theta_{s+1,1} & \theta_{s+1,2} & \cdots & \theta_{s+1,s} & \theta_{s+1,s+1} & \cdots & \theta_{s+1,p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\theta_{p,1} & \theta_{p,2} & \cdots & \theta_{p,s} & \theta_{p,s+1} & \cdots & \theta_{p,p}
\end{pmatrix}.
$$

Что и подтверждает истинность утверждения теоремы 2.1. на матричном языке.

Замечание 2.2 *Свойство приводимости системы* (2.2) *к виду* (2.5) *зависит от существования инвариантного подпространства линейного оператора* $\mathcal{D}$*. Выполнении условий теоремы 2.1 гарантирует приводимость исходной системы к канонической форме* (2.5)*. При этом свойство устойчивости по переменной* y *является инвариантным относительно выбора базиса пространства. Кроме того, инвариантом системы является размерность подпространства. Так для оператора* $\mathcal{D}, \dim U = p - s$*, а для сопряженного оператора* $\mathcal{D}^*, \dim U^* = s$*.*

Учитывая это, справедлива теорема:

Теорема 2.2 *Для того, чтобы система* (2.2) *была устойчивой по переменной* y *необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = ay + \overline{z}_1, \\
&\frac{d\overline{z}_1}{dt} = bcy + \overline{z}_2, \\
&\frac{d\overline{z}_2}{dt} = bDcy + \overline{z}_3, \\
&\cdots \\
&\frac{d\overline{z}_{s-1}}{dt} = bD^{s-2}cy + \overline{z}_s, \\
&\frac{d\overline{z}_s}{dt} = bD^{s-1}cy - \gamma_1\overline{z}_1 - \gamma_2\overline{z}_2 - \cdots - \gamma_s\overline{z}_s.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

С л е д с т в и е 2.1 *Если* $\operatorname{rang}\{b^*, \mathcal{D}^* b^*, \ldots, \mathcal{D}^{*p-1} b^*\} = p$, *то существует базис пространства* R^p, *в котором система* (2.2) *представима в виде*

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = ay + \overline{z}_1,\\
&\frac{d\overline{z}_1}{dt} = bcy + \overline{z}_2,\\
&\frac{d\overline{z}_2}{dt} = bDcy + \overline{z}_3,\\
&\cdots\\
&\frac{d\overline{z}_{s-1}}{dt} = bD^{p-2}cy + \overline{z}_p,\\
&\frac{d\overline{z}_p}{dt} = bD^{p-1}cy - \gamma_1\overline{z}_1 - \gamma_2\overline{z}_2 - \cdots - \gamma_p\overline{z}_p.
\end{aligned}$$

В этом случае устойчивость по переменной y эквивалентна устойчивости системы по всем переменным.

З а м е ч а н и е 2.3 *Следует отметить, что полученный результат можно назвать геометрическим аналогом критерия частичной устойчивости* [2] *только по отношению к заданной компоненте фазового вектора.*

З а м е ч а н и е 2.4 *Следует отметить, что характеристический многочлен системы* (2.2) *и уравнения* (2.5) *имеет вид*

$$\begin{aligned}
&P_s(\lambda) = \lambda^{s+1} + (\gamma_s - a)\lambda^s + (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc)\lambda^{s-1} + \cdots\\
&+(\gamma_1 - a\gamma_2 - bc\gamma_3 - \cdots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c)\lambda -\\
&-(a\gamma_1 + bc\gamma_2 + bDc\gamma_3 + \cdots + bD^{s-2}c\gamma_s + bD^{s-1}c).
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2.5 *Используя процедуру дифференцирования можно исключить переменные* $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_s$ *из системы* (2.5) *и получить дифференциальное уравнение* $s+1$*-го порядка относительно компоненты* y

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{s+1}y}{dt^{s+1}} + (\gamma_s - a)\frac{d^s y}{dt^s} + (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc)\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + \cdots\\
&+(\gamma_1 - a\gamma_2 - bc\gamma_3 - \cdots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c)\frac{dy}{dt} -\\
&-(a\gamma_1 + bc\gamma_2 + bDc\gamma_3 + \cdots + bD^{s-2}c\gamma_s + bD^{s-1}c)y = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

З а м е ч а н и е 2.6 *Коэффициенты* $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, *присутствующие в системе* (2.5), *также выражаются через исходные параметры исследуемой системы.*

Действительно, исходя из соотношения

$$\mathcal{D}^{*s} b^* = -\gamma_{s-1}\mathcal{D}^{*s-1} b^* - \cdots - \gamma_1 b^*,$$

