DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.34-47

УДК 519.85:517.988

Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проектирования в переменной метрике

© **В. Г. Малинов**[1]

Аннотация. В работе изучается новый непрерывный метод второго порядка для решения задач минимизации непрерывно дифференцируемых по Фреше выпуклых функций на выпуклом замкнутом простом множестве в сепарабельном нормированном гильбертовом пространстве с переменной метрикой. Этот метод ускоряет обычный непрерывный проекционный метод минимизации с помощью квазиньютоновских матриц. В методе использован, кроме оператора переменной метрики, вектор направления движения к минимуму функции, построенный во вспомогательной экстраполированной точке. Иными словами, исследован сложный непрерывный экстраградиентный метод с переменной метрикой. Дан краткий обзор развития родственных методов и указаны их связи с исследуемым методом. Приведены вспомогательные неравенства, используемые для теоретического обоснования метода. С их помощью, при заданных дополнительных условиях, включая требования к оператору метрики и к параметрам метода, доказана сходимость метода для выпуклых гладких функций. При условиях, полностью идентичных условиям теоремы сходимости, без дополнительных требований к свойствам функции, для выпуклых гладких функций, получены оценки скорости сходимости метода. Указано, что вычислительную реализацию метода нужно выполнять с помощью численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, с учётом условий доказанных теорем.

Ключевые слова: выпуклая функция, непрерывный метод минимизации, проекция в переменной метрике, сходимость, скорость сходимости.

1. Введение

Рассмотрим задачу минимизации на простом множестве $Q \subset H$:

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1.1}$$

где Q – выпуклое замкнутое множество из сепарабельного гильбертова пространства H с нормой $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}\ \forall\ \mathbf{x} \in H$; «овражная» функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывно дифференцируема по Фреше на H, с градиентами $\nabla f(\mathbf{x})$, удовлетворяющими условию Липшица,

$$\|\nabla f(\mathbf{u}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \le L\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|,\ \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H,\ L = const > 0. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что условия существования решения задачи выполнены,

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty,\ \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q :\ f(\mathbf{x}) = f_*\} \ne \emptyset. \tag{1.3}$$

В ряде работ как для решения задач вида (1.1), так и нелинейной минимизации при функциональных ограничениях исследованы как непрерывные проекционные методы (НПММ), основанные на дифференциальных моделях оптимизации (см. [1]–[7]), так и итеративные методы (см., например, [8]–[9]). НПММ имеют форму задачи Коши для

[1]**Малинов Валериан Григорьевич**, доцент ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432000, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, vgmalinov@mail.ru

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, с оператором метрики в обеих частях ОДУ или только в его правой части. ОДУ в них могут быть от первого до высоких порядков, в соответствии с этим определяется порядок НПММ.

Если проекционное отображение зависит от градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x}(t))$, то имеем метод проекции градиента (НМПГ) ([1]–[5]).

В общем случае НПММ называем непрерывный метод с проекционным оператором, зависящим от сложного векторного выражения, например, вида $g(\mathbf{y}(t))+\delta(t)h(\mathbf{v}(t))$, где, например, $\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}(\mathbf{y}(t),\nabla f(\mathbf{y}(t)),\, g(\mathbf{y}(t)),\, \mathbf{y}(t)=\varphi(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}'(t))$ – вектор-функция; $\delta(t)\neq 0$ – скалярная или векторная функция; очевидно, что НМПГ — частный случай НПММ [6].

Быстрота и точность решения «овражных» задач с помощью НПММ выше для случая НПММ переменной метрики (НПММПМ). Поэтому предложены НПММПМ, сначала на основе простейших НМПГ (НМПГПМ) в работах [3]–[5], первого и второго порядков. В работе [4] доказана сходимость НМПГПМ второго порядка, но нет оценок скорости сходимости. В работе [5] доказана сходимость и получены оценки экспоненциальной скорости сходимости другого НМПГПМ второго порядка.

В работе [6] предложен и исследован НПММПМ второго порядка с оператором $P_Q(\mathbf{z}(t))$ проектирования не в переменной, а обычной евклидовой метрике, порожденной исходной нормой из задачи (1.1) (где сложная функция $\mathbf{z}(t)=g(\mathbf{y}(t))+\beta(t)\mathbf{B}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t))$ есть комбинация векторного выражения и произведения оператора метрики и градиента сложной функции; $\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t)+\alpha(t)\mathbf{x}'(t))$; доказаны сходимость и экспоненциальная скорость сходимости метода.

Цель предлагаемой работы — полное исследование НПММПМ второго порядка с оператором проектирования в новой, переменной метрике (см. [7]), итеративный аналог которого — проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный метод минимизации (ПОДМ) с оператором проектирования в переменной метрике [8].

