

УДК 533.6.013.42

Математическое моделирование динамики защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа

© П. А. Вельмисов¹, В. А. Судаков², А. В. Анкилов³

Аннотация. Исследуется решение начально-краевой задачи для связанной системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей динамику упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью, при взаимодействии стенки со сверхзвуковым потоком газа. Численно-аналитическое решение, основанное на методе Бубнова-Галёркина, позволяет провести численный эксперимент с целью определения характера колебаний.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругая пластина, деформация, динамика, устойчивость, сверхзвуковой поток газа, жидкость, дифференциальные уравнения с частными производными, численное решение, метод Бубнова-Галёркина

1. Введение

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надёжности эксплуатации [2] - [21]. Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов: элерона – составной части крыла; руля высоты – составной части стабилизатора, руля направления – составной части киля; панели – составной части фюзеляжа или крыла [2], [5], [6], [8], [9], [12], [13], [14], [17]. Аналогичная проблема возникает при исследовании течений в проточных каналах, трубопроводах различного назначения, содержащих упругие элементы [7], [10], [11], [14], [15], [18].

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [20]). Другим примером, когда деформация упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии необходима для функционирования приборов и является основой их работы, являются датчики давления [3], [4], [16], [19].

¹ Доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

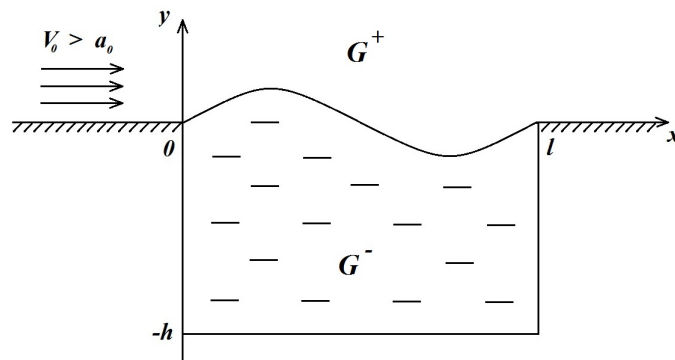
² Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; sseevva@inbox.ru.

³ Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

В работе рассматривается численно-аналитическое решение задачи о динамике упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью (несжимаемая среда), при обтекании стенки сверхзвуковым потоком газа (сжимаемая среда). Исследование проводится в линейной постановке. Задача сведена к решению дифференциального уравнения в частных производных с начальными и краевыми условиями, в котором неизвестной является функция деформации стенки резервуара. На основе численного эксперимента, основой которого является метод Бубнова-Галёркина, проводится анализ зависимости характера колебаний от параметров механической системы, в т.ч. от значения скорости набегающего сверхзвукового потока. Этот анализ позволяет судить об устойчивости или неустойчивости колебаний.

2. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о динамике упругой стенки резервуара $G^- = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l, -h < y < 0\}$, заполненного жидкостью. Упругой является стенка, занимающая положение $y = 0, 0 < x < l$ и моделируемая упругой пластиной. Остальные стенки ($x = 0, x = l$ и $y = -h$) считаются недеформируемыми (рис. 2.1). В области $G^+ = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, +\infty)\}$ протекает сверхзвуковой поток газа в направлении оси Ox со скоростью $V_0 > a_0$, где a_0 – скорость звука. Предполагается, что число Маха $M_0 = \frac{V_0}{a_0} > \sqrt{2}$.



