УДК 517.9

Некоторые аспекты оптимизации самовоспроизводящихся систем

© О. А. Кузенков[1], Е. А. Рябова[2]

Аннотация. Рассматривается модель самовоспроизводящейся системы, исследуется ее предельное поведение, на основании этого решаются задачи оптимизации данной системы при неограниченном времени управления. Критерии качества в рассматриваемых задачах отражают увеличение в системе самовоспроизводящихся объектов с определенной поведенческой стратегией. Доказано, что максимизация некоторых критериев приводит к вырождению всей системы.

Ключевые слова: самовоспроизводящиеся системы, оптимальное управление, неограниченное время управления.

Введение

Самовоспроизводящейся системой (или системой авторепродукции) называется система, объекты которой обладают свойством генерировать свои копии в процессе существования – передавать другим объектам свои качественные признаки, определяющие условия их существования в системе, в частности, это может быть тот или иной способ поведения [1, 2].

Актуальной является задача оптимального управления системами авторепродукции, в том числе и в биоэкономических моделях [3-8]. В задачах управления важнейшую роль имеет определение целей, которые достигаются посредством управления. Одной из основных целей является сохранение самой управляемой системы. В классических задачах теории управления от проблемы сохранения управляющей системы обычно отвлекаются [9]. Но если перейти к более общим моделям, то эта проблема приобретает решающее значение. Особенно актуальна она для современной экологии, при управлении экономическими, демографическими, социальными процессами и т. п.

Для того чтобы принимаемое в соответствии с избранным критерием оптимальное решение имело практический смысл, нужно, чтобы критерий содержал информацию о реальной эффективности каждой возможной альтернативы поведения. Интересующая систему информация о варианте поведения состоит лишь в следующем: возможно ли бесконечное существование системы при осуществлении этого варианта поведения или нет. Получить эту информацию система может, только реализуя его. Но если, проверяя данный вариант, система разрушается за конечное время, то принимать решение уже будет некому. Такое, казалось бы, неразрешимое противоречие исчезает в системе самовоспроизводящихся объектов. Здесь каждый вариант поведения осуществляется отдельным объектом; те объекты, поведение которых наиболее быстро приводит к собственному разрушению, исчезают из общей системы в первую очередь, и постепенно в системе остаются только те объекты, чье поведение может бесконечно долго поддерживать существование системы. Таким образом, система в целом находит для этого оптимальный вариант поведения.

[1] Доцент кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; kuzenkov_o@mail.ru

[2] Старший преподаватель кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; riabova-ea@rambler.ru

В то же время такой подход к заданию порядка предпочтительности и соответствующего ему критерия качества вариантов поведения системы авторепродукции таит в себе определенные опасности. Действительно, если общая численность самовоспроизводящихся объектов в системе при любом способе поведения не может стать меньше некоторого минимального положительного порога, то это означает, что система в целом всегда существует, независимо от качественных характеристик объектов или вариантов их поведения. Тогда задача оптимизации стратегии поведения не имеет решения, так как варианты поведения несравнимы. Система существует неограниченно долго при любом из них. Чтобы задача оптимизации имела смысл, необходимо, чтобы при реализации некоторых стратегий поведения система разрушалась. Значит, нужно допустить возможность приближения численности системы к нулю.

Из этого допущения следует возможность для вида с определенной поведенческой стратегией вытеснять другие виды, но при этом уничтожать всю систему, подобно тому, как неограниченный рост раковых клеток приводит к уничтожению всего организма. Такое поведение Чернавский назвал «популизмом» [10]. В интересах самосохранения система должна иметь механизмы противодействия «популизму».

Цель настоящей работы состоит в исследовании модели авторепродукции, изучения ее предельного поведения, и на основании этого решения задач управления для обеспечения неограниченно долгого существования этой системы.

Моделью авторепродукции является распределенная система, поведение которой описывается нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями. Функционалы качества в рассматриваемых задачах оптимизации, задаваемые в виде предела некоторой величины при стремлении времени к бесконечности, отражают увеличение в системе объектов с определенной поведенческой стратегией. В отличие от классической теории [**??**] здесь приходится рассматривать случай неограниченного времени управления.

1. Описание модели авторепродукции

Пусть W – область обитания некоторой популяции. Математически можно решать задачу для любой размерности, поэтому будем рассматривать n-мерную область W с кусочно-гладкой границей G; $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точки области W. Через границу G проникновение особей отсутствует.