2. Пространство H_1 и предлагаемый метод

Задачу (1.1) решаем в сепарабельном гильбертовом пространстве H_1 с двумя метриками. Первая метрика — обычная евклидова (см. постановку задачи), а вторая $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{x})}=(\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u})^{1/2}$ вводится новым скалярным произведением $(\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u})$, где $\mathbf{G}(\mathbf{x}): H\longrightarrow H$ при каждом фиксированном $\mathbf{x}\in H$ есть положительный самосопряженный линейный оператор новой метрики пространства [3]–[4]. В новой метрике критерий проекции $\mathbf{w}=P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x})}(\mathbf{v})\in Q$ (называемой $\mathbf{G}$-проекцией) есть неравенство

$$(\mathbf{G}(\mathbf{x})(\mathbf{w}-\mathbf{v}),\mathbf{u}-\mathbf{w})\geq 0,\ \mathbf{u}\in Q. \tag{2.1}$$

Эта $\mathbf{G}$-проекция определяется условием $\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{x})}=\inf_{\mathbf{u}\in Q}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{x})}$, она существует, вычисляется как решение $\mathbf{w}\in Q$ квадратичной задачи

$$g(\mathbf{u})=(\mathbf{G}(\mathbf{x})(\mathbf{u}-\mathbf{v}),\mathbf{u}-\mathbf{v})\longrightarrow \inf,\quad \mathbf{u}\in Q, \tag{2.2}$$

и единственна в силу выпуклости множества Q и сильной выпуклости функции $g(\mathbf{u})$ [3].

В пространстве H_1 наряду с (2.1) имеет место классический критерий (см. [9], с. 189) проекции $\mathbf{w}\in Q$ вектора $\mathbf{v}\in H_1$

$$(\mathbf{w}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{w})\geq 0\quad \forall\,\mathbf{u}\in Q \tag{2.3}$$

на выпуклое замкнутое множество $Q \subset H_1$. Поскольку сепарабельные гильбертовы пространства с различными скалярными произведениями изоморфны ([10], с. 156), в H_1 сохраняются все соотношения и теоремы из E^n и H, связанные со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Пусть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^2[0, +\infty)$ является решением задачи Коши

$$\begin{gathered} \alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{y}(t))}[\mathbf{y}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t))], \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \sigma(t)\mathbf{x}'(t),\ t \geq 0,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$; функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ — параметры НПММПМ второго порядка (2.4); самосопряженный линейный оператор метрики $\mathbf{G}(\mathbf{y})$ таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq M\|\mathbf{u}\|^2,\ 0 < m \leq M,\ \mathbf{u}, \mathbf{y} \in H_1; \tag{2.5}$$

а для обратного ему оператора имеют место неравенства

$$\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{M} \leq (\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{m},\ \mathbf{u}, \mathbf{y} \in H_1; \tag{2.6}$$

в правой части (2.4) проектирование проводится в новой метрике $\mathbf{G}(\mathbf{y})$, для этого вычисляется минимум сильно выпуклой функции в задаче вида (2.2). Предполагается, что решение задачи Коши (2.4) существует на всей полуоси $[0, \infty)$.

Приведем результаты исследования НПММПМ (2.4) для решения задачи вида (1.1) в пространстве H_1.

Отметим, что при $\alpha(t) = 0$, $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{I}$, $\sigma(t) = 0$ из (2.4) получим НМПГ первого порядка [1]; при $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{I}$, $\sigma(t) = 0$ из (2.4) получим НМПГ второго порядка [2]; при $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\sigma(t) = 0$ метод (2.4) превращается в НМПГПМ первого порядка, предложенный и исследованный в работе [3]; при $\sigma(t) = 0$ и наличии оператора метрики при второй производной в левой части из (2.4) получим НМПГПМ второго порядка из работы [4]; при $\sigma(t) = 0$, $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{y}(t))(\mathbf{v})} = P_Q(\mathbf{v})$ из (2.4) получим НМПГПМ второго порядка, предложенный и исследованный в работе [5]; если $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{y}(t))(\mathbf{v})} = P_Q(\mathbf{v})$, $\sigma(t) \neq 0$, то (2.4) преобразуется в НПММПМ второго порядка из работы [6].

Данная работа дополняет теорию НПММ исследованием НПММПМ второго порядка без оператора метрики в левой части ОДУ вне оператора проектирования (см. [4]–[6]). (Аргумент t у функции $\mathbf{x}(t)$ параметров метода, и их производных часто опускаем.)

3. Вспомогательные утверждения

Приведем вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве сходимости и оценок скорости сходимости НПММПМ семейства (2.4) и других методов в пространстве H_1.

Замечание 3.1 *Неравенство*

$$\left(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0 \ \forall\, \mathbf{u} \in Q \tag{3.1}$$

можно получить путем применения критерия проекции (2.3) из равенства

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left(\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right), \quad \beta > 0.$$

Последнее соотношение и (3.1) для евклидова пространства E^n с переменной метрикой имеются в работе [3]. Они представляют собой условия оптимальности точки $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$. В E^n с обычной метрикой их аналоги даны в [9]. Следующая лемма выражает формальную взаимосвязь необходимых условий оптимальности точки $\mathbf{x}^*$ для функции $f(\mathbf{x})$ в исходной метрике пространства H ([9], с. 165) и в метрике $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ в терминах оператора проекции $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x})}$ в H_1.

