

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.222-243

УДК 532.529:541.182

**О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры**© М. С. Дерябина<sup>1</sup>, С. И. Мартынов<sup>2</sup>

**Аннотация.** В приближении Стокса решается задача о течении вязкой жидкости через двумерную и трехмерную периодические структуры. В качестве двумерной структуры рассматривается система тонких пластин конечной ширины, в качестве трехмерной – система тонких стержней конечной длины. Пластины и стержни периодически расположены в пространстве с определенными шагами трансляции вдоль взаимно перпендикулярных осей. На основе разработанной ранее авторами процедуры построено приближенное решение уравнений течения жидкости при произвольной ориентации структур относительно заданного вектора градиента давления. Решение ищется в конечной области (ячейках) вокруг включений в классе кусочно-гладких функций, которые являются бесконечно дифференцируемыми в ячейке, а на границах ячейки удовлетворяют условиям непрерывности скорости, нормальных и касательных напряжений. Поскольку решается краевая задача для уравнения Лапласа, то предполагается, что найденное решение – единственное. Вид функций позволяет разделить переменные и свести решение задачи к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдено, что изменение расхода жидкости через характерное поперечное сечение определяется, главным образом геометрическими размерами ячеек свободной жидкости в таких структурах и практически не зависит от размера пластин или стержней.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, градиент давления, периодическая структура, периодическое решение

**1. Введение**

В результате взаимодействия дисперсные частицы при определенных условиях образуют периодические структуры в жидкости [1–4]. Образование периодической структуры происходит в результате двух основных механизмов взаимодействия частиц в жидкости: взаимодействие непосредственно с силами (электростатическими, диполь-дипольными, Ван-дер-Ваальса и др.), действующими между частицами, и гидродинамическими силами, вызванными искажением поля давления и скорости потока жидкости. Первый механизм может быть инициирован как действием внешних полей (диполь-дипольное взаимодействие частиц), так и стабилизацией суспензий двойными электрическими слоями, образованными вокруг частиц [5–8]. При больших концентрациях частиц в несущей жидкости суспензия может находиться в «кристаллическом» состоянии в результате действия только силы тяжести [4].

<sup>1</sup>Дерябина Мария Сергеевна, исполнитель гранта РФФИ, ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5588-6740>, [deryabinams@mail.ru](mailto:deryabinams@mail.ru)

<sup>2</sup>Мартынов Сергей Иванович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru)

Наличие структуры в дисперсной системе может значительно изменять механические, оптические и акустические свойства по сравнению с неструктурированными дисперсными системами. Возможность управления свойствами таких систем с помощью внешних полей [5] актуализирует исследования по пониманию и корректному моделированию механизмов взаимодействия при разработке высокотехнологичных материалов с заранее заданными характеристиками на основе жидких дисперсных систем. Течения через периодические структуры используются при расчетах теплообменников, в частности, при создании коммерческих программ.

Моделирование осредненных свойств периодических структур имеет давнюю историю. Еще в XIX в. Д. К. Максвелл [9] и Рэлей [10] впервые исследовали задачу об эффективной теплопроводности тел с включениями. Д. К. Максвелл рассмотрел случай малых концентраций хаотически расположенных включений, Рэлей – включения, помещенные в узлы простой кубической решетки. Во второй половине XX в. в связи с широким применением новых материалов в промышленности активно развивается механика дисперсных систем, в том числе методы осреднения периодических структур. В это время публикуется большое количество работ, посвященных этой тематике [11–13]. Однако во всех работах рассматривается однородное или линейное течение жидкости через периодическую решетку частиц, то есть при постоянном давлении. В то же время на практике, как правило, реализуются течения, создаваемые перепадом давления.

В работе [14] показано, что не существует решения задачи в классе непрерывно-дифференцируемых функций. Поэтому было сделано предположение, что при обтекании бесконечной периодической решетки сферических частиц при постоянном градиенте давления решение в виде квадратичной функции координат реализуется в определенной конечной области вокруг каждой частицы в решетке. Фактически это означает, что возмущения скорости потока жидкости от частиц не обязаны иметь зависимость вида  $R^{-k}$ , где  $R$  – расстояние от центра частицы до точки в жидкости, в которой определяется скорость, а  $k > 1$ . Другими словами, вокруг каждой частицы в периодической решетке можно выделить ячейку, в которой необходимо искать решение уравнений гидродинамики. Форма, размер и геометрия ячейки зависят от формы и размера частиц, а также геометрии самой периодической решетки частиц. Как одно из подтверждений сказанного, в работе [15] показано, что при учете гидродинамических взаимодействий всех частиц возмущения потока вида  $R^{-k}$  не распространяются за границы ячейки Вигнера-Зейтца периодической решетки. Таким образом, если задан градиент давления, то сначала необходимо найти периодическое распределение скорости в потоке вязкой жидкости в безграничной области, разбитой на ячейки, а затем использовать его для решения задачи о течении вязкой жидкости через периодическую решетку частиц. Фактически это некая реновация известного метода ячеек [16], использованного в прошлом веке при решении задач об обтекании большого количества частиц вязкой жидкостью.

Задача нахождения точных решений уравнений течения вязкой жидкости актуальна в настоящее время в связи с многочисленными приложениями, в том числе по расчетам течения вязкой жидкости в каналах различной геометрии в неоднородном температурном поле. При нахождении таких решений используется подход, основа которого заключается в использовании замен, сводящих систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [17]. В работе [18] подобный подход использован при построении приближенного периодического решения для течения вязкой жидкости в безграничном объеме жидкости при заданном градиенте давления. Процедура основана на разбиении области на ячейки прямоугольной формы (двумерный случай) или в форме прямоугольной призмы (трехмерный случай) и нахождения таких решений уравнений Стокса в этих ячейках, чтобы в соседних оно повторялось с учетом

условий непрерывности скорости и напряжений на границах ячейки. Использовалась хорошо разработанная техника решения краевой задачи Дирихле для уравнений Лапласа в прямоугольнике. Найденные распределения скорости имеют нулевые значения в угловых точках ячеек, поэтому можно считать, что это соответствует течению жидкости через периодическую систему точечных тел, расположенных в этих точках. Воспользуемся этими результатами для построения решения для течения жидкости через периодические структуры.

Между угловыми точками ячеек периодически разместим тонкие пластины (двумерный случай) или тонкие стержни (трехмерный случай) так, чтобы полученная периодическая структура состояла из ячеек свободной жидкости и ячеек с пластинами или стержнями, расположенными по сторонам прямоугольника или прямоугольной призмы. Причем для двумерного случая получаем ячейки с двумя параллельными пластинами, а для трехмерного – с четырьмя параллельными стержнями. Ниже приводится метод построения приближенного периодического решения для течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через такие структуры, основанный на результатах работы [18].