Предположим, что особи рассматриваемой популяции могут реализовывать одну из двух стратегий поведения – v_1 или v_2. Стратегия v_1 является нормальным поведением, стратегия v_2 является патологическим (асоциальным) поведением (из-за болезни или наркологической зависимости и т.п.). Следствием патологической стратегии поведения является утрата способности к воспроизводству. Стратегия v_2 не является врожденной и может быть переданы нормальным особям (в результате инфекции, копирования поведения и т.п.).

Предполагается, что особи, со стратегией поведения v_1, могут перемещаться равновероятно с равной скоростью s в любом направлении из любой внутренней точки области; скорость перемещения особей, осуществляющих стратегию v_2, существенно выше скорости s; особи с асоциальным поведением могут воздействовать на нормальных особей, в результате чего нормальные особи меняют стратегию своего поведения на паталогическую, результативность этого воздействия пропорциональна распространенности последней стратегии в популяции («популярности» асоциального способа поведения).

Пусть $z_1(x,t)$ – плотность популяции особей, реализующих стратегию v_1 в точке $x \in W$ в момент времени t, $z_2(t)$ – общее количество особей, осуществляющих стратегию v_2 в момент времени t, $a(x)$ – коэффициент размножения особей первого вида в точке x (коэффициент размножения является разностью между коэффициентом рождаемости и коэффициентом смертности), b – постоянный коэффициент смертности особей второго вида, $r(t)$ – коэффициент результативности воздействия особей второго вида.

Похожие гипотезы были использованы при построении модели динамики популяции с учетом явления паразитизм [12]. При сделанных предположениях модель описывается системой уравнений

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = s\Delta z_1 + az_1 - \frac{rz_1z_2}{\displaystyle\int_W z_1dx + z_2}, \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{rz_2\displaystyle\int_W z_1dx}{\displaystyle\int_W z_1dx + z_2} - bz_2 \tag{1.1}$$

с краевыми и начальными условиями

$$\partial z_1/\partial n|_G = 0, \quad z_1(x,0) = f(x), \quad z_2(0) = z_2^0. \tag{1.2}$$

Здесь символ Δ означает оператор Лапласа, $\partial/\partial n|_G$ – производную по нормали к границе G. Предполагаем, что функции $a(x)$, $f(x)$, $r(t)$ – непрерывные, положительные, $r(t)$ – ограниченная; параметры b, s и z_2^0 – постоянные, положительные; оператор $s\Delta v + av$ определен на множестве функций $v(x)$, заданных в области W, удовлетворяющих краевому условию $\partial v/\partial n|_G = 0$; $\nu_i(x)$, $i = \overline{1,\infty}$, – полная система ортонормированных собственных функций оператора $s\Delta v + av$, занумерованных в порядке убывания соответствующих им собственных чисел λ_i, $i = \overline{1,\infty}$, и кратность первого собственного числа равна единице: $\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_i \geqslant \ldots$.

Заметим, что система (1.1) при поставленных начальных условиях имеет лишь неотрицательное решение [13, 14], что соответствует количественной интерпретации функций $z_1(x,t)$ и $z_2(t)$. Введем переменную

$$z = \int\limits_W z_1dx + z_2, \tag{1.3}$$

характеризующую общую численность популяции в момент времени t; средневременное значение функции $r(t)$ обозначим

$$\langle r\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_o^t r(\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

2. Формулировка результатов

2.1. Предельное поведение системы авторепродукции

Теорема 2.1. *В системе* (1.1) *с начальными и краевыми условиями* (1.2) *предельные значения функций* $z_2(t)$, $z(t)$ *и их частного определяются в зависимости от параметров системы следующим образом:*
при $\lambda_1 > 0$

$$\begin{array}{llll}
\lim\limits_{t\to\infty} z_2 = 0, & \lim\limits_{t\to\infty} z = 0, & \lim\limits_{t\to\infty}(z_2/z) = 1, & \text{если } \langle r\rangle > \lambda_1 + b; \\
\lim\limits_{t\to\infty} z_2 = +\infty, & \lim\limits_{t\to\infty} z = +\infty, & \lim\limits_{t\to\infty}(z_2/z) = 0, & \text{если } b < \langle r\rangle < \lambda_1 + b; \\
\lim\limits_{t\to\infty} z_2 = 0, & \lim\limits_{t\to\infty} z = +\infty, & \lim\limits_{t\to\infty}(z_2/z) = 0, & \text{если } \langle r\rangle < b;
\end{array}$$