Л е м м а 3.1 [3] *Пусть:* 1) *множество* $Q \subset H_1$ *выпукло и замкнуто;* 2) *функция* $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(H_1)$ *– выпуклая;* 3) $Q_* \neq \emptyset$, $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$.

Тогда из равенства $\mathbf{x}^* = P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)}\left[\mathbf{x}^* - \beta \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right]$ *следует неравенство*

$$(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \ \mathbf{u} \in Q. \tag{3.2}$$

Доказательство леммы 3.1 имеется в работе [3]. Неравенство (3.2) совпадает с критерием оптимальности точки для выпуклой функции ([9], с. 165, теорема 4.2.3).

Л е м м а 3.2 *В пространстве* H_1 *имеет место двойное неравенство*

$$\begin{gathered}(1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \leq \\ \leq (1+\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + (1+\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \quad \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in H_1.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Доказательство проводится с помощью соотношений

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{u}-\mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2, \tag{3.4}$$

$$2|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \varepsilon\|\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon^{-1}\|\mathbf{v}\|^2 \ \forall \varepsilon > 0, \ \mathbf{u}, \ \mathbf{x}, \ \mathbf{v} \in H_1. \tag{3.5}$$

и неравенства Коши-Буняковского. Для E^n (3.3) доказано в работе [8] и используется в [7]. Правое неравенство (3.3) известное, здесь оно для единообразия изложения дано в H_1.

Л е м м а 3.3 *Для всякой тройки точек* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{x} \in H_1$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \geq (\varepsilon - 1)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2 - (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2, \tag{3.6}$$

где $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} = \dfrac{s \mp (s^2 - 4l_2l_3)^{1/2}}{2l_2}$ *есть решение неравенства*

$$l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \leq 0,$$

эквивалентного (3.5); $\quad l_1 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2, \quad l_2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2, \quad l_3 = \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2, \quad s = l_1 + l_2 + l_3.$

Доказательство, опирающееся на неравенство четырёхугольника для метрики (см. [10], с. 56), для E^n приведено в работе [8].

З а м е ч а н и е 3.2 *Верхняя и нижняя границы числа* $\varepsilon > 0$ *в* (3.6) *зависят от соотношений длин сторон треугольника с вершинами* $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$*; случай их расположения на одной прямой возможен. Приведем пример не обременительных ограничений, при которых допустимы конкретные значения* $\varepsilon > 0$ *в (3.6):*

$$\|0.5(\mathbf{v}-\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|. \tag{3.7}$$

Для вычисления границ $\varepsilon > 0$ *в (3.6) при ограничении (3.7) решаем эквивалентное (3.6) неравенство* $l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \leq 0$*, получаемое при* $l_1 = l_2 = 0.25l_3$ *в (3.6):* $l_3 \geq (\varepsilon-1)l_3 - 4(1-\varepsilon^{-1})l_3$*, то есть* $\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 4 \leq 0$*. Получаем* $\varepsilon_{1,2} = 3 \mp 5^{1/2}$, $\varepsilon_1 = 0.764$, $\varepsilon_2 = 5.236$*; тогда можно взять приближенное множество допустимых значений* $\varepsilon \in [0.8; 5.0]$.

Отметим, что в неравенстве (3.6) при подстановке конкретных векторов весьма желательна упорядоченность тройки $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x} \in H_1$ для сохранения $\varepsilon \in [\varepsilon_1; \varepsilon_2]$.

Неравенства ограничения (3.7) имеют простой геометрический смысл, эквивалентный их обоснованию (очевидный из построения треугольника). Например, из (3.7) следует, что в треугольнике с вершинами $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ длина половины основания $\mathbf{vx}$ (равная $\|\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{v})\|$) не превышает длину каждой из боковых сторон. В случае знаков равенства в (3.7) три вектора будут на одной прямой, и треугольник выродится в прямую.

Итак, о неравенствах (3.6)–(3.7) можно сделать следующие выводы.

1) (3.6) применяем как единое целое со множеством $[\varepsilon_1; \varepsilon_2]$ возможных в (3.6) значений параметра $\varepsilon > 0$, то есть (3.6) вполне определяется в совокупности с вычисленным множеством $[\varepsilon_1; \varepsilon_2]$.

2) Ограничения неравенства (здесь вида (3.7)) служат лишь для вычисления границ множества допустимых $\varepsilon > 0$ в (3.6) и реализуют свойства «геометрии» метода.

3) Ограничения неравенства в общем случае не обязаны влиять на сходимость метода (но в случае линейной скорости сходимости метода значения $\varepsilon \in [\varepsilon_1; \varepsilon_2]$ косвенно могут повлиять на величину знаменателя прогрессии).

4) (3.6) обеспечивает ослабление требований к минимизируемой функции (например, позволяет обходиться без требования сильной выпуклости функции для оценки скорости сходимости метода).