Р и с у н о к 2.1

Резервуар с деформируемой стенкой, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации (прогиб) пластины; $\varphi^-(x, y, t)$ – потенциал скорости жидкости в области G^- , $\varphi^+(x, y, t)$ – потенциал скорости газа в области G^+ . Математическая постановка задачи в линейном приближении имеет вид:

$$\varphi_{tt}^+ + 2V_0\varphi_{xt}^+ + V_0^2\varphi_{xx}^+ = a_0^2(\varphi_{xx}^+ + \varphi_{yy}^+), \quad (x, y) \in G^+; \quad (2.1)$$

$$\varphi_y^+(x, 0, t) = \begin{cases} w_t + V_0 w_x, & x \in (0, l), \quad t \geq 0, \\ 0, & x \in (l, +\infty) \quad t \geq 0; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\varphi^+(0, y, t) = 0, \quad \varphi_x^+(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, \infty), \quad t \geq 0; \quad (2.3)$$

$$\varphi^+(x, y, 0) = 0, \quad \varphi_t^+(x, y, 0) = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad y \in (0, \infty); \quad (2.4)$$

$$\varphi_{xx}^- + \varphi_{yy}^- = 0, \quad (x, y) \in G^-; \quad (2.5)$$

$$\varphi_y^-(x, -h, t) = 0, \quad \varphi_y^-(x, 0, t) = w_t(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \geq 0; \quad (2.6)$$

$$\varphi_x^-(0, y, t) = 0, \quad \varphi_x^-(l, y, t) = 0, \quad y \in (-h, 0), \quad t \geq 0; \quad (2.7)$$

$$mw_{tt}(x, t) + Dw_{xxxx}(x, t) = (p^- - \rho^- \varphi_t^-(x, 0, t)) - (p^+ - \rho(\varphi_t^+(x, 0, t) + V_0 \varphi_x^+(x, 0, t))); \quad (2.8)$$

$$w(0, t) = w_{xx}(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (2.9)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad w_t(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (x, l). \quad (2.10)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y и t ; D и m – изгибная жесткость и погонная масса пластины; V_0, ρ^+, p^+ – скорость газа, плотность и давление в набегающем однородном потоке в области G^+ ; ρ^-, p^- – плотность и давление жидкости в области G^- в состоянии покоя.

Уравнение (2.1) описывает течение газа в области G^+ в модели идеальной сжимаемой среды; (2.2), (2.6), (2.7) – условия непротекания; (2.3) – условия отсутствия возмущений перед пластиной в области G^+ ; (2.4) – условия отсутствия возмущений в начальный момент времени в области G^+ ; уравнение Лапласа (2.5) описывает динамику жидкости в области G^- в модели идеальной несжимаемой среды; (2.8) – уравнение, описывающее динамику упругой стенки резервуара с учетом воздействия на неё сверхзвукового потока газа сверху и жидкости снизу; условия (2.9) соответствуют шарнирному закреплению концов упругого элемента резервуара; (2.10) – начальные условия, которые должны быть согласованы с (2.9). Заметим, что предлагаемый ниже метод решения задачи пригоден и для любых других закреплений концов, например для жесткого защемления.

Уравнения и условия (2.1) - (2.10) образуют начально-краевую задачу для определения трех неизвестных функций $w(x, t), \varphi^+(x, y, t), \varphi^-(x, y, t)$.

Для решения задачи в верхней области G^+ применим операционный метод. Перейдем в уравнении (2.1) и условии (2.2) к безразмерным переменным $\varphi^*(x^*, y^*, t^*), w^*(x^*, t^*), x^*, y^*, t^*$:

$$\varphi^*(x^*, y^*, t^*) = \frac{\varphi^+(x, y, t)}{V_0 l}, \quad w^*(x^*, t^*) = \frac{w(x, t)}{l}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \quad t^* = \frac{V_0 t}{l}. \quad (2.11)$$

Тогда уравнение (2.1) и условие (2.2) примут вид:

$$\varphi_{t^* t^*}^* + 2\varphi_{x^* t^*}^* + \varphi_{x^* x^*}^* = M_0^{-2} (\varphi_{x^* x^*}^* + \varphi_{y^* y^*}^*), \quad (2.12)$$

$$\varphi_{y^*}^*(x^*, 0, t^*) = \begin{cases} w_t^* + w_x^*, & x^* \in (0, 1), \quad t^* \geq 0, \\ 0, & x^* \in (1, +\infty) \quad t^* \geq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (2.12) по переменным x^* и t^* , с учетом условий (2.3), (2.4), для двойного изображения по Лапласу $\bar{\varphi}^*(p, y^*, q)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[(p + q)^2 - M_0^{-2} p^2] \bar{\varphi}^*(p, y^*, q) = M_0^{-2} \bar{\varphi}_{y^* y^*}^*(p, y^*, q). \quad (2.14)$$