## 2. Постановка задачи

Исследуем течение несжимаемой жидкости вязкости  $\eta$  через периодическую решетку, образованную неподвижными частицами в виде тонких пластин или тонких стержней. Пластины располагаются вдоль оси  $OX$ , имеют ширину  $2L$  и период трансляции  $2l$ , а вдоль оси  $OY$  – период трансляции  $2h$ . Аналогично для трехмерного случая стержни располагаются вдоль оси  $OX$  и оси  $OZ$ , имеют длину  $2L$  и период трансляции  $2l$  вдоль  $OX$ ,  $2d$  вдоль  $OZ$ , а вдоль оси  $OY$  –  $2h$ . В таких структурах имеются два типа ячеек: ячейки размерами  $2L \times 2h$ , в которых жидкость ограничена двумя пластинами; ячейки, размерами  $2l \times 2h$ , в которых нет пластин, и ячейки размерами  $2L \times 2h \times 2d$ , в которых жидкость, ограничена четырьмя стержнями, и ячейки, размерами  $2l \times 2h \times 2d$ , в которых нет стержней. Будем рассматривать такие размеры ячеек, для которых возможно использовать приближение Стокса:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p. \quad (2.1)$$

На поверхности каждой пластины или стержня в ячейке должны выполняться условия прилипания:

$$u_x(x, h) = u_x(x, -h) = 0. \quad (2.2)$$

Считается, что заданный градиент давления может иметь произвольное направление относительно пластин или стержней. Искомое распределение скорости жидкости должно быть периодической функцией относительно рассматриваемой системы пластин. Кроме того, так как решение ищется в классе кусочно-гладких функций, то должны выполняться условия непрерывности скорости, нормальных и касательных напряжений на границах ячейки. Аналогичные условия указаны в работе [18].

Поскольку уравнения движения жидкости и граничные условия линейные по скорости, то общее решение задачи можно представить в виде суммы решения задач о течении жидкости с градиентом давления, направленным вдоль пластин или стержней, и течения жидкости с градиентом давления, направленным перпендикулярно пластинам или стержням.

### 3. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном вдоль пластин

Рассмотрим случай, когда функция давления зависит только от переменной  $x$ , причем  $\partial p/\partial x = \text{const}$ . Воспользуемся результатами работы [18] по нахождению периодического решения для течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления в безграничной области. Для этого разобьем периодическую структуру на прямоугольные ячейки между пластинами и за пластинами. Поместив начало координат в центр прямоугольной ячейки, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ , представим скорость жидкости в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) + u(x, y) + \tilde{u}(x, y), \\ u_y(x, y) &= v(x, y) + \tilde{v}(x, y). \end{aligned}$$

Выражения для функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , соответствующие периодическому решению для случая течения вязкой жидкости в безграничной области, получены в работе [18] и имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ v(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент  $D_k$  равен

$$D_k = (-1)^{k+1} \frac{4hl}{\eta \pi^2 (2k+1)^2 \sinh(\chi_k h)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \chi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}$$

Функции  $\tilde{u}(x, y)$  и  $\tilde{v}(x, y)$  должны быть определены дополнительно.

В ячейке жидкости с пластинами, ограниченными прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ , в системе координат, связанной с центром ячейки, скорость жидкости представим в виде:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) + \hat{u}(x, y), \\ \hat{u}_y(x, y) &= \hat{v}(x, y) \end{aligned}$$

На границах ячеек без пластин должны выполняться условия для скорости:

$$\begin{aligned} u_x(-l, y) &= \hat{u}_x(L, y), & u_x(l, y) &= \hat{u}_x(-L, y), \\ u_y(-l, y) &= \hat{u}_y(L, y), & u_y(l, y) &= \hat{u}_y(-L, y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Кроме того, на границах таких ячеек должны выполняться условия непрерывности нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{xx}(L, y), & \sigma_{xx}(l, y) &= \hat{\sigma}_{xx}(-L, y), \\ \sigma_{xy}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(L, y), & \sigma_{xy}(l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(-L, y), \\ \sigma_{yy}(l, y) &= \hat{\sigma}_{yy}(-L, y), & \sigma_{yy}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{yy}(L, y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $\hat{\sigma}_{xx}$ ,  $\hat{\sigma}_{xy}$  – компоненты тензора полных напряжений в жидкости в соседних ячейках.

Аналогично работе [18] система уравнений (2.1) для определения функций  $\hat{u}(x, y)$  и  $\hat{v}(x, y)$  в ячейке между пластинами записывается в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Следуя процедуре, разработанной в [18], получим следующие выражения для  $\hat{u}(x, y)$  и  $\hat{v}(x, y)$ , удовлетворяющие условиям  $\hat{u}(x, \pm h) = 0$ :

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] \\ \hat{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right]\end{aligned}$$

При этом выполняется тождество

$$\eta \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \equiv 0$$

Другими словами, найденное распределение скорости не изменяет касательное напряжение на пластинах по сравнению с решением Пуазейля. Поскольку в ячейке без пластин необходимо найти добавочные функции  $\tilde{u}(x, y)$  и  $\tilde{v}(x, y)$ , которые при  $y = \pm h$  не меняют значения касательных напряжений, то будем искать их в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] \\ \tilde{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right]\end{aligned}$$

Из условия непрерывности скорости жидкости на границах ячеек между пластинами и за ними следует равенство

$$\hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} L \right) = \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} l \right)\tag{3.4}$$

С учетом вида функции  $u(x, y)$  из условия равенства нормальных напряжений на границах ячеек получаем второе соотношение для определения коэффициентов  $\hat{D}_k$  и  $\tilde{D}_k$ :

$$\begin{aligned}&\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2\hat{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} L \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right\} = \\ &= -\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2\tilde{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} l \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right\} - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4h \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right)}{\pi(2k+1) \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} h \right)} \frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}$$

Умножая обе части равенства на  $\cos(\pi(2k' + 1)y/2h)$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , с учетом свойства ортогональности [18] получим равенство:

$$\begin{aligned} & \eta \widehat{D}_k \frac{\pi(2k + 1)}{2h} \sinh\left(\frac{\pi(2k + 1)}{2h}L\right) + \eta \widetilde{D}_k \frac{\pi(2k + 1)}{2h} \sinh\left(\frac{\pi(2k + 1)}{2h}l\right) = \\ & = \frac{16l^2}{\pi^2(l^2 + h^2)} \frac{\partial p}{\partial x} \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{(2k + 1)^2} \coth\left(\frac{\pi(2k + 1)h}{2l}\right). \end{aligned}$$

С учетом соотношения (3.4) найдем следующие значения коэффициентов:

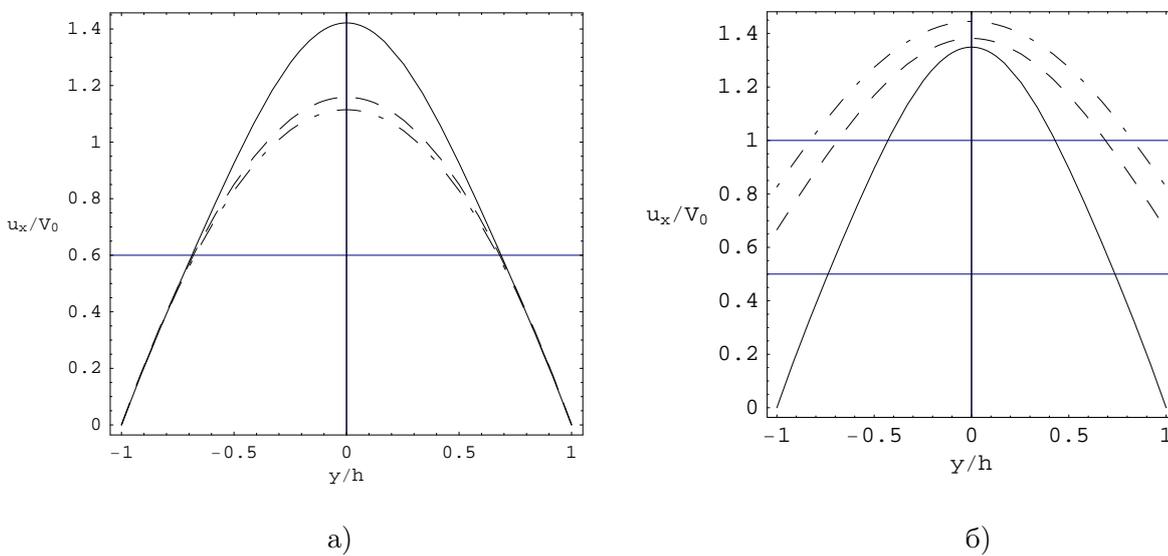
$$\begin{aligned} \widehat{D}_k &= \frac{8h\beta l^2}{\eta\pi^2(l^2 + h^2)\lambda_k^2 \coth(\lambda_k L) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \widetilde{D}_k &= \frac{8h\beta l^2}{\eta\pi^2(l^2 + h^2)\lambda_k^2 \coth(\lambda_k l) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2h}(2k + 1), \quad \beta = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{(2k + 1)} \coth\left(\frac{\pi(2k + 1)h}{2l}\right).$$

Необходимо отметить, что условия (3.1) для функций  $u_y(x, y)$  и  $\widehat{u}_y(x, y)$  выполняются в интегральном виде. Поэтому полученное решение задачи можно считать приближенным.

Легко видеть, что при  $L = 0$  получаем  $\widetilde{D}_k = \widehat{D}_k = 0$  и решение совпадает с найденным в [18].



**Р и с. 3.1**

Зависимость безразмерной скорости  $u_x/U_0$  от безразмерной координаты  $y/h$  в ячейках с пластинами (а) и без пластин (б)

На рис. 3.1 представлены графики зависимости безразмерной функции  $u_x/V_0$  от безразмерной координаты  $y/h$  для ячеек с пластинами и без них в случае  $L = l = h$ . Сплошная линия соответствует сечениям  $x/h = \pm 1$ , штриховая линия – сечениям  $x/h = \pm 0.5$ , штрих-пунктирная – сечению  $x/h = 0$ . Функция  $u_x/V_0$  представлена первыми тремя членами ряда. Точность такого представления будет показана ниже. В качестве характерной скорости  $V_0$  здесь и далее выбран параметр

$$U_0 = \frac{2h^2}{\pi^2\eta} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|.$$

Как видно из графиков, скорость жидкости на входе в ячейку с пластинами больше, чем в ее середине. Очевидно, что уменьшение скорости связано с торможением жидкости пластинами. В ячейке без пластин наоборот, скорость жидкости на входе меньше, чем в ее средней части, что по аналогии с предыдущем можно объяснить отсутствием торможения жидкости на верхней и нижней границах. Такое поведение скорости жидкости связано с двумерностью потока. Так из уравнения неразрывности следует, что скорость жидкости между пластинами меняется вдоль них из-за наличия составляющей вектора скорости, направленной перпендикулярно пластинам. Соответственно, расход жидкости через сечение между пластинами меняется вдоль них и, как видно из графиков скорости в ячейках с пластинами и без них, определяется в сечении между ячейками. Как показывают вычисления, изменение расхода жидкости в таком сечении единичной длины определяется выражением:

$$Q = -\frac{1}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h^3 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\widehat{D}_k}{\lambda_k} \coth(\lambda_k L).$$

С учетом выражения для коэффициента  $\widehat{D}_k$  расход жидкости главным образом зависит от размеров  $l$  и  $h$  ячеек без пластин и, в меньшей степени, размеров самих пластин  $L$ . Поскольку рассматриваемую структуру можно рассматривать в том числе как модель пористой среды с трещинами, то по расходу жидкости, используя интегральный закон Дарси [16], можно определить коэффициент проницаемости такой среды  $K$ :

$$K = h^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{16l^2\beta}{\pi^4(l^2 + h^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2(\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l))} \right).$$

При  $l = 0$  получаем минимальное значение  $K = h^{2/3}$ . Наличие ячеек жидкости без пластин (трещин) способствует увеличению проницаемости такой пористой среды.

#### 4. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном перпендикулярно пластинам

Рассмотрим случай, когда функция давления зависит только от переменной  $y$ , причем  $\partial p / \partial y = const$ . Решение этой задачи во многом схоже с рассмотренным выше случаем, поэтому воспользуемся полученными результатами. Скорость жидкости в прямоугольной ячейке жидкости, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ , в центре которой поместим начало координат, представим в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \tilde{u}(x, y) + \tilde{u}_1(x, y), \\ u_y(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - l^2) + \tilde{v}(x, y) + \tilde{v}_1(x, y). \end{aligned}$$

Функции  $\tilde{u}(x, y)$  и  $\tilde{v}(x, y)$  представим в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}x\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}y\right) \right], \\ \tilde{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}x\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}y\right) \right]. \end{aligned}$$

Скорость жидкости в прямоугольной ячейке жидкости, ограниченном прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ , в центре которой поместим начало координат, представим в виде:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_x(x, y) &= \widehat{u}(x, y) + \widehat{u}_1(x, y), \\ \widehat{u}_y(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2) + \widehat{v}(x, y) + \widehat{v}_1(x, y).\end{aligned}$$

Так как на пластинах скорость жидкости должна быть равна нулю, то для функций  $\widehat{v}_1(x, y)$ ,  $\widehat{v}_2(x, y)$  запишем следующие граничные условия

$$\begin{aligned}\widehat{v}(\pm L, y) &= 0, \quad \widehat{v}(x, \pm h) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2), \\ \widehat{v}_1(x, \pm h) &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Процедура нахождения функций  $\widehat{v}(x, y)$ ,  $\widehat{v}_1(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа, аналогична использованной в работе [18]. Поэтому сразу запишем вид функций

$$\begin{aligned}\widehat{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\ \widehat{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\ \widehat{v}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \widehat{u}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right].\end{aligned}$$

Поскольку функция  $\coth(z)$  четная, то подставляя найденное  $y = \pm h$  в условие (4.1), получим равенство

$$-\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right]$$

Умножая обе части равенства на  $\cos(\pi(2k'+1)x/2L)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-L$  до  $L$ , с учетом ортогональности получим равенство

$$-\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \int_{-L}^L (x^2 - L^2) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) dx = L \widehat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right),$$