при $\lambda_1 < 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t\to\infty} z = 0, \quad \lim_{t\to\infty}(z_2/z) = 0, \quad \textit{если}\ 0 < \langle r\rangle < \lambda_1 + b;\\
&\lim_{t\to\infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t\to\infty} z = 0, \quad \lim_{t\to\infty}(z_2/z) = 1, \quad \textit{если}\ \langle r\rangle > \lambda_1 + b;
\end{aligned}$$

при $\lambda_1 = 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t\to\infty}(z_2/z) = 0, \quad \textit{если}\ 0 < \langle r\rangle < b;\\
&\lim_{t\to\infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t\to\infty}(z_2/z) = 1, \quad \textit{если}\ \langle r\rangle > b.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda_1 > 0$, $\langle r\rangle > \lambda_1 + b$ удельный вес особей второго (асоциального) типа поведения стремится к максимальному значению, при этом численность всей популяции стремится к нулю. Если $b < \langle r\rangle < \lambda_1 + b$, то удельная численность особей асоциального вида стремится к минимальнму значению, тем не менее происходит неограниченное увеличение их численности и всей популяции в целом. При $\langle r\rangle < b$ происходит неограниченное увеличение общей численности популяции, численность особей второго типа поведения стремится к нулю.

При любом соотношении параметров r, λ_1 и b, если $\lambda_1 < 0$, наблюдается вырождение особей второго типа поведения и всей популяции в целом; если $\lambda_1 = 0$, особи второго типа поведения вырождаются.

2.2. Оптимальное управление системой авторепродукции при неограниченном времени управления

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для системы (1.1) при неограниченном времени управления. Допустим, что в рассматриваемой модели (1.1) возможно влияние на коэффициент воздействия $r(t)$, которое оказывают особи с паталогической стратегией поведения v_2 на особей с нормальным поведением v_1. При этом функция $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = r_0 + u(t), \tag{2.5}$$

где r_0 — постоянная положительная величина, $u(t)$ — результат управляющего воздействия, оказываемого особями со стратегией v_2 на особей с поведением v_1. Пусть $u(t)$ — непрерывная функция времени, удовлетворяющая ограничению

$$|u(t)| \leqslant c, \tag{2.6}$$

где c — постоянная, $0 < c < r_0$.

Цель управления с точки зрения особей второго вида состоит в неограниченно долгом сохранении своей популяции. Кроме того, если рассматривать данную систему, как систему взаимного существования двух различных вариантов поведения, то можно сравнивать варианты поведения друг с другом. В этом случае лучшим будет тот вариант, который используется большим количеством особей и, соответственно, удельный вес которого в популяции будет выше. Целью управления с точки зрения повышения ценности второго варианта поведения будет увеличение численности особей, осуществляющих стратегию v_2, или увеличение удельного веса этих особей в популяции. Исходя из этих целей, оптимальным будет управление, которое обеспечит максимум пределов[3]

$$J_1 = \lim_{t\to\infty} z_2, \quad J_2 = \lim_{t\to\infty}(z_2/z)$$

[3] Заметим, что величина z_2 не ограничена сверху, и при соотношении параметров $b < \langle r\rangle < b + \lambda$ она стремится к бесконечности. В этом случае $J_1 = +\infty$, и управление, при котором это выполняется будет оптимальным.

или двух других критериев, связанных с предыдущими:

$$J_3 = \langle z_2'/z_2 \rangle\,, \quad J_4 = \langle \eta'/\eta \rangle\,.$$

Здесь для сокращения записи введена новая переменная $\eta = z_2/z$. Смысл максимизации функционалов второй группы — увеличение средневременных значений скорости воспроизводства особей второго вида и скорости изменения удельного веса второго варианта поведения в популяции соответственно.

Будем говорить, что критерий качества адекватно выражает возможность неограниченно долгого существования некоторого вида в системе, если его выполнение (максимизация) не противоречит неограниченно долгому существованию всей системы. Поскольку при $\lambda_1 \le 0$ особи второго вида вырождаются, то будем рассматривать только случай, когда $\lambda_1 > 0$.