следует, что $\mathcal{D}^{*s} b^*(e_i) = -\gamma_i$, *или в координатной форме*

$$bD^s E_i = -\gamma_i, i = 1, \ldots, s.$$

В этом случае система (2.5) *имеет вид*

$$\frac{dy}{dt} = ay + \overline{z}_1,$$
$$\frac{d\overline{z}_1}{dt} = bcy + \overline{z}_2,$$
$$\frac{d\overline{z}_2}{dt} = bDcy + \overline{z}_3,$$
$$\cdots$$
$$\frac{d\overline{z}_s}{dt} = bD^{s-1}cy + bD^sE_1\overline{z}_1 + bD^sE_2\overline{z}_2 + \cdots + bD^sE_s\overline{z}_s.$$

Таким образом, характер устойчивости исследуемой компоненты y фазового вектора x системы (2.2) сводится к исследованию устойчивости системы (2.8) или уравнения (2.9) .

П р и м е р 2.1 *Проиллюстрируем, сказанное выше на примере из* [2]. *Исследуется устойчивость системы*

$$\frac{dy}{dt} = -y + z_1 - 2z_2,$$
$$\frac{dz_1}{dt} = 4y + z_1,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = 2y + z_1 - z_2.$$

по переменной y.

В нашем случае

$$\{b^T, (bD)^T\} = \{(1, -2)^T, (-1, 2)^T\}, \mathrm{rang}\{b^T, (bD)^T\} = 1 < 2 = \mathrm{dim}R^2.$$

Следовательно, согласно теореме 2.2 существует одномерное инвариантное подпространство относительно линейного оператора $\mathcal{D}^*$, *матрица которого в стандартном базисе сопряженного пространства* R^{2^*} *имеет вид*

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом минимальный аннулирующий многочлен вектора $b^* = z_1 - 2z_2$ *имеет вид*

$$\sigma(\lambda) = \lambda - 1, \sigma((\mathcal{D}^*)b^*) = 0.$$

В пространстве R^{2^*} *дополняем базис подпространства* $U^* =< b^*(z) = z_1 - 2z_2 >$ *произвольным линейно независимым с* $e^1(z) = z_1 - 2z_2$ *вектором, например,* $e^2(z) = z_2$. *Находим соответствующий двойственный базис из пространства* R^2 : $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (2, 1)$. *Таким образом*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, bS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, Sc = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, SDS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система представима в виде

$$\frac{dy}{dt} = -y + \overline{z}_1,$$
$$\frac{d\overline{z}_1}{dt} = -\overline{z}_1,$$
$$\frac{d\overline{z}_2}{dt} = 2y + \overline{z}_1 + \overline{z}_2.$$

Откуда из устойчивости системы

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -y + \overline{z}_1, \\ \frac{d\overline{z}_1}{dt} &= -\overline{z}_1, \end{aligned}$$

следует устойчивость исходной системы по переменной y.

3. Системы линейных разностных уравнений

Рассмотрим линейную разностную систему вида

$$x(t+1) = A_* x(t), \tag{3.1}$$

где $x \in R^n$, A – постоянная матрица соответствующих размеров.

Предположим, что требуется исследовать устойчивость относительно первой компоненты. Учитывая это, представим фазовый вектор x в виде $x = (y, z), y \in R, z \in R^p, n = 1 + p$.

Также будем предполагать, что исследуется на устойчивость первая координата фазового вектора x. В связи с этим представим систему (3.1) в виде

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ay(t) + bz(t), \\ z(t+1) &= cy(t) + Dz(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Отметим, что т. к. исследуется устойчивость по переменной y, свойство системы (3.2) не должно зависеть от выбора системы z-координат, в которой задана система. В связи с этим, в пространстве R^p можно выбирать произвольный базис, что не должно повлиять на характер устойчивости системы (3.2) относительно переменной y.

Проведя замену переменных

$$z(t) = S^{-1}\overline{z}(t),$$

получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ay(t) + bS^{-1}\overline{z}(t), \\ \overline{z}(t+1) &= Scy(t) + SDS^{-1}\overline{z}(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

Аналогичная теорема имеет место и для системы (3.2).