Откуда после интегрирования найдем коэффициент  $\widehat{E}_k$ :

$$\widehat{E}_k = (-1)^k \frac{2}{\eta \beta_k^3 L \coth(\beta_k h)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \beta_k = \frac{\pi(2k+1)}{2L}.$$

При этом имеем тождество

$$\eta \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} \right) \equiv 0.$$

На границах ячеек должны выполняться условия

$$\begin{aligned} u_x(-l, y) &= \hat{u}_x(L, y), & u_x(l, y) &= \hat{u}_x(-L, y), \\ \sigma_{xy}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(L, y) = 0, & \sigma_{xy}(l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(-L, y) = 0. \end{aligned}$$

С учетом представления функций  $\tilde{v}(x, y)$ ,  $\hat{v}(x, y)$  в указанном выше виде, из первого условия получим равенство

$$\hat{D}_k \coth(\lambda_k L) = \tilde{D}_k \coth(\lambda_k l). \quad (4.2)$$

Условие непрерывности касательных напряжений дает равенство

$$\begin{aligned} -\eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\tilde{D}_k \lambda \lambda_k \sinh(\lambda \lambda_k l) \cos(\lambda_k y) - \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\hat{D}_k \lambda \lambda_k \sinh(\lambda \lambda_k L) \cos(\lambda \lambda_k y) + \frac{\partial p}{\partial y} L. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Умножая обе части последнего равенства на  $\cos(\pi(2k'+1)y/(2h))$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , получим:

$$\begin{aligned} -\eta 2\tilde{D}_k h \lambda_k \sinh(\lambda_k l) - \frac{(-1)^k}{\lambda_k} \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta 2\hat{D}_k h \lambda_k \sinh(\lambda_k L) + \frac{(-1)^k}{\lambda_k} \frac{\partial p}{\partial y} L \end{aligned}$$

Два уравнения (4.2), (4.3) для определения коэффициентов  $\tilde{D}_k$  и  $\hat{D}_k$  имеют следующее решение

$$\begin{aligned} \hat{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{\eta \lambda_k^2 h \coth(\lambda_k L) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \tilde{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{\eta \lambda_k^2 h \coth(\lambda_k l) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

При  $l = L$  значение коэффициента  $\tilde{D}_k$  равно полученному в работе [18]. В этом случае условие непрерывности нормальных напряжений на границе  $y = \pm h$  выполняются. Для случая  $l \neq L$  в выражение для компонент скорости в ячейке без пластин необходимо добавить слагаемые, которые на границах  $x = \pm l$  дают нулевое значение скорости и касательных напряжений

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right], \\ \tilde{u}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right]. \end{aligned}$$

Из условия непрерывности нормальных напряжений  $\sigma_{yy}(x, y)$  на границах в таких ячейках  $y = \pm h$  получим равенство:

$$\begin{aligned} 2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \frac{\pi(2k+1)}{2l} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}h\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right] - \\ - 2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}x\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}h\right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h. \end{aligned}$$

Интегрируя по переменной  $x$  в интервале  $-l \leq x \leq l$ , получим:

$$2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \frac{(-1)^k}{l} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)h}{2l} \right) \right] - 2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \frac{(-1)^k}{l} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)l}{2h} \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h.$$

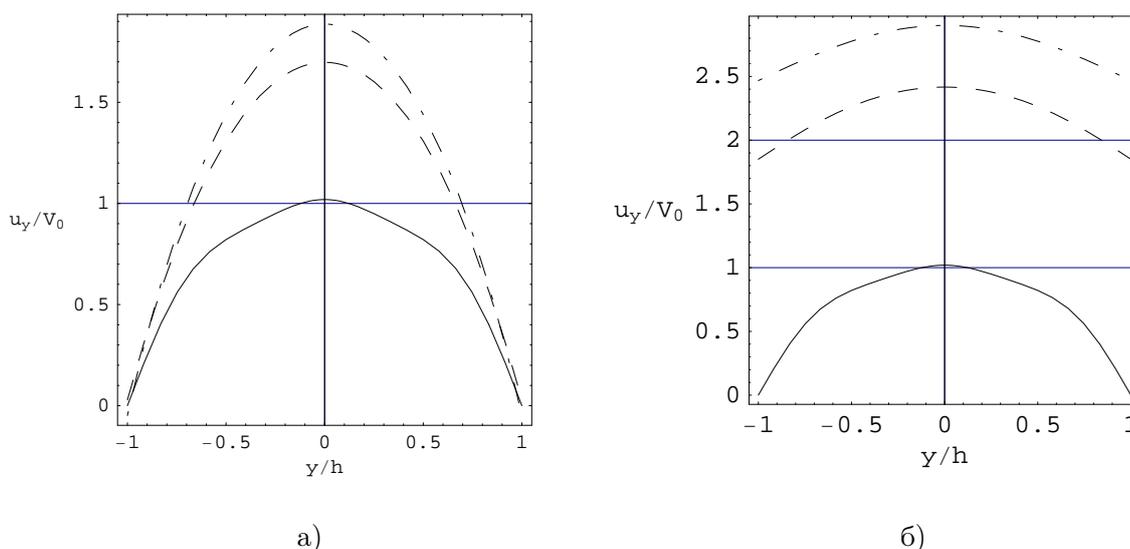
Используя результат работы [18], запишем:

$$\left[ \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right] \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

С учетом последнего равенства и выражения для коэффициента  $\tilde{D}_k$  получим:

$$\tilde{G}_k = \frac{(-1)^k}{\eta \lambda_k^2 h \sinh(\chi_k h)} \left( l - \frac{(L+l) \tanh(\lambda_k l)}{\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.4}$$

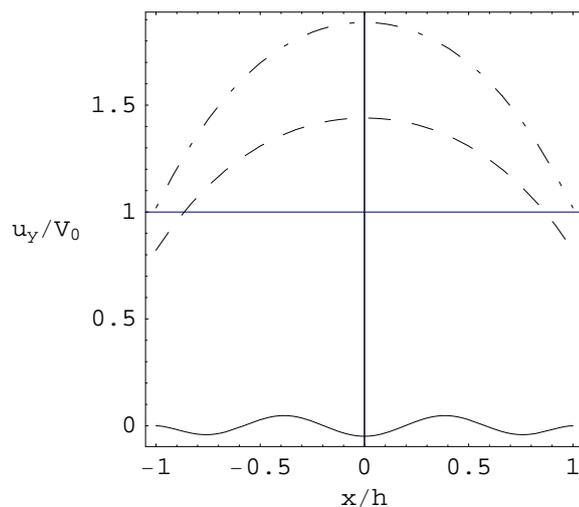
При  $l = L$  и  $L = 0$  получим, что  $\tilde{G}_k = 0$  и, соответственно, компоненты скорости  $\tilde{u}_1(x, y)$  и  $\tilde{v}_1(x, y)$  тоже равны нулю.