Теорема 2.2. *В задаче* (1.1) *с краевыми и начальными условиями* (1.2), *в которой функция* $r(t)$, *имеющая вид* (2.5), *содержит управление, удовлетворяющее ограничению* (2.6), *функционалы* J_2 *и* J_4 *достигают своего максимума при* $\langle r \rangle > \lambda_1 + b$, *функционал* J_3 — *при* $\langle r \rangle < \lambda_1 + b$, $J_1 = +\infty$ *при* $b < \langle r \rangle < \lambda_1 + b$.

Приведенные результаты показывают, что решения задач оптимизации с разными критериями — различны. Более того, рекомендации противоположны: для максимизации функционалов J_2 и J_4 величину $\langle r \rangle$ нужно выбирать больше $\lambda_1 + b$, выбор $\langle r \rangle < \lambda_1 + b$ дает худший результат, для максимизации функционалов J_1 и J_3 величину $\langle r \rangle$ нужно выбирать меньше $\lambda_1 + b$ (но больше b для максимизации J_1).

Сравнив эти результаты с данными теоремы 2.1, нетрудно заметить, что при максимизации функционалов J_2 и J_4 количество объектов с поведением v_2, также как и совокупная численность системы, стремится к нулю, т.е. система вырождается. Таким образом, функционалы J_2 и J_4 неадекватно выражают цель сохранения системы.

3. Доказательство результатов

Лемма 3.1. *Если* $\nu_i(x)$, $i = \overline{1,\infty}$, — *система собственных функций оператора* $s\Delta v + a(x)v$, *определенного на множестве функций* $v(x)$, *заданных в* n-*мерной области* W *с кусочно-гладкой границей* G, *удовлетворяющих краевому условию* $\partial v/\partial n|_G = 0$; λ_i, $i = \overline{1,\infty}$, — *соответствующая им система собственных чисел; постоянные* $a_i = \int\limits_W a(x)\nu_i(x)dx$ — *коэффициенты Фурье для положительной функции* $a(x)$ *и* $w_i = \int\limits_W \nu_i(x)dx$ — *коэффициенты Фурье для единицы по системе* $\nu_i(x)$, $i = \overline{1,\infty}$, *то справедливо равенство*

$$a_i = \lambda_i w_i, \quad i = \overline{1,\infty}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Поскольку $\nu_i(x)$, $i = \overline{1,\infty}$, — система собственных функций оператора $s\Delta v + av$, λ_i, $i = \overline{1,\infty}$, — соответствующая им система собственных чисел, то для всех индексов $i = \overline{1,\infty}$ выполняются равенства $s\Delta\nu_i(x) + a(x)\nu_i(x) = \lambda_i\nu_i(x)$. Проинтегрируем обе части этого равенства по области W с границей G. Учитывая выражение коэффициентов Фурье a_i и w_i через функции $\nu_i(x)$, получим: $s\int_W \Delta\nu_i(x)\,dx + a_i = \lambda_i w_i$. Найдем значение интеграла для функции $v(x)$ из рассматриваемой области W, удовлетворяющей краевому условию $dv/dn|_G = 0$. Воспользовавшись формулой интегрирования

по частям, получим $\int_W \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,dx = \oint_G 1\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\cos(\widehat{x_i, n})\,ds - \int_W \frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot 0\,dx$, где $(\widehat{x_i, n})$ – угол между осью x_i и внешней нормалью к поверхности G. Тогда по свойству аддитивности интегралов $\int_W \Delta v(x)\,dx = \int_W \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,dx = \oint_G \frac{dv}{dn}\Big|_G ds$. Так как $dv/dn|_G = 0$, то $\int_W \Delta v(x)\,dx = 0$, также как и $\int_W \Delta\nu_i(x)\,dx = 0$, следовательно, справедливо (3.7).
Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.1. Предполагается, что в системе(1.1) с начальными и краевыми условиями (1.2) функции $a(x)$, $f(x)$, $r(t)$ – непрерывные, положительные, кроме этого $r(t)$ – ограниченная; параметры b, s и z_2^0 – постоянные, положительные; оператор $s\Delta v + av$ определен на множестве функций $v(x)$, заданных в области W, удовлетворяющих краевому условию $\partial v/\partial n|_G = 0$; $\nu_i(x)$, $i = \overline{1,\infty}$, – полная система ортонормированных собственных функций оператора $s\Delta v + av$, занумерованных в порядке убывания соответствующих им собственных чисел λ_i, $i = \overline{1,\infty}$, и кратность первого собственного числа равна единице: $\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_i \geqslant \ldots$.