Т е о р е м а 3.1 *Если* $\operatorname{rang}\{b^*, \mathcal{D}^* b^*, \ldots, \mathcal{D}^{*p-1} b^*\} = s < p$, *то существует базис пространства* R^p, *в котором система* (3.2) *представима в виде*

$$\begin{aligned}
& y(t+1) = ay(t) + \overline{z}_1(t), \\
& \overline{z}_1(t+1) = bcy(t) + \overline{z}_2(t), \\
& \overline{z}_2(t+1) = bDcy(t) + \overline{z}_3(t), \\
& \ldots \\
& \overline{z}_{s-1}(t+1) = bD^{s-2}cy(t) + \overline{z}_s(t), \\
& \overline{z}_s(t+1) = bD^{s-1}cy(t) - \gamma_1\overline{z}_1(t) - \gamma_2\overline{z}_2(t) - \cdots - \gamma_s\overline{z}_s(t), \\
& \overline{z}_{s+1}(t+1) = \overline{c}_{s+1}y(t) + \theta_{s+1,1}\overline{z}_1(t) + \theta_{s+1,2}\overline{z}_2(t) + \cdots + \theta_{s+1,p}\overline{z}_p(t), \\
& \ldots \\
& \overline{z}_p(t+1) = \overline{c}_p y(t) + \theta_{p,1}\overline{z}_1(t) + \theta_{p,2}\overline{z}_2(t) + \cdots + \theta_{p,p}\overline{z}_p(t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.

Исходя из этого следует что устойчивость системы (3.4) по переменной y эквивалентна устойчивости системы

$$
\begin{aligned}
&y(t+1) = ay(t) + \overline{z}_1(t),\\
&\overline{z}_1(t+1) = bcy(t) + \overline{z}_2(t),\\
&\overline{z}_2(t+1) = bDcy(t) + \overline{z}_3(t),\\
&\cdots\\
&\overline{z}_{s-1}(t+1) = bD^{s-2}cy(t) + \overline{z}_s(t),\\
&\overline{z}_s(t+1) = bD^{s-1}cy(t) - \gamma_1\overline{z}_1(t) - \gamma_2\overline{z}_2(t) - \cdots - \gamma_s\overline{z}_s(t).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Поэтому имеет место утверждение, аналогичное теореме 2.2.

Т е о р е м а 3.2 *Для того, чтобы система* (3.2) *была устойчивой по переменной* y*, необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система* (3.5).

Систему (3.5) также можно привести к эквивалентному уравнению $s+1$-го порядка относительно переменной y. Для этого исключим переменные $\overline{z}_1(t), \overline{z}_2(t) \ldots, \overline{z}_s(t)$ из системы (3.5)

Из первого уравнения системы (3.5) и в силу второго уравнения имеем

$$y(t+2) = ay(t+1) + \overline{z}_1(t+1) = ay(t+1) + bcy(t) + \overline{z}_2(t).$$

Исходя из третьего уравнения, получим

$$y(t+3) = ay(t+2) + bcy(t+1) + bD\overline{z}_2(t+1) = ay(t+2) + bcy(t+1) + bDcy(t) + \overline{z}_3(t).$$

Таким образом, на s-м шаге (s – степень минимального многочлена вектора $b^* = bz$ относительно оператора линейного оператора $\mathcal{D}^*$) получим уравнение

$$y(t+s) = ay(t+s-1) + bcy(t+s-2) + bDcy(t+s-3) + \cdots + bD^{s-2}cy(t) + \overline{z}_s(t).$$

Из этого следует

$$
\begin{aligned}
&y(t+s+1) = ay(t+s) + bcy(t+s-1) + bDcy(t+s-2) + \cdots + bD^{s-2}cy(t+1) +\\
&+\overline{z}_s(t+1) = ay(t+s) + bcy(t+s-1) + bDcy(t+s-2) + \cdots +\\
&+bD^{s-2}cy(t+1) - \gamma_1\overline{z}_1(t) - \cdots - \gamma_s\overline{z}_s(t).
\end{aligned}
$$

Пользуясь полученными соотношениями, исключаем переменную y из системы (3.5), приходим к уравнению

$$
\begin{aligned}
&y(t+s+1) + (\gamma_s - a)y(t+s-1) + (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc)y(t+s-2) +\\
&+(\gamma_{s-2} - a\gamma_{s-1} - bc\gamma_s - bDc)y(t+s-3) + \cdots +\\
&+(\gamma_1 - a\gamma_2 - bc\gamma_3 - bDc\gamma_4 - \cdots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c)y(t+1) -\\
&-(a\gamma_1 + bc\gamma_2 + bDc\gamma_3 + \cdots + bD^{s-2}c\gamma_s - bD^{s-1}c)y(t).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Таким образом, и в этом классе систем устойчивость по переменной y сводится к исследованию устойчивости системы (3.5) или уравнения $s+1$-го порядка (3.6).

4. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Предлагаемый подход применим и к исследованию частичной устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Исследуем y-устойчивость системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_* x(t-\tau), \tag{4.1}$$

где $x \in R^n, \tau = const, A_*$ – постоянная матрица соответствующих размеров.

Представим систему (4.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t-\tau) + bz(t-\tau), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= cy(t-\tau) + Dz(t-\tau). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Введем замену переменных

$$z(t) = S^{-1}\overline{z}(t),$$

получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t-\tau) + bS^{-1}\overline{z}(t-\tau), \\ \frac{d\overline{z}}{dt}(t) &= Scy(t-\tau) + SDS^{-1}\overline{z}(t-\tau). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Аналогичные результаты получаем и в классе линейных систем с отклоняющимся аргументом.

Т е о р е м а 4.1 *Если* $\mathrm{rang}\{b^*, \mathcal{D}^* b^*, \ldots, \mathcal{D}^{*p-1} b^*\} = s < p$, *то существует базис пространства* R^p, *в котором система* (4.1) *представима в виде*

$$\begin{aligned}
&\frac{dy(t)}{dt} = ay(t-\tau) + \overline{z}_1(t-\tau), \\
&\frac{d\overline{z}_1(t)}{dt} = bcy(t-\tau) + \overline{z}_2(t-\tau), \\
&\frac{d\overline{z}_2(t)}{dt} = bDcy(t-\tau) + \overline{z}_3(t-\tau), \\
&\ldots \\
&\frac{d\overline{z}_{s-1}(t)}{dt} = bD^{s-2}cy(t-\tau) + \overline{z}_s(t-\tau), \\
&\frac{d\overline{z}_s(t)}{dt} = bD^{s-1}cy(t-\tau) - \gamma_1\overline{z}_1(t-\tau) - \gamma_2\overline{z}_2(t-\tau) - \cdots - \gamma_s\overline{z}_s(t-\tau), \\
&\frac{d\overline{z}_{s+1}(t)}{dt} = \overline{c}_{s+1}y(t-\tau) + \theta_{s+1,1}\overline{z}_1(t-\tau) + \theta_{s+1,2}\overline{z}_2(t-\tau) + \cdots + \theta_{s+1,p}\overline{z}_p(t-\tau), \\
&\ldots \\
&\frac{d\overline{z}_p(t)}{dt} = \overline{c}_p y(t-\tau) + \theta_{p,1}\overline{z}_1(t-\tau) + \theta_{p,2}\overline{z}_2(t-\tau) + \cdots + \theta_{p,p}\overline{z}_p(t-\tau).
\end{aligned}$$

Доказательство данной теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.1. Поэтому получаем аналогичное утверждение

Т е о р е м а 4.2 *Для того чтобы система* (4.2) *была устойчивой по переменной* y, *необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy(t)}{dt} = ay(t-\tau) + \overline{z}_1(t-\tau),\\
&\frac{d\overline{z}_1(t)}{dt} = bcy(t-\tau) + \overline{z}_2(t-\tau),\\
&\frac{d\overline{z}_2(t)}{dt} = bDcy(t-\tau) + \overline{z}_3(t-\tau),\\
&\cdots\\
&\frac{d\overline{z}_{s-1}(t)}{dt} = bD^{s-2}cy(t-\tau) + \overline{z}_s(t-\tau),\\
&\frac{d\overline{z}_s(t)}{dt} = bD^{s-1}cy(t-\tau) - \gamma_1\overline{z}_1(t-\tau) - \gamma_2\overline{z}_2(t-\tau) - \cdots - \gamma_s\overline{z}_s(t-\tau).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Также можно получить уравнение характеризующее поведение переменной y, исключив ее из системы (4.4).

Исключим переменные $\overline{z}_1, \overline{z}_2 \ldots, \overline{z}_s$ из системы (4.4).

Из первого уравнения системы (4.4) и в силу второго уравнения имеем

$$\frac{dy(t+\tau)}{dt} = ay(t) + \overline{z}_1(t), \frac{d^2y(t+\tau)}{dt^2} = a\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d\overline{z}_1(t)}{dt}.$$

Исходя из третьего уравнения системы запишем

$$\frac{d^2y(t+\tau)}{dt^2} = a\frac{dy(t)}{dt} + bcy(t-\tau) + z_2(t-\tau), \frac{d^2y(t+2\tau)}{dt^2} = a\frac{dy(t+\tau)}{dt} + bcy(t) + \overline{z}_2(t)$$