Применяя преобразование Лапласа по переменным x^* и t^* к граничному условию непротекания (2.13), будем иметь

$$\bar{\varphi}_y^*(p, 0, q) = (q + p) \bar{w}(p, q). \quad (2.15)$$

Общее решение уравнения (2.14), удовлетворяющее условию затухания при $y^* \rightarrow \infty$ и граничному условию непротекания (2.15), имеет вид

$$\bar{\varphi}^*(p, y^*, q) = -\frac{(p+q)\bar{w}(p, q)}{M_0\sqrt{(p+q)^2 - M_0^{-2}p^2}} e^{-M_0\sqrt{(p+q)^2 - M_0^{-2}p^2}y^*}. \quad (2.16)$$

Из выражения (2.16) при $y = 0$ находим изображение слагаемого из правой части уравнения (2.8)

$$-\rho(\varphi_t^+(x, 0, t) + V_0\varphi_x^+(x, 0, t)) = -\alpha p^+ M_0^2(\varphi_{t^*}^* + \varphi_{x^*}^*), \quad (2.17)$$

а именно

$$-\alpha M_0^2(\varphi_{t^*}^* + \varphi_{x^*}^*)_{y=0} \Leftarrow -\alpha M_0^2(p+q)\bar{\varphi}^*(p, 0, q) = \frac{\alpha M_0(p+q)^2\bar{w}(p, q)}{\sqrt{((p+q)^2 - M_0^{-2}p^2)}}. \quad (2.18)$$

Дальнейшее решение задачи состоит в нахождении оригинала, соответствующего изображению

$$\frac{\alpha M_0(p+q)^2\bar{w}(p, q)}{\sqrt{((p+q)^2 - M_0^{-2}p^2)}}. \quad (2.19)$$

Приближенное выражение оригинала, соответствующее изображению (2.19), полученное на основе квазистатической теории, в которой формула для вычисления давления получена путем разложения по приведенной частоте точного выражения для давления двумерного неустановившегося течения [1], [21], имеет вид (в размерных переменных)

$$\frac{\rho^+V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1}w_t(x, t) \right) \quad (2.20)$$

Тогда уравнение динамики упругой стенки резервуара (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} &mw_{tt}(x, t) + Dw_{xxxx}(x, t) = \\ &= (p^- - \rho^-\varphi_t^-(x, 0, t)) - p^+ - \frac{\rho^+V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1}w_t(x, t) \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Слагаемое

$$-p^+ - \frac{\rho^+V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1}w_t(x, t) \right) \quad (2.22)$$

в уравнении (2.21) описывает воздействие на пластину сверхзвукового потока газа.

Получим дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает динамику упругой стенки резервуара с учетом аэрогидродинамического воздействия на неё, содержащее лишь $w(x, t)$, согласно поставленной задаче (2.5) - (2.10).

Представим потенциал скорости $\varphi^-(x, y, t)$, являющийся решением уравнения Лапласа (2.5), в виде

$$\varphi^-(x, y, t) = \alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos(\lambda_n x)(e^{\lambda_n y} + e^{-\lambda_n y}e^{-2\lambda_n h}), \quad (2.23)$$

где $\alpha(t)$ и $b_n(t)$ - некоторые произвольные функции, а $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$.