Пусть $\zeta_i(t)$ – коэффициенты Фурье функции $z_1(x,t)$ по системе собственных функций $\nu_i(x)$, $i = \overline{1,\infty}$; $\varphi_i = \zeta_i(0)$ – постоянные коэффициенты Фурье функции $f(x)$; $w_i = \int\limits_W \nu_i(x)dx$ – коэффициенты Фурье для единицы; $a_i = \int\limits_W a(x)\nu_i(x)dx$ – коэффициенты Фурье функции $a(x)$.

Тогда функции $\zeta_i(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\zeta_i' = \lambda_i\zeta_i - \frac{rz_2\zeta_i}{(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\zeta_j w_j + z_2)},\ i = \overline{1,\infty}, \qquad z_2' = \frac{rz_2\sum\limits_{j=1}^{\infty}\zeta_j w_j}{(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\zeta_j w_j + z_2)} - bz_2. \tag{3.8}$$

Заметим, что при этом отношение ζ_i/ζ_1 подчиняется уравнению

$$(\zeta_i/\zeta_1)' = (\lambda_i - \lambda_1)(\zeta_i/\zeta_1), \quad i = \overline{2,\infty}.$$

Решая его, имеем $(\zeta_i/\zeta_1) = (\varphi_i/\varphi_1)\exp(\lambda_i - \lambda_1)t$, $i = \overline{2,\infty}$. Так как все разности $\lambda_i - \lambda_1$ по условию строго отрицательны, то все отношения ζ_i/ζ_1 стремятся к нулю, $i = \overline{2,\infty}$. Более того, для функционального ряда $\sum\limits_{i=2}^{\infty}(\zeta_i/\zeta_1)w_i$ на луче $[0,+\infty)$ справедливы оценки

$$\Big|\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\zeta_i}{\zeta_1}w_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty}\Big(\frac{\zeta_i}{\zeta_1}\Big)^2}\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty}w_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\Big)^2}\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty}w_i^2}.$$

Последние два ряда в правой части оценки сходятся в силу равенства Парсеваля, следовательно, исходный ряд сходится равномерно на луче $[0,+\infty)$. Значит, возможен почленный переход к пределу в сумме этого ряда при t, стремящемся к бесконечности. Поскольку пределы всех членов ряда равны нулю, то и предел суммы ряда равен нулю:

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\zeta_i}{\zeta_1}w_i = 0. \tag{3.9}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\zeta_i}{\zeta_1}a_i=0. \tag{3.10}$$

Из уравнений (3.8) следут, что отношение ζ_1/z_2 определяется следующим образом:

$$\left(\frac{\zeta_1}{z_2}\right)'=\frac{\zeta_1' z_2-\zeta_1 z_2'}{z_2^2}=\frac{\zeta_1}{z_2}(\lambda_1-r+b),\quad \frac{\zeta_1}{z_2}(t)=\frac{\varphi_1}{z_2^0}exp\Big((\lambda_1+b)t-\int\limits_o^t r(\tau)d\tau\Big).$$

Отсюда, с учетом обозначения (1.4), получим выражение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta_1}{z_2}(t)=\frac{\varphi_1}{z_2^0}\exp\Big(\lim_{t\to\infty}t(\lambda_1+b-\langle r\rangle)\Big)=\begin{cases}0, & \text{если } \langle r\rangle>\lambda_1+b,\\ \infty, & \text{если } \langle r\rangle<\lambda_1+b.\end{cases}$$

Если $\langle r\rangle=\lambda_1+b$, то возможны различные результаты. В частности, предел $\lim\limits_{t\to\infty}(\zeta_1/z_2)$ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Возможен случай, когда указанного предела вообще не существует.

Из системы (1.1) следует, что переменная z, определяемая соотношением (1.3), удовлетворяет уравнению

$$z'=\int_W az_1dx-bz_2=\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j a_j-bz_2=z\Big(\Big(a_1+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\zeta_j}{\zeta_1}a_j\Big)\frac{\zeta_1}{z}-b\frac{z_2}{z}\Big), \tag{3.11}$$

где отношения ζ_1/z и z_2/z выражаются следующим образом

$$\frac{\zeta_1}{z}=\zeta_1/(\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j w_j+z_2)=\left(w_1+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\zeta_j}{\zeta_1}w_j+z_2/\zeta_1\right)^{-1},$$

$$\frac{z_2}{z}=z_2/(\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j w_j+z_2)=\left(\frac{\zeta_1}{z_2}\left(w_1+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\zeta_j}{\zeta_1}w_j\right)+1\right)^{-1}.$$