Таким образом, на $s-1$-м и s-м шагах получим, соответственно, уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^{s-1}y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} = a\frac{d^{s-2}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-2}} + bc\frac{d^{s-3}y(t+(s-3)\tau)}{dt^{s-3}} + \cdots\\
&+bD^{s-3}cy(t-\tau) + \overline{z}_{s-1}(t-\tau),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^{s}y(t+s\tau)}{dt^s} = a\frac{d^{s-1}y(t+(s-1)\tau)}{dt^{s-1}} + bc\frac{d^{s-2}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-2}} + \cdots\\
&+bD^{s-2}cy(t-\tau) + \overline{z}_{s}(t-\tau).
\end{aligned}
$$

тогда

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^{s+1}y(t+(s+1)\tau)}{dt^{s+1}} + (\gamma_s - a)\frac{d^s y(t+s\tau)}{dt^s} +\\
&+ (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc)\frac{d^{s-1}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \cdots\\
&+\big(\gamma_1 - a\gamma_2 - \cdots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c\big)\frac{dy(t)}{dt} -\\
&- \big(a\gamma_1 + bc\gamma_2 + \cdots + bD^{s-2}c\gamma_s + bD^{s-1}\big)\, y(t-\tau) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Таким образом, и для данного класса систем исследование устойчивости по переменной y сводится к исследованию устойчивости системы (4.4) или к эквивалентному уравнению (4.5).

Список литературы

1. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М. Наука, 1987. 256 с.

2. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 284 с.

3. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.

4. Воротников В.И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. Вып. 4. С. 3–59.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

6. Чудинов К. М. Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 4. С. 67–72.

7. Чудинов К. М. Об устойчивости по части переменных линейных автономных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2004. № 6. С. 72-80.

8. Никонов В. И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95–99.

Поступила 6.12.2020; доработана после рецензирования 15.02.2021;
принята к публикации 19.02.2021

Информация об авторах:

Никонов Владимир Иванович, доцент кафедры алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7202-9679, nik_vl_@mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector

V. I. Nikonov

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. A new geometric approach to the study of the partial stability of linear systems is proposed, which is based on the application of the geometric theory of linear operators. Using the theory of conjugate spaces and conjugate linear operators, bases are constructed in which the system under study takes the canonical form. A cyclic subspace with respect to the conjugate linear operator is considered. A basis is constructed for the dual space of a linear operator, in which its matrix takes the canonical form. This basis corresponds to the dual basis of the original linear space. Then, in a pair of bases of dual spaces the system under study takes the simplest form. The geometric properties of the system are realized using a non-singular linear transformation in the space of a part of the components of the system's phase vector. This allows us to decompose the system under study in order to obtain necessary and sufficient conditions for the partial stability of the linear system. In an equivalent system, an independent subsystem is distinguished, whose nature of stability determines the behavior of the investigated component of the original system's phase vector. The relationship between the partial stability of the system and the existence of an invariant subspace of a linear operator characterizing the dynamics of the system is established. The canonical form of the resulting subsystem makes it easy to exclude auxiliary variables and write an equation equivalent to this system. The application of the obtained results to the solution of the problem of partial stability for linear systems with constant coefficients belonging to the classes of ordinary differential equations, discrete systems and systems with deviating argument is shown. An example of a linear system of differential equations is given to illustrate the result obtained.

Key Words: partial stability, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial, dual space

For citation: *V. I. Nikonov*. Partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 43–57. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.43–57

References

1. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *[Stability and stabilization of motion in relation to some of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 256 p.

2. V. I. Vorotnikov, *[Stability of dynamic systems with respect to some of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1991, 284 p.

3. V. I. Vorotnikov, V. V. Rumyantsev, *[Stability and control with respect to the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications]*, Nauka Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.

4. V. I. Vorotnikov, "[Partial stability and control: the state of the problem and development prospects]", *Avtomatika I telemekhanika*, 2005, № 4, 3–59 (In Russ.).

5. F. R. Gantmakher, *[The theory of matrices]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 576 p.

6. K. M. Chudinov, “[Criterion of stability in terms of variables of an autonomous system of differential equations]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematikas*, 2003, № 4, 67–72 (In Russ.).

7. K. M. Chudinov, “[On stability with respect to variables of linear autonomous systems with aftereffect]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematikas*, 2004, № 6, 72–80 (In Russ.).

8. V. I. Nikonov, “Geometric aspect of partial stability for linear systems”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:2 (2011), 95–99 (In Russ.).

Submitted 6.12.2020; Revised 15.02.2021; Accepted 19.02.2021

Information about the authors:

Vladimir I. Nikonov, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7202-9679, nik_vl_@mail.ru

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.