Лемма 3.4 *В пространстве* H_1 $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1$ *имеет место неравенство*

$$-2(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq (\varepsilon - 2)\|\mathbf{u}\|^2 - (2-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}\|^2, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2, \tag{3.8}$$

где ε_1, ε_2 *вычисляются по формулам из леммы 3.3.*

Доказательство. Представим тождество (3.4) в виде

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|(\mathbf{u}-\mathbf{x})-(\mathbf{v}-\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{u}-\mathbf{x}, \mathbf{v}-\mathbf{x}) + \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2.$$

Положив здесь $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, запишем равенство:

$$-2(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2. \tag{3.9}$$

К первому слагаемому в правой части (3.9) применим неравенство (3.6) при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тогда

$$-2(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq (\varepsilon-1)\|\mathbf{u}\|^2 - (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= (\varepsilon-2)\|\mathbf{u}\|^2 - (2-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}\|^2.$$

Доказательство закончено.

В предложениях 3.1–3.5 приведем другие вспомогательные неравенства (в них не существенно, $\mathbf{x}^* \in Q_*$ или иная точка).

Предложение 3.1 *Для метода (2.4) верны неравенства*

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| \leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*) - (\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)\|, \tag{3.10}$$

следующие из (3.7) при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}-\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем справедливость левого неравенства (3.10): с учетом левого (2.5)

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| \le \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - m\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\|;$$

или, с другой стороны, пользуясь правым неравенством (2.5):

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| \ge \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - M\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\|.$$

Из этих двух оценок следует: $-M\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\| \le -m\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\|$, то есть $m \le M$.

При доказательстве предложений 3.1–3.4 пользуемся известными неравенствами

$$|a-b| \le |a|+|b|,\ |a-b| \ge |a|-|b|, |a+b| \le |a|+|b|. \tag{3.11}$$

Из первого неравенства (3.11) имеем:

$$0 \ge \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*) - (\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)\| \ge$$

$$\ge \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| = -\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|.$$

С другой стороны, получим оценку сверху:

$$0 \le \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*) - (\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| \le$$

$$\le \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

П р е д л о ж е н и е 3.2 *Для метода (2.4) верны неравенства*

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{w}-\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}-(\mathbf{w}-\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}^*-\mathbf{w}\|, \tag{3.12}$$

следующие из (3.7) при $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}=\mathbf{x}^*-\mathbf{y}$, $\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{y}$.

Доказательство проводится с помощью неравенств (3.11) аналогично доказательству предложения 3.1.

П р е д л о ж е н и е 3.3 *Для метода (2.4) имеет место неравенство*

$$-2(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)) \ge \|\mathbf{x}'(t)\|^2 - \frac{5}{3}\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)\|^2.$$

Доказательство следует из (3.8) при $\varepsilon = 3$, $\mathbf{u} = \mathbf{x}'$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$. Легко проверить выполнение условий (3.7) (при $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ в них), записываемых здесь в виде

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)\| \le \|\mathbf{x}'(t)\| \le \|\mathbf{x}' - (\mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t))\|, \tag{3.13}$$

с помощью неравенств (3.11), аналогично сделанному в доказательстве предложения 3.1.

П р е д л о ж е н и е 3.4 *Для метода (2.4)–(2.6) имеет место оценка*

$$-2m\alpha(\mathbf{x}''(t), \mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)) \ge m\alpha(\|\mathbf{x}''(t)\|^2 - \frac{5}{3}\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\|^2).$$

Доказательство. В неравенстве (3.8) положим $\mathbf{u} = \mathbf{x}''$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$, $\varepsilon = 3$. Выполнение неравенства (3.7), записываемого здесь в виде

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}''(t)\| \leq \|\mathbf{x}'' - (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t))\|, \tag{3.1}$$

при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ в (3.7), доказывается выкладками, аналогичными используемым при обосновании неравенства (3.13) в предложении 3.3, с заменой $\mathbf{x}'$ на $\mathbf{x}''$.
Доказательство закончено.

Предложение 3.5 *Для метода (2.4)–(2.6) справедлива оценка*

$$-2m\beta(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \geq -m\beta(\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^2).$$

Для доказательства необходимо воспользоваться неравенством (3.5) при $\varepsilon = 1$, $\mathbf{u} = \mathbf{x}'$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$.

4. Исследование сходимости НПММПМ

Теорема 4.1 *Пусть выполнены условия:* 1) *множество* $Q \subset H_1$ *выпукло и замкнуто, функция* $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ *– выпукла;* 2) *оператор* $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ *переменной метрики таков, что выполнены* (2.5) *и* (2.6)*;* 3) *выполнены неравенства* (3.7)*;* 4) *параметры НПММПМ (2.4), функции* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ *таковы, что*

$$\begin{gathered}
\alpha(t) \in C^2[0,\infty),\ \beta(t), \gamma(t) \in C^1[0,\infty), \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0, \\
\beta(t) \geq \beta_0 > 0,\ 1 > \beta(t) > \sigma(t) > 0,\ \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha_0, \\
\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \beta_0,\ \gamma(0) \geq \gamma(t) \geq \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0; \\
\alpha^{'}(t) \leq 0,\ \gamma'(t) \leq 0,\ \sigma'(t) < \beta^{'}(t) \leq 0\ \alpha^{''}(t) \geq 0; \\
(m-b)(\alpha\beta)' + (\alpha b\sigma)' < \frac{L}{4}\gamma'(t)\alpha\beta,\ 0 < \alpha(t) < \frac{3}{5}, \\
0 < \gamma < \frac{m-a}{0.25L},\ m^2 \geq \frac{1}{6},\ a = \frac{1+3m^2}{5+16m^2},\ a < m,\ t \geq 0.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H_1$ *для траектории метода* (2.4), (3.7) *существует такая точка* $\mathbf{x}^* \in Q_*$, *что*