В зависимости от величины $\lim\limits_{t\to\infty}(\zeta_1/z_2)$ получим следующие предельные значения:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta_1}{z}(t)=0,\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{z_2}{z}(t)=1,\quad \text{если } \lim_{t\to\infty}\frac{\zeta_1}{z_2}=0;$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta_1}{z}(t)=1/w_1,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{z_2}{z}(t)=0,\quad \text{если } \lim_{t\to\infty}\frac{\zeta_1}{z_2}=\infty.$$

Известно, что если непрерывная функция имеет предел, то ее временное среднее совпадает с этим пределом. В силу предельного равенства (3.10) и ограниченности отношения ζ_1/z справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\zeta_j}{\zeta_1}a_j\Big)\frac{\zeta_1}{z}d\tau=0, \tag{3.12}$$

тогда с учетом равенства (3.7) для $i=1$ получим следующее:

$$\lim_{t\to\infty}z=z(0)\exp\left(\lim_{t\to\infty}t\Big(a_1\left\langle\frac{\zeta_1}{z}\right\rangle-b\left\langle\frac{z_2}{z}\right\rangle\Big)\right)=\begin{cases}0, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty}(\zeta_1/z_2)=0,\\ 0, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty}(\zeta_1/z_2)=\infty,\ \lambda_1<0,\\ +\infty, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty}(\zeta_1/z_2)=\infty,\ \lambda_1>0.\end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} z$ может принимать любое неотрицательное конечное или бесконечное значение, может и не существовать.

Наконец, вернемся к рассмотрению уравнения относительно переменной z_2 в системе (3.8). Его можно переписать в виде

$$z_2' = z_2\left(r\Big(w_1 + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\zeta_j}{\zeta_1}w_j\Big)\frac{\zeta_1}{z} - b\right). \tag{3.13}$$

В силу (3.9), ограниченности функций r и ζ_1/z справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t r\frac{\zeta_1}{z}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\zeta_j}{\zeta_1}w_j d\tau = 0, \tag{3.14}$$

тогда $\lim\limits_{t\to\infty} z_2(t) = z_2^0 \exp\Big(\lim\limits_{t\to\infty} t\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t rw_1\frac{\zeta_1}{z}d\tau - b\Big)\Big)$. В зависимости от величины $\lim\limits_{t\to\infty}(\zeta_1/z)$ получим следующие предельные значения функции $z_2(t)$:

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \lim_{t\to\infty}\zeta_1/z = 0, \quad \text{то} \lim_{t\to\infty} z_2 = 0;\\ &\text{если} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\zeta_1}{z} = 1/w_1, \quad \text{то} \lim_{t\to\infty} z_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \langle r\rangle < b,\\ +\infty & \text{при } \langle r\rangle > b.\end{cases}\end{aligned}$$

Заметим, что при $\langle r\rangle = b$ величина $\lim\limits_{t\to\infty} z_2$ может принимать любое неотрицательное конечное или бесконечное значение, может и не существовать.

При $\langle r\rangle \neq \lambda_1 + b$ и $\langle r\rangle \neq b$ получим предельные значения функций $z_2(t)$, $z(t)$ и z_2/z, указанные в теореме 2.1.

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим четыре задачи оптимизации для каждого из функционалов $J_1 = \lim\limits_{t\to\infty} z_2$, $J_2 = \lim\limits_{t\to\infty}(z_2/z)$, $J_3 = \langle z_2'/z_2\rangle$ и $J_4 = \langle \eta'/\eta\rangle$, где $\eta = z_2/z$.

1. Как следует из проведенного выше исследования, абсолютный максимум критерия качества $J_1 = \lim\limits_{t\to\infty} z_2$, равный плюс бесконечности достигается при выполнении двойного неравенства

$$b < \langle r\rangle < \lambda_1 + b. \tag{3.15}$$

В противном случае значение критерия качества равно нулю — наименьшему возможному значению.

Согласно формуле (2.5) и неравенствам (2.6) временное среднее функции $r(t)$ удовлетворяет условию $r_0 - c \le \langle r\rangle \le r_0 + c$. Отсюда нетрудно видеть, что если константа c, ограничивающая мощность управляющего воздействия, удовлетворяет неравенствам $0 < c < b - r_0$ или $0 < c < -\lambda_1 - b + r_0$, то выполнение неравенства (3.15) невозможно, следовательно, особи второго вида в этом случае будут вымирать при любом возможном управлении. При заданных параметрах b, r_0 и λ_1 невозможно одновременное выполнение этих неравенств.