Р и с. 4.1

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_y/V_0$  от безразмерной координаты  $y/h$  для ячеек с пластинами (а) и без них (б) при различных значениях  $x/h$

На рис. 4.1 представлены, соответственно, графики функции  $u_x/V_0$  в зависимости от безразмерной координаты  $y/h$  для ячеек с пластинами и без них в случае  $L = l = h$ . Сплошная линия соответствует сечениям  $x/h = \pm 1$ , штриховая линия – сечению  $x/h = \pm 0.5$ , штрих-пунктирная – сечению  $x/h = 0$ .



Р и с. 4.2

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_y/V_0$  от безразмерной координаты  $x/h$  для ячеек с пластинами и без них при различных значениях  $y/h$

На рис. 4.2 представлен график той же функции в ячейке с пластинами в зависимости от безразмерной координаты  $x/h$  для значений  $y/h = \pm 1$  (сплошная линия),  $y/h = \pm 0.5$  (пунктирная линия) и  $y/h = 0$  (штрих-пунктирная линия). Функция представлена тремя первыми членами ряда. Отклонение значений функции от нуля при  $y/h = \pm 1$  (на пластинах) дает точность такого представления. Аналогичная точность наблюдается и в рассмотренном выше случае, при параллельном пластинам направлении градиента давления. Как видно из графиков, имеется принципиальная разница в поведении жидкости между пластинами при их ориентации относительно градиента давления. Так, при параллельном расположении скорость жидкости между пластинами замедляется в средней части, а при перпендикулярной ориентации, наоборот, увеличивается. Такое поведение скорости жидкости связано с двумерностью потока. Так, из уравнения неразрывности (1.5) следует, что скорость жидкости между пластинами меняется вдоль них из-за наличия составляющей вектора скорости, направленной перпендикулярно пластинам. Расход жидкости в рассматриваемом случае определяется также размерами ячеек без пластин; так, через ячейки с пластинами поток жидкости равен нулю.

## 5. Течение вязкой жидкости через периодическую структуру тонких стержней.

### 5.1. Постановка задачи

Исследуем течение несжимаемой жидкости вязкости  $\eta$  через периодическую решетку, образованную неподвижными частицами в виде тонких стержней. Стержни располагаются вдоль оси  $OX$  и оси  $OZ$ , имеют длину  $2L$  и период трансляции  $2l$  вдоль  $OX$ ,  $2d$  – вдоль  $OZ$  и  $2h$  – вдоль оси  $OY$ . В такой системе имеются два типа ячеек: ячейки размерами  $2L \times 2h \times 2d$ , в которых жидкость ограничена четырьмя стержнями, и ячейки размерами  $2l \times 2h \times 2d$ , в которых нет стержней. Будем рассматривать такие размеры ячеек, для которых возможно использовать приближение Стокса.

На поверхности каждого стержня должны выполняться условия прилипания (1.2). Заданный градиент давления может иметь произвольное направление в пространстве. Искомое распределение скорости жидкости должна быть периодической функцией относительно рассматриваемой системы стержней. При этом должны выполняться условия непрерывности скорости, нормальных и касательных напряжений на границах ячеек. Поскольку уравнения движения жидкости и граничные условия линейные по скорости, то общее решение задачи можно представить в виде суммы решения задач: течение жидкости с градиентом давления, направленным вдоль стержней и перпендикулярно к ним.

## 5.2. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном вдоль стержней

Приближенное периодическое решение в трехмерных ячейках свободной жидкости рассматривалось в работе [18]. С учетом результатов, полученных выше, это решение должно быть изменено. В системе координат, начало которой поместили в центре такой ячейки, то есть в прямоугольной призме, ограниченной плоскостями  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ ,  $z = \pm d$ , решение системы (2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2 + z^2 - d^2) + u(x, y, z) + \tilde{u}(x, y, z), \\u_y(x, y, z) &= v(x, y, z) + \tilde{v}(x, y, z), \\u_z(x, y, z) &= w(x, y, z) + \tilde{w}(x, y, z).\end{aligned}$$

Фактически рассматриваемая периодическая система является результатом пересечения двух структур двумерных пластин, аналогичных рассмотренной выше и расположенных перпендикулярно друг другу. Поэтому можем воспользоваться предыдущими результатами и записать выражения для функций  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right] + \\&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ E_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} z \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\v(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\w(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ E_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} z \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right].\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $D_k$ ,  $E_k$  находятся из условия неразрывности касательных напряжений на границах ячеек и соответственно равны

$$\begin{aligned}D_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{2l\eta\chi_k^2 \sinh(\chi_k h)} \frac{\partial p}{\partial x} h, \\E_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{2l\eta\chi_k^2 \sinh(\chi_k d)} \frac{\partial p}{\partial x} d, \\\chi_k &= \frac{\pi(2k+1)}{2l}.\end{aligned}$$

Для функций  $\tilde{u}(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}(x, y, z)$ ,  $\tilde{w}(x, y, z)$  получаем следующие выражения, в соответствии с процедурой, изложенной выше для двумерного случая:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\ \tilde{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \tilde{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right].\end{aligned}$$

Аналогично в ячейке между стержнями, то есть в прямоугольной призме, ограниченной плоскостями  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ ,  $z = \pm d$ , решение системы (2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{u}_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2 + z^2 - d^2) + \hat{u}(x, y), \\ \hat{u}_y(x, y, z) &= \hat{v}(x, y), \quad \hat{u}_z(x, y) = \hat{w}(x, y).\end{aligned}$$

Здесь функции  $\hat{u}(x, y)$ ,  $\hat{v}(x, y)$ ,  $\hat{w}(x, y)$  представляются в виде:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\ \hat{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \hat{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right].\end{aligned}$$

Из условия непрерывности скоростей на границах ячеек получим равенства:

$$\begin{aligned}\hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} L \right) &= \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} l \right), \\ \hat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} L \right) &= \tilde{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} l \right).\end{aligned}$$

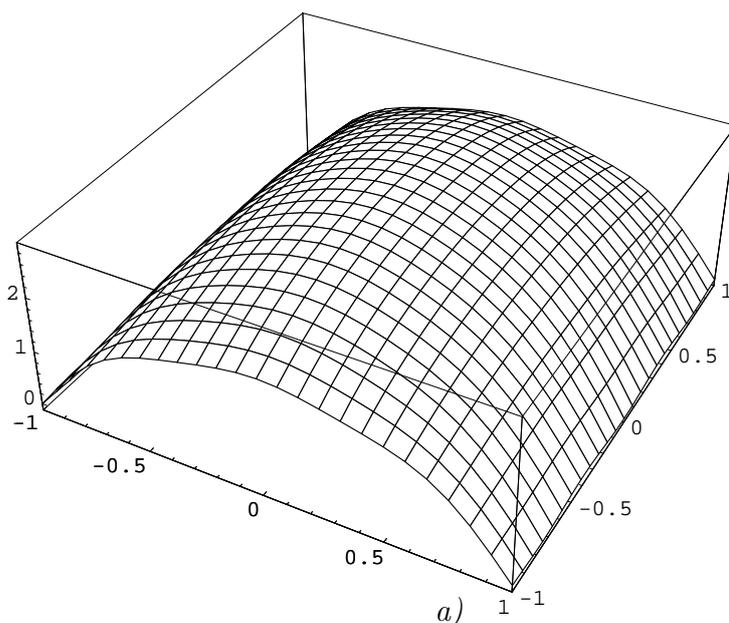
Используя условия неразрывности нормальных напряжений на границах ячеек, получим равенство, аналогичное полученным для двумерного случая. Умножая обе части полученного равенства на  $\cos \pi(2k'+1)y/2h$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , а затем умножая на  $\cos \pi(2k'+1)z/2d$  и интегрируя по  $z$  в пределах от  $-d$  до  $d$ , с учетом свойств ортогональности и соотношений коэффициентов, получим соотношение для коэффициентов:

$$\begin{aligned} & \eta \gamma_k^2 h \widehat{D}_k \frac{\sinh(\gamma_k L) \coth(\gamma_k l) + \sinh(\gamma_k l) \coth(\gamma_k L)}{\coth(\gamma_k l)} + \\ & + \eta \chi_k^2 d \widehat{E}_k \frac{\sinh(\chi_k L) \coth(\chi_k l) + \sinh(\chi_k l) \coth(\chi_k L)}{\coth(\chi_k l)} = (-1)^k \frac{\partial p}{\partial x} L, \\ & \gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{2h}, \quad \chi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2d}. \end{aligned}$$

Для случая  $h = d$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \widehat{D}_k &= (-1)^k \frac{L \coth(\gamma_k l)}{2h\eta\gamma_k^2 [\sinh(\gamma_k L) \coth(\gamma_k l) + \sinh(\gamma_k l) \coth(\gamma_k L)]} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \widetilde{D}_k &= (-1)^k \frac{L \coth(\chi_k L)}{2h\eta\chi_k^2 [\sinh(\chi_k L) \coth(\chi_k l) + \sinh(\chi_k l) \coth(\chi_k L)]} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \widehat{D}_k &= \widehat{E}_k, \quad \widetilde{D}_k = \widetilde{E}_k. \end{aligned}$$

Поскольку решение задачи представляет собой сумму решений двух задач с взаимно перпендикулярными пластинами, то все выводы, касающиеся изменения расхода жидкости через такие структуры, приведенные в разделе 1.2, справедливы и в этом случае.



**Р и с. 5.1**

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_x/V_0$  от безразмерных переменных  $y/h$  и  $z/h$  в ячейке со стержнями в сечении  $x/h = 0$

На рис. 5.1 представлен трехмерный график функции  $u_x/V_0$  от безразмерных переменных  $y/h$  и  $z/d$  в ячейке со стержнями для случая  $L = l = h = d$  в сечении  $x = 0$ .

### 5.3. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном перпендикулярно стержням

Рассмотрим случай, когда функция давления зависит только от переменной  $y$ , причем  $dp/dy = const$ . Решение этой задачи во многом схоже с рассмотренным выше случаем

для пластин, поэтому воспользуемся полученными результатами. Поместив начало координат в центр прямоугольной ячейки, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ ,  $z = \pm d$ , представим скорость жидкости в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x, y, z) &= \tilde{u}(x, y, z) + \tilde{u}_1(x, y, z), \\ \tilde{u}_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - l^2 + z^2 - d^2) + \tilde{v}(x, y, z) + \tilde{v}_1(x, y, z) \\ \tilde{u}_z(x, y, z) &= \tilde{w}(x, y, z) + \tilde{w}_1(x, y, z).\end{aligned}$$

Функции  $\tilde{u}(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}(x, y, z)$  и  $\tilde{w}(x, y, z)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \tilde{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \cosh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ \tilde{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right].\end{aligned}$$

Для функций  $\tilde{u}_1(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}_1(x, y, z)$  и  $\tilde{w}_1(x, y, z)$  запишем выражения:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ \tilde{v}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\ \tilde{w}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{H}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right].\end{aligned}$$

Решение для скорости жидкости в прямоугольной ячейке жидкости, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ ,  $z = \pm d$ , в центре которой поместим начало координат, представим в виде:

$$\begin{aligned}\hat{u}_x(x, y, z) &= \hat{u}(x, y, z) + \hat{u}_1(x, y, z), \\ \hat{u}_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2 + z^2 - d^2) + \hat{v}(x, y, z) + \hat{v}_1(x, y, z), \\ \hat{u}_z(x, y, z) &= \hat{w}(x, y, z) + \hat{w}_1(x, y, z).\end{aligned}$$

Процедура нахождения функций  $\hat{v}(x, y, z)$ ,  $\hat{v}_1(x, y, z)$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа, аналогична использованной выше для случая с пластинами. Поэтому сразу запишем вид решения для скорости жидкости в ячейке:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{G}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\
\hat{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right] + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\
\hat{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{H}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\
\hat{u}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\
\hat{v}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\
\hat{w}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right].
\end{aligned}$$

Поскольку на стержнях скорость жидкости должна быть равна нулю, то для функций  $\hat{v}(x, y, z)$ ,  $\hat{v}_1(x, y, z)$  запишем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_y(x, \pm h, z) &= -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (x^2 - L^2 + z^2 - d^2), \\
\hat{u}_y(x, \pm h, \pm d) &= 0, \quad \hat{u}_y(x, \pm h, \pm d) = 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

С учетом вида функции  $\hat{v}(x, y, z)$  и условия четности функции  $\coth(z)$  из условия (5.1) получим равенство:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - d^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} h \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right]
\end{aligned}$$

Умножая обе части первого равенства на  $\cos(\pi(2k'+1)x/2L)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-L$  до  $L$ , а второго – на  $\cos(\pi(2k'+1)z/2d)$  и интегрируя по  $z$  в пределах от  $-d$  до  $d$ , с учетом ортогональности получим выражения:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \int_{-L}^L (x^2 - L^2) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) dx &= L \hat{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right), \\
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \int_{-d}^d (z^2 - d^2) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) dz &= L \hat{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} h \right)
\end{aligned}$$

Из этого после интегрирования найдем коэффициенты  $\widehat{G}_k, \widehat{H}_k$ :

$$\widehat{G}_k = \frac{(-1)^k}{\eta\beta_k^3 L \coth(\beta_k h)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \beta_k = \frac{\pi(2k+1)}{2L},$$

$$\widehat{H}_k = \frac{(-1)^k}{\eta\chi_k^3 d \coth(\chi_k h)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \chi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2d}.$$

При этом тождественно выполняются равенства:

$$\eta\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}\right) \equiv 0,$$

$$\eta\left(\frac{\partial \widehat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z}\right) \equiv 0.$$