Условия (2.7) и первое условие (2.6) выполнены. Удовлетворяя второму условию (2.6), получим

$$b_m(t) = \frac{2}{l\lambda_m(1 - e^{-2\lambda_m h})} \int_0^l w_t(x, t) \cos(\lambda_m x) dx. \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в (2.23), согласно (2.8), получим уравнение динамики упругой пластины

$$\begin{aligned}
 &mw_{tt}(x, t) + Dw_{xxxx}(x, t) = \\
 &= (p^- - p^+) - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right) - \\
 &- \rho^- \left(\alpha_t(t) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n x)(1 + e^{-2\lambda_n h})}{\lambda_n(1 - e^{-2\lambda_n h})} \int_0^l w_t(x, t) \cos(\lambda_n x) dx \right). \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Оставшуюся произвольной функцию $\alpha_t(t)$ определим, удовлетворяя уравнению (2.25) в среднем, учитывая при этом условие несжимаемости среды

$$\alpha_t(t) = \left(-D \int_0^l w_{xxxx}(x, t) dx + (p^- - p^+)l \right) \frac{1}{l\rho^-}. \quad (2.26)$$

3. Численно - аналитическое решение задачи

Применим метод Галёркина для решения начально-краевой задачи (2.25), (2.9), (2.10). Приведем уравнение (2.25) к виду

$$\begin{aligned}
 &w_{tt}(x, t) = \frac{1}{m} (-Dw_{xxxx}(x, t) + p - \theta V_0 w_x - \theta \gamma w_t) - \\
 &- \frac{1}{m} \rho^- \left(\alpha_t(t) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x) K_n \int_0^l w_t(x, t) \cos(\lambda_n x) dx \right), \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

где $p = (p^- - p^+)$, $\theta = \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$, $K_n = \frac{(1 + e^{-2\lambda_n h})}{\lambda_n(1 - e^{-2\lambda_n h})}$, $\gamma = \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1}$.

Согласно методу Галёркина пробное решение $w(x, t)$ будем искать в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N w_k(t) \sin(\lambda_k x), \quad (3.2)$$

где $\{\sin(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система базисных функций на отрезке $[0, l]$, подобранных так, чтобы выполнялись заданные краевые условия (2.9).

Условия ортогональности невязки уравнения (3.1) с учетом (3.2) позволяют записать систему уравнений для $w_k(t)$

$$\begin{aligned}
 \ddot{w}_k = \frac{2}{lm} \left(-D \frac{l}{2} \lambda_k^4 w_k - \theta V_0 \sum_{k=1}^N \lambda_k w_k H_{k,m}^1 - \theta \gamma \frac{l}{2} \dot{w}_k + H_m^2 (p - \rho^- \alpha_t(t)) \right) - \\
 - \frac{4}{l^2 m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_n \sum_{k=1}^N w_k H_{k,n}^3 H_{m,n}^4 \right), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где $H_{k,m}^1 = \int_0^l \cos(\lambda_k x) \sin(\lambda_m x) dx$, $H_m^2 = \int_0^l \sin(\lambda_m x) dx$, $H_{k,n}^3 = \int_0^l \sin(\lambda_k x) \cos(\lambda_n x) dx$, $H_{m,n}^4 = \int_0^l \sin(\lambda_m x) \cos(\lambda_n x) dx$.

Начальные условия для $w_k(t)$ в (3.2) получим согласно (2.10)

$$w_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin(\lambda_k x) dx, \quad \dot{w}_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) \sin(\lambda_k x) dx. \quad (3.4)$$

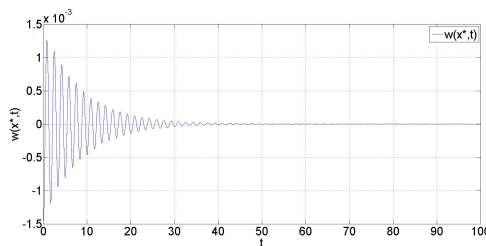
Таким образом, получена задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) с начальными условиями (3.4).