Если выполняются неравенства $-c \le b - r_0 < c$ или $-c < \lambda_1 + b - r_0 \le c$, то любое управление, имеющее временное среднее (или предел), удовлетворяющее условию $b - r_0 < \langle u\rangle < \lambda_1 + b - r_0$, будет оптимальным. В частности, таким может быть постоянное управление.

В одном случае, когда $c < -b + r_0$ и $c < \lambda_1 + b - r_0$, любое управление, имеющее временное среднее (или предел), будет оптимальным

Если $c = b - r_0$ или $c = -\lambda_1 - b + r_0$, то нельзя гарантировать существование управления, для которого предел z_2 равен плюс бесконечности, так как результат будет существенно зависеть от начальных условий и соотношения параметров системы.

2. Рассмотрим задачу максимизации функционала $J_2 = \lim\limits_{t\to\infty}(z_2/z)$. Как следует из теоремы 2.1 данный функционал может достигать своего абсолютного максимума, равного единице, при выполнении условия

$$\langle r\rangle > \lambda_1 + b. \tag{3.16}$$

В противном случае значение критерия качества равно нулю — наименьшему возможному значению.

Если константа c, ограничивающая мощность управляющего воздействия, удовлетворяет неравенству $c < \lambda_1 + b - r_0$, то выполнение неравенства (3.16) невозможно.

Если $c = \lambda_1 + b - r_0$, то нельзя гарантировать существование оптимального управления, так как значение критерия качества $\lim\limits_{t\to\infty}(z_2/z)$ будет существенно зависеть от начальных условий и соотношения параметров системы.

Если выполняется неравенство $-c \le \lambda_1 + b - r_0 < c$, то достичь абсолютного максимума можно с помощью любого управления, удовлетворяющего условию $\langle u\rangle > \lambda_1 + b - r_0$, в частности, при $u = c$.

Если $c < -\lambda_1 - b + r_0$, то любое управление, имеющее временное среднее (или предел), доставляет абсолютный максимум рассматриваемому функционалу.

3. Рассмотрим задачу максимизации функционала $J_3 = \langle z_2'/z_2\rangle$. Из уравнения (3.13) и предельного равенства (3.14) вытекает, что этот критерий качества выражается следующим образом:

$$\langle z_2'/z_2\rangle = \left\langle r w_1 \frac{\zeta_1}{z}\right\rangle - b, \tag{3.17}$$

и, как следует из анализа предельного поведения величины ζ_1/z, зависящего от временного среднего $\langle r\rangle$, может принимать следующие значения:

$$\langle z_2'/z_2\rangle = \begin{cases} -b, & \text{если } \langle r\rangle > \lambda_1 + b, \\ \langle r\rangle - b, & \text{если } \langle r\rangle < \lambda_1 + b. \end{cases}$$

При сделанных предположениях относительно вида функции $r(t)$ и ограниченности управления константой c критерий $J_3 = \langle z_2'/z_2\rangle$ достигает своего абсолютного максимума при условии

$$\langle r\rangle < \lambda_1 + b. \tag{3.18}$$

При $\langle r\rangle > \lambda_1 + b$ критерий качества принимает наименьшее возможное значение $-b$.

Если константа c, ограничивающая мощность управляющего воздействия, удовлетворяет неравенству $c \le -\lambda_1 - b + r_0$, то выполнение неравенства (3.18) невозможно.

Если выполняется неравенство $-c < \lambda_1 + b - r_0 \le c$, то достичь абсолютного максимума можно с помощью любого управления, удовлетворяющего условию $\langle u\rangle < \lambda_1 + b - r_0$.

Если $c < \lambda_1 + b - r_0$, то любое управление, имеющее временное среднее (или предел), доставляет абсолютный максимум рассматриваемому функционалу, в частности, $u = c$.