На границах ячеек должны выполняться условия непрерывности скорости и напряжений:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x(-l, y, z) &= \widehat{u}_x(L, y, z), & \widetilde{u}_x(l, y, z) &= \widehat{u}_x(-L, y, z), \\ \widetilde{\sigma}_{xy}(-l, y, z) &= \widehat{\sigma}_{xy}(L, y, z), & \widetilde{\sigma}_{xy}(l, y, z) &= \widehat{\sigma}_{xy}(-L, y, z), \\ \widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, d) &= \widehat{\sigma}_{yz}(x, y, -d), & \widehat{\sigma}_{yz}(x, y, d) &= \widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, -d), \\ \widetilde{\sigma}_{yy}(x, -h, z) &= \widetilde{\sigma}_{yz}(x, h, z), & \widehat{\sigma}_{yy}(x, -h, z) &= \widehat{\sigma}_{yy}(x, h, z). \end{aligned}$$

С учетом представления функций  $\widetilde{v}(x, y), \widehat{v}(x, y)$  в указанном выше виде из первого условия получим соотношения:

$$\widehat{E}_k = \widetilde{E}_k, \quad \widehat{H}_k = \widetilde{H}_k, \quad \widehat{D}_k \coth(\gamma_k L) = \widetilde{D}_k \coth(\gamma_k l). \quad (5.2)$$

Из условий непрерывности касательных напряжений  $\widetilde{\sigma}_{xy}(-l, y, z) = \widehat{\sigma}_{xy}(L, y, z), \widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, d) = \widehat{\sigma}_{yz}(x, y, -d)$  получим равенства:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{2h\eta\gamma_k^2 \sinh(\gamma_k d)} \frac{\partial p}{\partial y} d, \\ -\eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\widetilde{D}_k \gamma_k \sinh(\gamma_k l) \cos(\gamma_k y) - \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\widehat{D}_k \gamma_k \sinh(\gamma_k L) \cos(\gamma_k y) + \frac{\partial p}{\partial y} L. \end{aligned}$$

Аналогичные равенства получаются из условий  $\widetilde{\sigma}_{xy}(l, y, z) = \widehat{\sigma}_{xy}(-L, y, z), \widehat{\sigma}_{yz}(x, y, d) = \widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, -d)$ . Умножая обе части последнего равенства на  $\cos(\pi(2k'+1)y/(2h))$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , получим:

$$\begin{aligned} -\eta 2\widetilde{D}_k h \gamma_k \sinh(\gamma_k l) - \frac{(-1)^k}{\gamma_k} \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta 2\widehat{D}_k h \gamma_k \sinh(\gamma_k L) + \frac{(-1)^k}{\gamma_k} \frac{\partial p}{\partial y} L. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из соотношений (5.2)- (5.3) определим выражения для коэффициентов  $\widetilde{D}_k$  и  $\widehat{D}_k$ , которые имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{2\eta\gamma_k^2 h \coth(\gamma_k L) [\tanh(\gamma_k L) + \tanh(\gamma_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \widetilde{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{2\eta\gamma_k^2 h \coth(\gamma_k l) [\tanh(\gamma_k L) + \tanh(\gamma_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}$$

Для определения коэффициента  $\widetilde{G}_k$  используем условие непрерывности нормальных напряжений  $\widetilde{\sigma}_{yy}$  при  $y = \pm h$ . Получим соотношение

$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{G}_k \frac{\pi(2k+1)}{2l} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}h\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right] + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{H}_k \frac{\pi(2k+1)}{2d} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2d}h\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2d}z\right) \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{D}_k \frac{(-1)^k \pi(2k+1)}{2h} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}x\right) \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{E}_k \frac{(-1)^k \pi(2k+1)}{2h} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}z\right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h.\end{aligned}$$

Интегрируя по переменной  $x$  в интервале  $-l \leq x \leq l$ , а по переменной  $z$  – в интервале  $-d \leq z \leq d$ , получим:

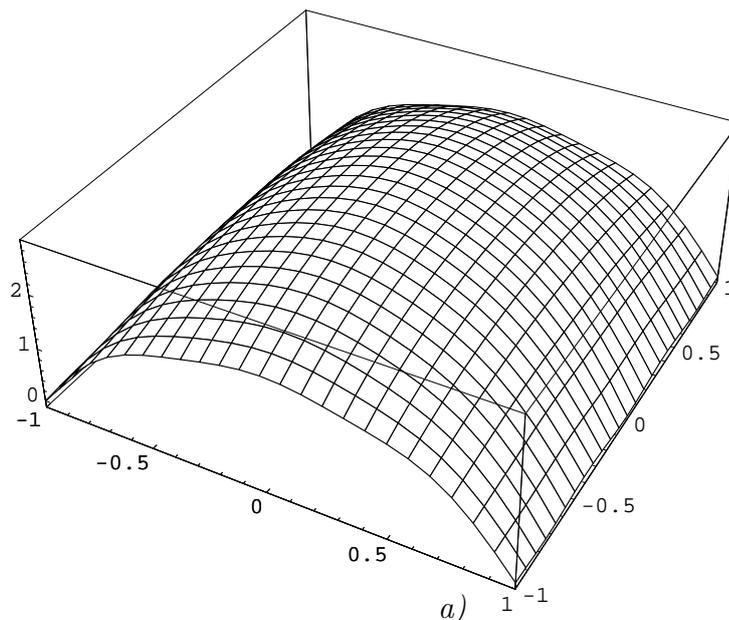
$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \eta \left[ \frac{\widetilde{G}_k}{l} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}h\right) + \frac{\widetilde{H}_k}{d} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2d}h\right) \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \eta \left[ \frac{\widetilde{D}_k}{h} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}l\right) + \frac{\widetilde{E}_k}{d} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}d\right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h.\end{aligned}$$

Подставляя выражения для коэффициентов  $\widetilde{D}_k$ ,  $\widetilde{E}_k$ ,  $\widetilde{H}_k$  и используя полученное в работе [18] равенство

$$\left[ \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right] \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

получим выражение для коэффициента  $\widetilde{G}_k$ . В случае  $L = d = h = l$  он равен

$$\widetilde{G}_k = -\widetilde{H}_k.$$



Р и с. 5.2

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_y/V_0$  от безразмерных переменных  $y/h$  и  $x/h$  в ячейке со стержнями

На рис. 5.2 представлен трехмерный график функции  $u_y/V_0$  в зависимости от безразмерной координаты  $y/h$  и  $x/l$  в случае  $L = l = h = d$  при  $z = 1$  в ячейке со стержнями. Функция представлена тремя первыми членами каждого ряда, входящего в ее выражение. Отклонение значения функции от нуля на стержнях дает точность такого представления.

Задача о течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления, зависящим только от переменной  $z$ , причем  $\partial p/\partial z = const$ , имеет аналогичное решение и в данной работе не рассматривается.

## 6. Заключение

Разработана процедура нахождения приближенного периодического решения течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через бесконечные периодические структуры в виде тонких пластин (двумерный случай) и в виде тонких стержней (трехмерный случай) при их произвольной ориентации относительно приложенного градиента давления. Полученные приближенные выражения для скорости течения жидкости позволяют более качественно моделировать массоперенос в таких структурах и определять способы его увеличения.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Ф. Ефремов, *Периодические коллоидные структуры*, Химия, Л., 1971, 192 с.