Приведем примеры численного решения задачи (3.3), (3.4). Ниже на графиках представлены деформации упругой стенки резервуара при обтекании сверхзвуковым потоком газа при заданных параметрах механической системы. По этим графикам можно судить об устойчивости или неустойчивости колебаний стенки.

Будем считать, что упругий элемент изготовлен из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$ – модуль упругости, $\rho_{pl} = 2699$ – плотность), обтекается сверхзвуковым потоком воздуха ($\rho^+ = 1.3$), при этом резервуар заполнен водой ($\rho^- = 998.2$). Другие параметры механической системы: $l = 100$; $h = 100$; $h_{pl} = 0.5$ (толщина пластины); $m = 269.9$ (погонная масса); $\nu = 0.34$ (коэффициент Пуассона); $D = \frac{Eh_{pl}^3}{12(1-\nu^2)} = 6.5958 \cdot 10^8$ (изгибная жесткость). Все значения приведены в системе СИ. Начальные условия зададим в виде: $w(x, 0) = -0.0015 \sin(\frac{2\pi x}{l})$, $\dot{w}(x, 0) = 0$.

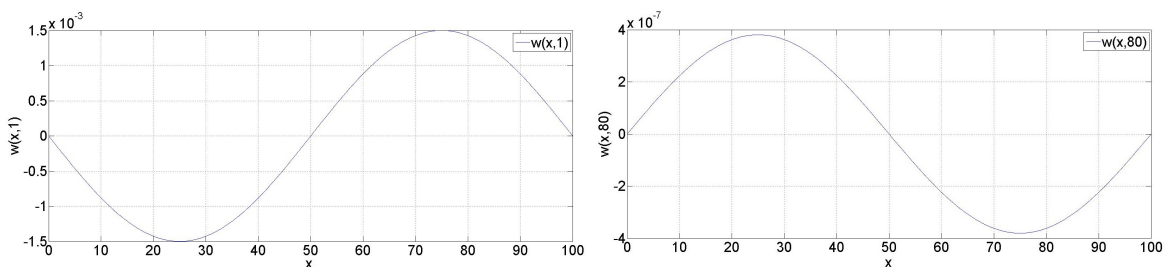
С помощью пакета прикладных программ MATLAB решается задача Коши (3.3), (3.4) (порядок приближения $N=15$) и строятся графики функции $w(x, t)$ в точке $x^* = \frac{l}{4}$ при различных значениях скорости набегающего потока V .

1. $V = 600$



Р и с у н о к 3.1

Закон колебаний $w(x^*, t)$ упругой стенки резервуара в сечении $x^* = \frac{l}{4}$

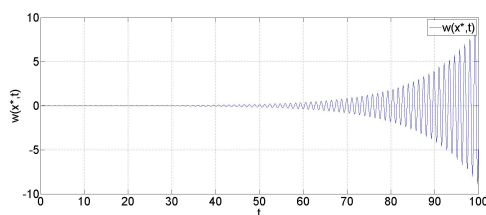


Р и с у н о к 3.2

Прогиб упругой стенки резервуара $w(x, t)$ в моменты времени $t = 1$, $t = 80$

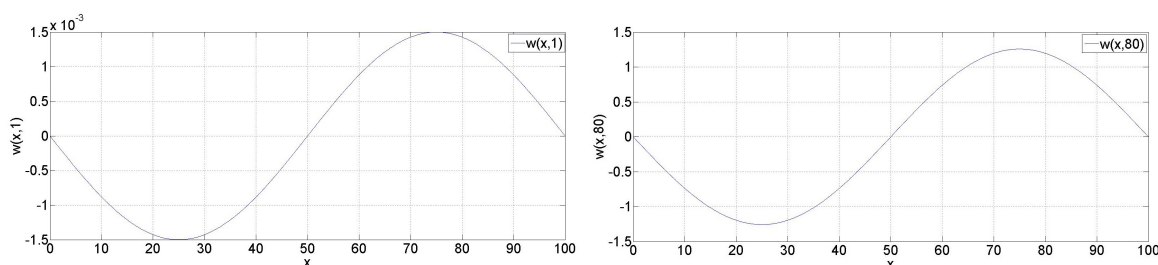
Согласно графикам на рис. 3.1 и рис. 3.2 можно сделать вывод, что решение задачи (3.3), (3.4) при скорости $V = 600$ является устойчивым.