$$\begin{gathered}
\int_0^{+\infty} (\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}(s)\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2)\, ds < +\infty, \\
\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}^{'}(t)\| + \|\mathbf{x}^{''}(t)\| \ \longrightarrow\ 0, \quad t \to \infty.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Доказательство. Пользуясь (2.4) и свойством (2.1) оператора $\mathbf{G}$-проекции, получим вариационное неравенство

$$(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)) + \gamma(t)\nabla f(\mathbf{y}(t)), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{w}(t) = \alpha\mathbf{x}^{''} + \beta\mathbf{x}^{'} + \mathbf{x} \in Q$, $\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + (\beta(t) - \sigma(t))\mathbf{x}'(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)$.

В новой метрике пространства H_1 для $\mathbf{x}^* \in Q_*$ с учётом леммы 3.1 имеем $\gamma(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q,\ \gamma > 0$. Положим здесь $\mathbf{u} = \mathbf{w} \in Q$, а в (4.3) примем $\mathbf{u} = \mathbf{x}^*$, полученные неравенства сложим:

$$(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{y}), \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) \leq \gamma(\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{w}),\ \mathbf{x}^* \in Q_*,\ t \geq 0. \tag{4.4}$$

Скалярное произведение в правой части (4.4) оценим с помощью неравенства для выпуклых функций $(\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{w}) \leq \dfrac{L}{4}\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{w} \in Q$ ([11], гл. 1, с. 25) и, учитывая, что $(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{x}^* - \mathbf{y}), \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) = (\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y})$, из (4.4) получим:

$$\begin{gathered}(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}) \leq \\ \leq L\gamma\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2/4.\end{gathered} \tag{4.5}$$

В (4.5) для оценки второго слагаемого, воспользовавшись неравенством (3.8) из леммы 3.4 при $\dfrac{4}{5} \leq \varepsilon = \dfrac{(1 + 4m^2)}{(2m^2)} \leq 5,\ m^2 \geq \dfrac{1}{6}$ (такое $\varepsilon \in [0.8; 5.0]$ допустимо при условии (3.7)), $\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*)$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^*$, где $m \leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})\| \leq M$ в силу (2.5), получим:

$$-(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}) \geq \frac{1}{4}\|\mathbf{w} - \mathbf{x}^*\|^2 - \frac{1 + 3m^2}{1 + 4m^2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Здесь первый квадрат нормы справа оценим с помощью (3.6) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^* - \mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{w}$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $m > 0$, $\dfrac{4}{5} \leq \varepsilon = \dfrac{(5 + 16m^2)}{(1 + 5m^2)} \leq 5$:

$$\frac{1}{4}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{w}\|^2 \geq \frac{1 + 3m^2}{1 + 5m^2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|^2 - a\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2,$$

где $a = \dfrac{1 + 3m^2}{5 + 16m^2}$ при $\{1 - 5m < 0,\ 3m^2\left(1 - \dfrac{16m}{3}\right) < 0\}$, то есть $m > \dfrac{1}{\sqrt{6}} > \dfrac{1}{5} > \dfrac{3}{16}$. Неравенства вида (3.7) для (3.8) и (3.6) выполнены в силу предложений 3.1 и 3.2. Тогда $(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}) \geq -a\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2$, и, обозначив $b(t) = a + \dfrac{L\gamma(t)}{4}$, из (4.5) имеем:

$$m\|\mathbf{w} - \mathbf{x}^*\|^2 - b\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t)\|^2 \leq 0, \quad t \geq 0. \tag{4.6}$$

В (4.6) учтем разложения, следующие из (2.4) и свойств пространства H_1:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{w} - \mathbf{x}^*\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + 2\alpha\beta(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \beta^2\|\mathbf{x}'\|^2 + \\ + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + 2(\alpha\mathbf{x}'' + \beta\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*),\end{gathered}$$

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + 2\alpha(\beta - \sigma)(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + (\beta - \sigma)^2\|\mathbf{x}'\|^2. \tag{4.7}$$

С учетом тождеств (4.7) основное неравенство (4.6) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}a^0_{11}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + a^0_{12}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + 2a_{13}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + 2m\alpha(t)(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \\ + 2m\beta(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 0, \quad t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*,\end{gathered} \tag{4.8}$$

где $a^0_{11}(t) = \alpha^2(m - b(t)) > 0$, $a^0_{12}(t) = m\beta^2 - b(\beta - \sigma)^2 > 0$; по условию $a < m$, $m^2 \geq 1/6$, $m > b(t)$; $a_{13} = \alpha[m\beta - b(\beta - \sigma)] > 0$, $\beta > \sigma > 0$, $0 < \gamma(t) < \dfrac{4(m - a)}{L} = \gamma^{11}$.