2. P. Habdas, E. R. Weeks, “Video microscopy of colloidal suspensions and colloidal crystals”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science.*, 2002, № 7, 196–203.
3. P. N. Pusey, W. van Meegen, S. M. Underwood, P. Bartlett and R. H. Ottewill, “Colloidal fluids, crystals and glasses”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Application*, **176**:1 (1991), 16–27.
4. P. N. Pusey, W. van Meegen, “Phase behaviour of concentrated suspensions of nearly hard colloidal spheres”, *Nature*, **320** (1986), 340–342.
5. А. В. Жуков, “Кристаллическая структура и реология высококонцентрированных ферромагнитных суспензий”, *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2006, № 5, 122–134.
6. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of triplet interactions on the phase diagram of suspensions of charged colloids”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, **15**:48 (2003), S3549–S3556.
7. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of three-body interactions on the phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Physical Review E*, **69** (2004), 061407-1–061407-8.
8. J. Dobnikar, R. Rzehak, H. H. von Grünberg, “Effect of many-body interactions on the solid-liquid phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Europhysics Letters*, **61**:5 (2003), 695–701.
9. J. C. Maxwell, *Treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873, 500 с.
10. J. W. Rayleigh, “On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **34**:211 (1892), 481–502.
11. Н. С. Бахвалов, “Осредненные характеристики тел с периодической структурой”, *ДАН СССР*, **218**:5 (1974), 1046–1048.
12. В. Л. Бердичевский, “Пространственное осреднение периодических структур”, *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, **222**:3 (1975), 565–567.
13. А. Л. Бердичевский, “Об обтекании вязкой жидкостью периодической решетки сфер”, *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1981, № 4, 37–44.
14. С. И. Мартынов, “Движение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер”, *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2002, № 6, 48–54.
15. С. И. Мартынов, А. О. Сыромясов, “Симметрия периодической решетки частиц и потока вязкой жидкости в приближении Стокса”, *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2007, № 3, 7–20.
16. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965, 553 с.
17. С. И. Аристов, А. Д. Полянин, “Точные решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса”, *Докл. РАН*, **427**:1 (2009), 35–40.

18. М. С. Дерябина, С. И. Мартынов, “Периодическое течение вязкой жидкости с заданным градиентом давления и температуры”, *Нелинейная динамика*, **14**:1 (2018), 81–97.

Поступила 15.03.2019

MSC2010 76D07, 76D09, 76D17

## The flow of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient through periodic structures

© M. S. Deryabina<sup>1</sup>, S. I. Martynov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the Stokes approximation, the problem of viscous fluid flow through two-dimensional and three-dimensional periodic structures is solved. A system of thin plates of a finite width is considered as a two-dimensional structure, and a system of thin rods of finite length is considered as a three-dimensional structure. Plates and rods are periodically located in space with certain translation steps along mutually perpendicular axes. On the basis of the procedure developed earlier, the authors constructed an approximate solution of the equations for fluid flow with an arbitrary orientation of structures relative to a given vector of pressure gradient. The solution is sought in a finite region (cells) around inclusions in the class of piecewise smooth functions that are infinitely differentiable in the cell, and at the cell boundaries they satisfy the continuity conditions for velocity, normal and tangential stresses. Since the boundary value problem for the Laplace equation is solved, it is assumed that the solution found is unique. The type of functions allows us to separate the variables and to reduce the problem's solution to the solution of ordinary differential equations. It is found that the change in the flow rate of a fluid through a characteristic cross section is determined mainly by the geometric dimensions of the cells of the free liquid in such structures and is practically independent of the size of the plates or rods.

**Key Words:** viscous fluid, pressure gradient, periodic structures, periodic solution

## REFERENCES

1. I. F. Efremov, *Periodic colloidal structures*, Chemistry, L., 1971 (In Russ.), 192 p.
2. P. Habdas, E. R. Weeks, “Video microscopy of colloidal suspensions and colloidal crystals”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science.*, 2002, № 7, 196–203.
3. P. N. Pusey, W. van Megen, S. M. Underwood, P. Bartlett and R. H. Ottewill, “Colloidal fluids, crystals and glasses”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Application*, **176**:1 (1991), 16–27.
4. P. N. Pusey, W. van Megen, “Phase behaviour of concentrated suspensions of nearly hard colloidal spheres”, *Nature*, **320** (1986), 340–342.
5. A. V. Zhukov, “Crystal structure and rheology of highly concentrated ferromagnetic suspensions”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Fluid and Gas*, 2006, no. 5, 122–134 (In Russ.).

<sup>1</sup>**Mariya S. Deryabina**, Assistant Professor, Institute of Information Systems and Technological Complexes, Yugra State University (16 Chekhova St., Khanty-Mansiysk 628000, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4331-3675>, deryabinams@mail.ru

<sup>2</sup>**Sergey I. Martynov**, Professor, Institute of Information Systems and Technological Complexes, Yugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk 628000, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

6. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of triplet interactions on the phase diagram of suspensions of charged colloids”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, **15**:48 (2003), S3549–S3556.
7. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of three-body interactions on the phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Physical Review E*, **69** (2004), 061407-1–061407-8.
8. J. Dobnikar, R. Rzehak, H. H. von Grünberg, “Effect of many-body interactions on the solid-liquid phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Europhysics Letters*, **61**:5 (2003), 695–701.
9. J. C. Maxwell, *Treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873, 500 c.
10. J. W. Rayleigh, “On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **34**:211 (1892), 481-502.
11. N. S. Bakhvalov, “The averaged characteristics of bodies with a periodic structure”, *Akad. Nauk USSR*, **218**:5 (1974), 1046–1048 (In Russ.).
12. A. L. Berdichevsky, “Spatial averaging of periodic structures”, *Akad. Nauk USSR*, **222**:3 (1975), 565–567 (In Russ.).
13. A. L. Berdichevsky A.L., “On the flow past a viscous liquid of a periodic lattice of spheres”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 1981, no. 4, 37—44 (In Russ.).
14. S. I. Martynov, “Motion of a viscous fluid through a periodic lattice of spheres”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Fluid and Gas*, 2002, no. 6, 48–54 (In Russ.).
15. S. I. Martynov, A. O. Syromyasov, “Symmetry of the periodic lattice of particles and the flow of a viscous fluid in the Stokes approximation”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 2007, no. 3, 7–20 (In Russ.).
16. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965, 553 c.
17. S. I. Aristov, A. D. Polyandin, “Exact solutions of three-dimensional nonstationary Navier-Stokes equations”, *Akad. Nauk USSR*, **427**:1 (2009), 35–40 (In Russ.).
18. M. S. Deryabina, S. I. Martynov, “Periodic flow of a viscous fluid with a predetermined pressure and temperature gradient”, *Nonlinear Dynamics*, **14**:1 (2018), 81–97 (In Russ.).

*Submitted 15.03.2019*