2. $V = 1070$



Р и с у н о к 3.3

Закон колебаний $w(x^*, t)$ упругой стенки резервуара в сечении $x^* = \frac{l}{4}$



Р и с у н о к 3.4

Прогиб упругой стенки резервуара $w(x, t)$ в моменты времени $t = 1$, $t = 80$

Согласно графикам на рис. 3.3 и рис. 3.4 можно сделать вывод, что решение задачи (3.3), (3.4) при скорости $V = 1070$ является неустойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Voss H. V., "The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells", *J. Aerospace Sciences*, **3** (1961), 945–956.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В., *Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"*, УлГТУ, Ульяновск, 2008, 188 с.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., "Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"", *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(27)** (2007), 7–14.
5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "Численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины при аэрогидродинамическом воздействии", *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 3–22.

6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Дегтярева Н. А., “Устойчивость упругих элементов крылового профиля”, *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2007, 9–18.
7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(22)** (2011), 179–185.
8. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “О решениях интегродифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **2(23)** (2011), 266–271.
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **1(37)** (2009), 7–16.
10. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **2(38)** (2009), 7–17.
11. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., “Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(30)** (2013), 1–7.
12. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Устойчивость решений некоторых классов интегродифференциальных уравнений в частных производных”, *Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия*, **8/1(67)** (2008), 331–344.
13. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкций при сверхзвуковом обтекании”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(57)** (2011), 59–67.
14. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2011, 200 с.
15. Вельмисов П. А., Решетников Ю. Е., Колмановский Е. Е., “Устойчивость уравнений взаимодействия вязкоупругих пластин с жидкостью”, *Дифференциальные уравнения*, **11(30)** (2011), 1966–1981.
16. Вельмисов П. А., Горбоконеко В. Д., Решетников Ю. А., “Математическое моделирование механической системы “трубопровод-датчик давления””, *Датчики и системы*, **6(49)** (2003), 12–15.
17. Вельмисов П. А., Судаков В. А., Замальдинова Ю. К., “Устойчивость решений одного класса нелинейных начально-краевых задач аэроупругости”, *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцев*, РУДН, Москва, 2013, 290–292.

18. Вельмисов П. А., Молгачев А. А., *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов*, УлГТУ, Ульяновск, 2012, 185 с.
19. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “О некоторых математических моделях механической системы "трубопровод-датчик давления"”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*, **1(29)** (2011), 137–144.
20. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., *Пат.2062662 РФ, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель*, Заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – №5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл.№18..
21. Бочкарев С. А., Матвеев В. П., “Решение о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов”, *Математическое моделирование*, **12** (2002), 55–71.

Mathematical modeling of the dynamics of the shield in the supersonic gas flow.

© P. A. Velmisov⁴, V. A. Sudakov⁵, A. V. Ankilov⁶

Abstract. The solution of the initial-boundary value problem for a coupled system of differential equations describing the dynamics of the elastic wall (shield) tank filled with liquid, the interaction of the wall with a supersonic flow of gas. Numerical-analytical solution based on the method of Bubnov-Galerkin, allows a numerical experiment to determine the nature of the oscillations.

Key Words: aerohydroelasticity, elastic plate, deformation, dynamics, stability, supersonic flow of gas, liquid, differential equations with partial derivatives, the numerical solution, Bubnov-Galerkin method

⁴ Doctor of Physics and Mathematics, Head of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁵ Post-graduate student of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; sseevva@inbox.ru.

⁶ Candidate of Physics and Mathematics, assistant professor of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; ankil@ulstu.ru.