Пользуясь тождествами

$$2(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') = \frac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2,\ 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}') = \frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \tag{4.9}$$

и предложением 3.4 для четвертого слагаемого, преобразуем (4.8) к виду

$$\begin{aligned} a_{11}^1(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + a_{12}^0(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{13}(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2 + \\ + a_{14}^0(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + m\beta(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \le 0,\ t \ge 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $a_{11}^1(t) = a_{11}^0(t) + m\alpha(t) = m\beta^2 - b(t)(\beta - \sigma)^2 + m\alpha > 0$, $a_{14}^0(t) = m - \frac{5}{3}m\alpha(t) > 0$, $0 < \alpha(t) < \frac{3}{5}$, $0 < \gamma < \gamma^{11}$.

Проинтегрировав (4.10) на отрезке $[\xi, t]$, $t > \xi \ge 0$, получим:

$$\begin{gathered} \int_\xi^t \left[a_{11}^1(s)\|\mathbf{x}''\|^2 + a_{12}^1(s)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{14}^1(s)\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\right] ds + \\ + a_{13}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + m\beta(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \le C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \ge 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \end{gathered} \tag{4.11}$$

где $a_{12}^1(s) = a_{12}^0 - a_{13}'(s) > 0$ при $-a_{13}' = \frac{L}{4}\alpha\beta\gamma' - (m - b)(\alpha\beta)' - (\alpha b\sigma)' > 0$,

$$C_1(\xi, \mathbf{x}^*) = a_{13}(\xi)\|\mathbf{x}'(\xi)\|^2 + m\beta(\xi)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2. \tag{4.12}$$

С учетом этих условий и (4.1) подынтегральное выражение и интеграл в (4.11) положительны. Опуская положительные слагаемые из левой части (4.11), получим:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \le \frac{C_1(\xi, \mathbf{x}^*)}{m\beta(t)},\ t > \xi \ge 0. \tag{4.13}$$

Из (4.13) следует предельное соотношение

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \le C_1(\xi, \mathbf{x}^*)(m\beta_0)^{-1},\ t > \xi \ge 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.14}$$

Исследуем поведение второго слагаемого из (4.2). Заметим, что существуют числа $r > 0$ и $\eta \ge 0$ такие, что для $s \ge \eta \ge \xi \ge 0$ в (4.11) в подынтегральных слагаемых для коэффициентов имеем: $a_{11}^1 \ge r > 0$, $a_{12}^1 \ge r > 0$; $a_{14}^1 \ge r > 0$. Тогда из (4.11) следует,

$$\begin{aligned} r\int_\xi^t \{\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}''\|^2\}\, ds + a_{13}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + \\ + m\beta(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \le C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \ge \eta \ge 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Из (4.15) следуют неравенства

$$r\int_\xi^t (\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}''\|^2)\, ds \le \frac{C_1(\xi, \mathbf{x}^*)}{r} \tag{4.16}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \le a_{13}^{-1}(t)C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \ge \eta \ge 0. \tag{4.17}$$

Отсюда при $t \to \infty$ и с учетом условий (4.1) и $a_{13}^{\infty} = \overline{\lim}_{t\to\infty} a_{13}(t)$ следует:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2 \leq (a_{13}^{\infty})^{-1} C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \geq 0. \tag{4.18}$$

Для оценки $\|\mathbf{x}^{''}(t)\|$ преобразуем третье слагаемое (4.10) с помощью (3.5),

$$a_{13}(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}'(t)\|^2 = 2a_{13}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') \geq -a_{13}(\|\mathbf{x}''\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2);$$

четвертое слагаемое — оценкой из предложения 3.5,

$$m\beta \frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 = -2m\beta(\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq -m\beta(\|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2).$$

После подстановки этих оценок слагаемых из (4.10) следует:

$$a_{11}(t)\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 - a_{12}(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2 - a_{14}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{4.19}$$

где $a_{11}(t) = a_{11}^0 + m\alpha - a_{13} = \alpha^2(m - b(t)) + m\alpha(1-\beta) + b\alpha(\beta - \sigma) > 0$ при $b(t) < m$; $a_{12}^0 - a_{13} - m\beta = -m\beta(1+\alpha-\beta) - b(t)(\beta-\sigma)(\alpha-\beta+\sigma) = -a_{12} < 0$; $\dfrac{5}{3}\alpha(t) < 1$ по условиям (4.1), $a_{14}^0 - m\beta = m - \dfrac{5}{3}m\alpha - m\beta > m - m - m\beta = -a_{14}(t)$.