4. Рассмотрим задачу максимизации функционала $J_4 = \langle \eta'/\eta\rangle$, где $\eta = z_2/z$. Легко убедиться, что $\eta'/\eta = z_2'/z_2 - z'/z,$ тогда из выражения (3.17) и уравнения (3.11) с учетом предельного равенства (3.12) получим следующее представление рассматриваемого функционала $\left\langle \dfrac{\eta'}{\eta}\right\rangle = \left\langle (r w_1 - a_1)\dfrac{\zeta_1}{z}\right\rangle + b\Big(\left\langle \dfrac{z_2}{z}\right\rangle - 1\Big).$

Как следует из анализа предельного поведения величин ζ_1/z и z_2/z этот функционал в зависимости от временного среднего $\langle r\rangle$, принимает следующие значения:

$$\langle \eta'/\eta\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle r\rangle > \lambda_1 + b, \\ \langle r\rangle - \lambda_1 - b, & \text{если } \langle r\rangle < \lambda_1 + b. \end{cases}$$

Максимум критерия качества $J_4 = \langle \eta'/\eta\rangle$ достигается, также как и для функционала $J_2 = \lim\limits_{t\to\infty}(z_2/z)$, лишь при выполнение условия (3.16) и при том же соотношении параметров λ_1, b, r_0 и c, которые приводятся в пункте 2.
Доказательство закончено.

Заключение

В работе рассмотрена самовоспроизводящаяся система, объекты которой реализуют одну из двух возможных стратегий поведения: „нормальную“ (с дальнейшим размножением) или „паталогическую“ (без размножения). Исследовано предельное поведение системы. Установлено, что при некоторых соотношениях входных параметров величина, характеризующая численность всей системы, стремится к нулю, что соответствует вырождению системы. На основании этого решаются задачи оптимального управления данной системой при неограниченном времени управления. Функционалы качества в рассматриваемых задачах отражают увеличение в системе объектов с «паталогической» стратегией поведения. Доказано, что при максимизации некоторых функционалов система саморазрушается. Указаны адекватные и неадекватные критерии с точки зрения сохранения существования системы.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-12452.

Список литературы

1. Нейман Дж. фон., *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, М., 1971.

2. Розоноэр Л. И., Седых Е. И., “О механизмах эволюции самовоспроизводящихся систем”, *Автоматика и телемеханика*, 1979, № 2, 110–119.

3. Заславский Б. Г., Полуэктов Р .А., *Управление экологическими системами*, Наука, М, 1988.

4. Абакумов А. И., “Оптимальное управление популяцией с распределенными параметрами”, *Информатика и системы управления*, 2011, № 3(29), 3–9.

5. Фрисман Е. Я., Ласт Е. В., “Динамическая неустойчивость промысловых популяций с возрастной структурой (на примере лососевых видов рыб)”, *Доклады Академии наук*, **394**:4 (2004), 569–573.

6. Clark C. W., *Bioeconomic modelling and fisheries management*, Wiley Intersc. Pub., New York, 1985.

7. Кузенков О.А., “Задача оптимального управления для распределенной системы типа Вольтерра”, *Автоматика и телемеханика*, 2006, № 7, 14–26.

8. Кузенков О. А., Кузенкова Г. В., “Оптимальное управление системами авторепродукции”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2012, №4, 26–37.

9. Неймарк Ю. И., Коган Н. Я., Савельев В. П., *Динамические модели теории управления*, Наука, М., 1985.

10. Чернавский Д. С., *Синергетика и информация (динамическая теория информации)*, Едиториал УРСС, Минск, 2004.

11. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., *Оптимальное управление*, Наука, М, 1979.

12. Кузенков О. А., “Исследование асимптотического поведения в некоторых моделях с нелинейной динамикой”, *Нелинейная динамика и управление*, 2002, №2, 333–335.

13. Кузенков О. А., Рябова Е. А., *Математическое моделирование процессов отбора: Учеб. пособие*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2007.

14. Кузенков О. А., Рябова Е. А., Круподерова К. Р., *Математические модели процессов отбора*, Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород. Режим доступа: http://www.unn.ru/books/met_files/kuzryab.pdf., 2012.

Some aspects of the optimization of self-replicating systems

© **O. A. Kuzenkov[4], E. A. Ryabova[5]**

Abstract. Model of self-replicating system and its limit behavior are studied. On this basis, the problem of optimizing the system with unlimited time control are solved. Quality criteria in these problems reflect an increase replicating objects with selected behavioral strategy. It is proved that maximization of some criteria leads to destruction of the whole system.

Key Words: self-replicating systems, optimal control, unlimited time control

[4] Associate Professor of numerical and functional analysis of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; kuzenkov_o@mail.ru

[5] Senior teacher of chair numerical and functional analysis of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; riabova-ea@rambler.ru