Запишем (4.19) в виде

$$a_{11}(t)\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 \leq a_{12}(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2 + a_{14}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2,\ t \geq 0. \tag{4.20}$$

С учетом (4.1), (4.14), (4.18) $a_{11}^{\infty} = \overline{\lim_{t\to\infty}} a_{11}(t)$, $a_{12}^{\infty} = \overline{\lim_{t\to\infty}} a_{12}(t)$, $a_{14}^{\infty} = \overline{\lim_{t\to\infty}} a_{14}(t)$, из (4.20) следует:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 \leq C_2(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \geq 0, \tag{4.21}$$

где $C_2(\xi, \mathbf{x}^*) = (a_{11}^{\infty})^{-1}[(a_{12}^{\infty})(a_{13}^{\infty})^{-1} + a_{14}^{\infty} m^{-1}(\beta_0)^{-1}]C_1(\xi, \mathbf{x}^*)$.

Тогда при $\xi = 0$, $t \to \infty$ из неравенства (4.16) запишем

$$\int_0^{+\infty} \Big(\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}(s)\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2\Big)\, ds < +\infty. \tag{4.22}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} [\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2] = 0\ \forall\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.23}$$

Асимптотическую устойчивость траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (2.4) и единственность предельной точки траектории можно показать так же, как в работе [2].

В силу (4.22)–(4.23) существует такая подпоследовательность $\{t_i\}$, что

$$\|\mathbf{x}^{''}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}^{'}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\| \to 0,\ i \to \infty. \tag{4.24}$$

Для $t = t_i$ из (4.10) с учетом (4.9), обозначив

$$C_3(t_i, \mathbf{x}^*) = a_{12}(t_i)\|\mathbf{x}^{'}(t_i)\|^2 + 2a_{13}(t_i)(\mathbf{x}^{'}(t_i), \mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*) + a_{14}(t_i)\|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\|^2$$

и учитывая (4.14), (4.18), (4.21)–(4.24), при $t_i \to \infty$ имеем

$$C_1(t_i, \mathbf{x}^*) \to 0,\ C_2(t_i, \mathbf{x}^*) \to 0,\ C_3(t_i, \mathbf{x}^*) \to 0,\ i \to \infty. \tag{4.25}$$

Тогда из (4.22) следует первое соотношение из (4.2), а из (4.14), (4.18), (4.21)–(4.25) – второе соотношение из (4.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Скорость сходимости НПММПМ для выпуклых функций

Теорема 5.1 *Пусть выполнены все условия теоремы 4.1.*

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in H_1$ *траектория метода* (2.4), (3.7), (4.1) *сходится к точке* $\mathbf{x}^* \in Q_*$ *и имеют место оценки* $\forall\, t \geq 0$:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq [C_{31}(\mathbf{x}^*)m^{-1}\beta^{-1}(t)]^{1/2}, \tag{5.1}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\| \leq [C_{31}(\mathbf{x}^*)a_{13}^{-1}(t)]^{1/2}, \tag{5.2}$$

$$\|\mathbf{x}''(t)\| \leq \{a_{11}^{-1}(t)C_{31}(\mathbf{x}^*)[a_{12}(t)a_{13}^{-1}(t) + a_{14}(t)m^{-1}\beta^{-1}(t)]\}^{1/2}, \tag{5.3}$$

где $C_{31}(\mathbf{x}^*) = a_{13}(0)\|\mathbf{x}^1\|^2 + m\beta(0)\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2$; $a(t)$, $b(t)$, $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, $a_{13}(t)$, $a_{14}(t)$ *из теоремы 4.1.*

Доказательство. . В условиях данной теоремы все выкладки теоремы 4.1 справедливы. Воспользуемся неравенством (4.10) из теоремы 4.1. Проинтегрировав его на отрезке $[0;t]$, получим:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \left(a_{11}^1(s)\|\mathbf{x}''(s)\|^2 + a_{12}^1(s)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{14}^1(s)\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\right) ds + \\ + a_{13}(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + m\beta(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \leq C_{31}(\mathbf{x}^*),\ t \geq 0,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где коэффициенты из (4.11), а $C_{31}(\mathbf{x}^*)$ приведен в формулировке теоремы 5.1 и следует из (4.12) при $\xi = 0$. Из (5.4) выкладками, аналогичными проведенным в теореме 4.1 при преобразовании выражения (4.11), получим аналог неравенства (4.13):

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq C_{31}(\mathbf{x}^*)m^{-1}\beta^{-1}(t),\ t \geq 0. \tag{5.5}$$

Из (5.5) следует оценка (5.1).

Оценку (5.2) получим выкладками, аналогичными проведенным с (4.11) при выводе (4.17), но с учетом $\xi = 0$. Сначала из (5.4) получим аналог (4.16)

$$\int\limits_0^t [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}''(s)\|^2]\, ds \leq \frac{C_{31}(\mathbf{x}^*)}{r},$$

и неравенство

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq C_{31}(\mathbf{x}^*)a_{13}^{-1}(t),\ t \geq 0.$$

Из этого неравенства следует оценка (5.2).

Исходя из (4.10), для получения оценки (5.3) сначала проведем такие же выкладки, как и при получении (4.20). Затем воспользуемся (5.5) и предыдущей оценкой, тогда получим:

$$\|\mathbf{x}''\|^2 \leq a_{11}^{-1}(t)[a_{12}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{14}(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2] \leq$$

$$\leq a_{11}^{-1}(t)C_{31}(\mathbf{x}^*)[a_{12}(t)a_{13}^{-1}(t) + a_{14}(t)m^{-1}\beta^{-1}(t)],\ t \geq 0.$$

Отсюда следует оценка (5.3).

Доказательство закончено.

НПММПМ (2.4) для решения прикладных задач реализуются с помощью численных методов решения задач Коши для ОДУ (в частности, для жестких систем дифференциальных уравнений) с параметрами метода, выбранными в соответствии с условиями доказанных теорем.

Список литературы

1. А. С. Антипин, “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем*, АН СССР, М., 1989, 5–43.

2. А. С. Антипин, “Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:9 (1994), 1475–1486.

3. А. С. Антипин, Ф. П. Васильев, “О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой”, *Изв. вузов. Математика*, 1995, № 12(403), 3–9.

4. Т. В. Амочкина, “Непрерывный метод проекции градиента второго порядка с переменной метрикой”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, **37**:10 (1997), 1174–1182.

5. В. Г. Малинов, “Непрерывный проекционный метод минимизации второго порядка с переменной метрикой”, *Функциональный анализ*, **39** (2006), 53–64.

6. В. Г. Малинов, “Версия непрерывного проекционного метода минимизации второго порядка с переменной метрикой”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 121–134.

7. В. Г. Малинов, “Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике”, *Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике*, VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Москва. 17–22 октября 2016 г.: Труды. Том II. (Москва. 17–22 октября 2016 г.), ФИЦ ИУ РАН, М., 2016, 48–50.

8. В. Г. Малинов, “ПОДМ с проектированием в переменной метрике”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:4 (2012), 44–56.

9. Ф. П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988, 552 с.

10. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976, 544 с.

11. А. С. Антипин, *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа*, М., 1979, 73 с.

Поступила 2.11.2018

MSC2010 90C30

Continuous second order minimization method with variable metric projection operator

© **V. G. Malinov**[1]

Abstract. The paper examines a new continuous projection second order method of minimization of continuously Frechet differentiable convex functions on the convex closed simple set in separable, normed Hilbert space with variable metric. This method accelerates common continuous projection minimization method by means of quasi-Newton matrices. In the method, apart from variable metric operator, vector of search direction for motion to minimum, constructed in auxiliary extrapolated point, is used. By other word, complex continuous extragradient variable metric method is investigated. Short review of allied methods is presented and their connections with given method are indicated. Also some auxiliary inequalities are presented which are used for theoretical reasoning of the method. With their help, under given supplemental conditions, including requirements on operator of metric and on method parameters, convergence of the method for convex smooth functions is proved. Under conditions completely identical to those in convergence theorem, without additional requirements to the function, estimates of the method's convergence rate are obtained for convex smooth functions. It is pointed out, that one must execute computational implementation of the method by means of numerical methods for ODEs solution and by taking into account the conditions of proved theorems.

Key Words: convex function, continuous minimization method, projection in variable metric, convergence, rate of convergence.

References

1. A. S. Antipin, "[Continuous and iterative processes with projection ana projection-type operators]", *Voprosy kibernetiki. Vychislitelnie voprosy analiza bolshih sistem*, AN SSSR Publ., Moscow, 1989, 5–43 (In Russ.).

2. A. S. Antipin, "[Minimization of convex functions on convex sets by differential equations]", *Differential equations*, **30**:9 (1994), 1365–1375 (In Russ.).

3. A. S. Antipin, F. P. Vasil'ev, "[On continuous method of minimization in variable metric spaces]", *Russian Mathematics*, **39**:12 (1995), 1–6 (In Russ.).

4. T. V. Amochkina, "[Continuous second order variable metric gradient projection method]", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **37**:10 (1997), 1134–1142 (In Russ.).

5. V. G. Malinov, "[Continuous projection variable metric second order minimization method]", *Functionalniy analiz*, **39** (2006), 53–64 (In Russ.).

6. V. G. Malinov, "[On the version of continuous projection second order variable metric method]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **16**:1 (2014), 121–134 (In Russ.).

[1]**Valerian G. Malinov**, Associate Professor, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432000, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, vgmalinov@mail.ru

7. V. G. Malinov, *[Continuous second order minimization method with variable metric projection operator]*, VIII Moskovskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po issledovanijy operaciy. (ORM2016). Moskva, 17–22 okt., 2016. Trudy. Tom II. [VIII Moscow International Conference on Operations Research(ORM2016): Moscow, October 17–22, 2016: Proceedings: Vol II.] (Moscow, October 17-22, 2016), FRC CSC RAS Publ., Moscow, 48–50 (In Russ).

8. V. G. Malinov, "[PGTM with variable metric projection operator]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **14**:4 (2012), 44–56 (In Russ.).

9. F. P. Vasil'ev, *[Numerical methods solution of Extremal problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 552 p.

10. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *[Elements of function theory and functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 544 p.

11. A. S. Antipin, *[Methods of nonlinear programming, based on direct and dual modifications Lagrange function]*, VNII systems research Publ., Moscow, 1979 (In Russ.), 73 p.

Submitted 2.11.2018